УДК 123.456

©2015 р. В.К. Маслюченко, С.П. Петей

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОТОЧКОВІ ГРАНИЦІ НЕПЕРЕРВНИХ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ ТА ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Доведено аналог теореми Гана про проміжну функцію для зростаючих функцій і з допомогою нього з'ясовано, що кожна зростаюча функція $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ є поточковою границею послідовності неперервних зростаючих функцій $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

An analog of Hahn's insertion theorem is proven. With its help we obtain that every increasing function $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is the pointwise limit of a sequence of increasing continuous functions $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Вступ. Рене Бер [1, 2] ввів класифікацію розривних дійснозначних функцій дійсної змінної, яка потім була перенесена на відображення $f : X \to Y$ між довільними топологічними просторами X і Y. При цьому функціями нульового класу Бера вважаються неперервні відображення, сукупність яких позначається симловами $C(X, Y) = B_0(X, Y)$. Функція $f : X \to Y$ належить до першого класу Бера, якщо існує така послідовність неперервних функцій $f_n : X \to Y$, що $f_n(x) \to f(x)$ для кожного $x \in X$, тобто f є поточковою границею послідовності неперервних функцій f_n. Сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера позначається символом $B_1(X, Y)$, а якщо $Y = \mathbb{R}$ – це числова пряма, то покладають $B_1(X, \mathbb{R}) = B_1(X)$, і так само $C(X, \mathbb{R}) = C(X)$. Якщо $X = [a, b]$ – це відрізок числової прямої, то для скорочення запису пишуть $C[a, b]$ замість $C([a, b])$ і $B_1[a, b]$ замість $B_1([a, b])$.

В теорії функцій і функціональному аналізі часто використовується клас $V[a, b]$ функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації [3, с.86]. Нехай $V_0[a, b] = V[a, b] \cap C[a, b]$ і $V_1[a, b]$ – це сукупність функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, які є поточковими границями послідовностей функцій f_n з $V_0[a, b]$. Зрозуміло, що $V_1[a, b] \subseteq B_1[a, b]$. Виникає природне питання: чи має місце рівність: $V_1[a, b] = B_1[a, b]$? Використовуючи теорему Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції на $[a, b]$ многочленами, неважко переконатися в тому, що відповідь на це питання ствердна (Теорема 2).

Функції обмеженої варіації на $[a, b]$ пов'язані з монотонними функціями. А саме, $f \in V[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли існують такі зростаючі функції $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, що $f = g - h$. Позначимо символом $M^+[a, b]$ множину всіх зростаючих (в нестрогому розумінні) функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Нехай $M_0^+[a, b] = M^+[a, b] \cap C[a, b]$ і $M_1^+[a, b]$ – це сукупність усіх поточкових границь послідовностей функцій $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ з $M_0^+[a, b]$. Зрозуміло, що $M_1^+[a, b] \subseteq M^+[a, b]$. Але чи має тут місце рівність? Тут ми дамо ствердну відповідь і на це питання, використовуючи відкритий нами аналог відомої теореми Гана про напівнеперервні функції (теорема 3). Так само ми розглядаємо класи $M^-[a, b], M_0^-[a, b]$ і $M_1^-[a, b]$, де замість зростаючих функцій беруться спадні, і класи $M[a, b], M_0[a, b]$ і $M_1[a, b]$, де фігурують вже довільні монотонні функції, і показуємо, що $M_1^-[a, b] = M^-[a, b]$ і $M_1[a, b] = M[a, b]$.

2. Поточкові границі неперервних функцій обмеженої варіації Добре відомо [3, с.91], що кожна неперервно диференційовна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ належить до $V[a, b]$, адже її похідна f' буде обмеженою на $[a, b]$ за першою теоремою Вейєрштрасса [5, с.134] і тому за формулою Лагранжа [5, с.181] функція f задовольняє умову Ліпшиця на $[a, b]$, а значить, є функцією обмеженої варіації. Звідси легко випливає

Теорема 1. Кожна неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ є рівномірною границею послідовності функцій $f_n \in V_0[a, b]$.

Доведення. За теоремою Вейерштраса [6, с. 98] для неперерврної функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ існує послідовність многочленів $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка рівномірно на $[a, b]$ збігається до f. Кожний многочлен g є неперервною функцією, його похідна g' – це теж многочлен, отже, g є неперервно диференційовною функцією, а значить, функцією обмеженої варіації на [a,b]. Тому $f_n \in V[a, b]$ і $f_n \in C[a, b]$, тобто $f_n \in V_0[a, b]$ для кожного n.

Теорема 2. $V_1[a, b] = B_1[a, b]$

Доведення. Нехай $f \in B_1[a, b]$. Тоді існує послідовність функцій $f_n \in C[a, b]$, така, що $f_n(x) \to f(x)$ на $[a, b]$. Для кожної функції f_n за теоремою 1 існує така функція $g_n \in V_0[a, b]$, що $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$ на $[a, b]$. Тоді для кожного $x \in [a, b]$

$$|f(x)-g_n(x)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-g_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \frac{1}{n}.$$

Але $|f(x) - f_n(x)| + 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, тому і $|f(x) - g_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$, звідки випливає, що $g_n(x) \to f(x)$ на $[a, b]$, отже, $f \in V_1[a, b]$.

3. Аналог теореми Гана для зростаючих функцій. Нагадаємо, що функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка визначена на топологічному просторі X, називається напівнеперервною зверху/знизу/ в точці x_0 в X, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки $x_0 \in X$, що для всіх $x \in U$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ $/f(x) > f(x_0) - \varepsilon/$. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається напівнеперервною зверху чи знизу, якщо вона є такою у кожній точці x з простору X.

Г.Ган [4] довів, що для кожної пари функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$, заданих на метричному просторі X і таких, що $g(x) \leqslant h(x)$ на X існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Зрозуміло, що це твердження буде справедливим для функцій, заданих на відрізку $X = [a, b]$ числової прямої. В даний час відомо, що теорема Гана справджується і для нормальних просторів X і є для них характеристичною в класі T_1-просторів, вона ж має і свої аналоги (див. [7] і вказану там літературу).

Тут ми доведемо наступний аналог теореми Гана.

Теорема 3. Нехай $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ – зростаючі функції, для яких g - напівнеперервна зверху, h - напівнеперервна знизу і $g(x) \leqslant h(x)$ на $[a, b]$. Тоді існує така зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ на $[a, b]$.

Доведення. За теоремою Гана існує така неперервна функція $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant h(x)$ на $[a, b]$. Для кожного $x \in [a, b]$ звуження $\varphi|_{[a,x]}$ – це неперервна функція. Тому можна розглянути функцію:

$$f(x) = \max_{a \leqslant t \leqslant x} \varphi(t),$$

яка визначена на $[a, b]$. Покажемо, що f і є шуканою функцією. Легко перевірити, що функція f зростає. Справді, якщо $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$, то $[a, x_1] \subseteq [a, x_2]$, отже, $\{\varphi(t) : a \leqslant t \leqslant x_1\} \subseteq \{\varphi(t) : a \leqslant t \leqslant x_2\}$, а тому:

$$f(x_1) = \max_{a \leqslant t \leqslant x_1} \varphi(t) \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant x_2} \varphi(t) = f(x_2).$$

Далі, оскільки функції g і h зростають і $g(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant h(t)$ на $[a, b]$, то і для кожного $x \in [a, b]$

$$g(x) = \max_{a \leqslant t \leqslant x} g(t) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant x} \varphi(t) \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant x} h(t) = h(x),$$

отже, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ на $[a, b]$.

Залишилось довести, що функція f неперервна. Розглянемо довільну точку x_0 з $[a, b]$ і доведемо, що функція f неперервна в точці x_0. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нам потрібно довести, що існує таке $\delta > 0$, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in [a, b]$ і $|x - x_0| < \delta$. З неперервності функції φ у точці x_0 випливає, що існує таке $\delta_0 > 0$, що $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in [a, b]$ і $|x - x_0| < \delta_0$. Оскільки $f(x_0) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant x_0} \varphi(t)$, то існує така точка $t_0 \in [a, x_0]$, що $f(x_0) = \varphi(t_0)$.

Нехай $t_0 < x_0$. Тоді $f(x) = f(x_0)$ на $[t_0, x_0]$, отже, для числа $\delta_1 = x_0 - t_0 > 0$ будемо мати, що $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, як тільки $x_0 - \delta_1 \leqslant x \leqslant x_0$.

Якщо ж $t_0 = x_0$, то $f(x_0) = \varphi(x_0)$ і при $x_0 - \delta_0 < x \leqslant x_0$ будемо мати:

$$f(x_0) - \varepsilon = \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0),$$

отже, $f(x_0) - \varepsilon < f(x) \leqslant f(x_0)$, як тільки $x_0 - \delta_0 < x \leqslant x_0$.

Розглянемо тепер точку $x \in [a, b]$, для якої $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta_0$. Для неї існує така точка $u \in [a, x]$, що $f(x) = \varphi(u)$. Оскільки $f(x) \geqslant f(x_0)$, то $\varphi(u) \geqslant f(x_0)$. Якщо $f(x) = \varphi(u) = f(x_0)$, то функція f стала на відрізку $[x_0, x]$, отже, $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Якщо ж $\varphi(u) > f(x_0)$, то $u > x_0$, адже при $u \leqslant x_0$ виконуються нерівності:

$$\varphi(u) \leqslant f(u) \leqslant f(x_0),$$

звідки $\varphi(u) \leqslant f(x_0)$, що приводить до суперечності. Але $u \leqslant x$, отже, $x_0 < u \leqslant x < x_0 + \delta_0$. В такмоу разі:

$$f(x) = \varphi(u) < \varphi(x_0) + \varepsilon \leqslant f(x_0) + \varepsilon,$$

отже, при $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta_0$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Таким чином, покладаючи $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, ми будемо мати, що при $|x - x_0| < \delta$ і $x \in [a, b]$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

4. Рівномірна апроксимація зростаючих функцій З допомогою теореми 3 ми встановимо далі, що $M_1^+[a, b] = M[a, b]$. Для цього ми тут отримаємо наслідок теореми 3 про рівномірну апроксимаію зростаючої функції $f : X \to \mathbb{R}$ неперервною зростаючою функцією $g : X \to \mathbb{R}$.

Нагадаємо, що коливання $\omega_f(x)$ функції $f : X \to \mathbb{R}$, заданої на топологічному просторі X, у точці $x \in X$ визначається формулою

$$\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U),$$

де $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X, а

$$\omega_f(U) = \sup_{x', x'' \in U} |f(x') - f(x'')|$$

– це коливання функції f на множині U.

Для зростаючої функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ розглянемо числа

$$f(x + 0) = \lim_{t \to x+0} f(t) \text{ при } a \leqslant x < b,$$

$$f(b - 0) = f(b),$$

$$f(x - 0) = \lim_{t \to x-0} f(t) \text{ при } a < x \leqslant b, \text{і}$$

$$f(a + 0) = f(a).$$

Ясно, що $f(x - 0) \leqslant f(x) \leqslant f(x + 0)$ на $[a, b]$.

Лема 1. Для зростаючої на $[a, b]$ функції f коливання

$$\omega_f(x) = f(x + 0) - f(x - 0)$$

на $[a, b]$.

Доведення. Припустимо, що $a < x < b$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\omega_f(x) = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U)$, де $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x, а $\omega_f(U) = \sup\limits_{x', x'' \in U} |f(x') - f(x'')|$ – коливання f на околі U, то існує такий окіл U точки x, що $\omega_f(U) < \omega_f(x) + \varepsilon$. Зрозуміло, що існує таке $\delta > 0$, що $U_\delta[x] = [x - \delta, x + \delta] \subseteq (a, b) \cap U$. Оскільки функція f зростає на $[a, b]$, то

$$f(x + \delta) - f(x - \delta) = \omega_f(U_\delta[x_0]) \leqslant \omega_f(U) <$$

$$< \omega_f(x) + \varepsilon.$$

Ясно, що $f(x + 0) \leqslant f(x + \delta)$ і $f(x - 0) \geqslant f(x - \delta)$, отже,

$$f(x + 0) - f(x - 0) \leqslant f(x + \delta) - f(x - \delta) <$$

$$< \omega_f(x) + \varepsilon,$$

звідки випливає, що $f(x + 0) - f(x - 0) < \omega_f(x) + \varepsilon$. Перейшовши у цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що $f(x + 0) - f(x - 0) \leqslant \omega_f(x)$.

Оскільки $f(x + 0) = \lim\limits_{t \to x+0} f(t)$ і $f(x - 0) = \lim\limits_{t \to x-0} f(t)$, то існує таке $\delta > 0$, що $x \pm \delta \in (a, b)$,

$$0 \leqslant f(x + \delta) - f(x + 0) < \varepsilon,$$

і

$$0 \leqslant f(x - 0) - f(x - \delta) < \varepsilon.$$

Тоді

$$f(x+0) > f(x+\delta) - \varepsilon,$$

і

$$f(x-0) < f(x-\delta) + \varepsilon,$$

отже,

$$f(x+0) - f(x-0) > f(x+\delta) - \varepsilon - f(x-\delta) + \varepsilon >$$

$$> \omega_f(U_\delta) - 2\varepsilon \geqslant \omega_f(x) - 2\varepsilon,$$

а значить, $f(x+0) - f(x-0) > \omega_f(x) - 2\varepsilon$. Спрямувавши в цій нерівності ε до нуля. отримаємо, що $f(x+0) - f(x-0) \geqslant \omega_f(x)$

Таким чином, $\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$. Так само розглядаються випадки $x = a$ і $x = b$.

Лема 2. Для зростаючої функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ функція $y = f(x+0)$ напівнеперервна зверху, а функція $y = f(x-0)$ напівнеперервна знизу, при цьому ці обидві функції зростають на $[a,b]$.

Доведення. Нехай $x_0 \in [a,b)$. Оскільки $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, то для даного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $x_0 + \delta < b$ і

$$f(x_0+0) \leqslant f(x) < f(x_0+0) + \varepsilon,$$

як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta$. Для даного $x \in (x_0, x_0+\delta)$ і довільного $u \in (x, x_0+\delta)$ будемо мати, що $f(u) < f(x_0+0) + \varepsilon$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $u \to x+0$, отримаємо, що $f(x+0) \leqslant f(x_0+0) + \varepsilon$. При $a \leqslant x \leqslant x_0$ будемо мати, що $f(u) < f(x_0+0) + \varepsilon$, отже, нерівність $f(x+0) \leqslant f(x_0+0) + \varepsilon$ виконується на околі $U = [a, x_0+\delta)$ точки x_0 на відрізку $[a,b]$, а це і дає нам напівнеперервність зверху функції $y = f(x+0)$ в точці x_0. Її напівнеперервність зверху у точці b випливає з того, що $f(b+0) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Так само доводиться, що функція $y = f(x-0)$ напівнеперервна знизу. Те, що функції $y = f(x+0)$ і $y = f(x-0)$ зростають разом з функцією f отримується безпосереднім граничним переходом.

Теорема 4. Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція, для якої $\omega_f(x) \leqslant \varepsilon$ на $[a,b]$. Тоді існує така неперервна і зростаюча функція $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, що $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ на $[a,b]$.

Доведення. За лемою 2 функція $g(x) = f(x+0) - \frac{\varepsilon}{2}$ напівнеперервна зверху, а функція $h(x) = f(x-0) + \frac{\varepsilon}{2}$ напівнеперервна знизу, при цьому обидві функції зростають. Далі за лемою 1 коливання $\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$, отже, $f(x+0) - f(x-0) \leqslant \varepsilon$ на $[a,b]$, звідки випливає, що $g(x) \leqslant h(x)$ на $[a,b]$. За теоремою 3 існує така неперервна зростаюча функція $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant h(x)$ на $[a,b]$. Оскільки $f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$ на $[a,b]$, то

$$f(x) - \varphi(x) \leqslant f(x+0) - g(x) =$$

$$= f(x+0) - (f(x+0) - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

і

$$f(x) - \varphi(x) \geqslant f(x-0) - h(x) =$$

$$= f(x-0) - (f(x-0) + \frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{\varepsilon}{2},$$

на $[a,b]$, отже, $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ на $[a,b]$ і φ – шукана функція.

5. Поточкові границі послідовностей неперервних зростаючих функцій

Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – скінченна множина на інтервалі (a,b), причому $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$. Покладемо $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$ і $\eta = \eta_A = \frac{1}{2} \min\limits_{k=\overline{0,n}} \Delta a_k$. Ясно, що $\eta > 0$. Для довільного $\delta \in (0, \eta)$ визначимо числа $a_k^+ = a_k + \delta$ для $k = 0, 1, ..., n$, $a_k^- = a_k - \delta$ для $k = 1, ..., n+1$ і відповідні їм проміжки $I_k^+ = [a_k, a_k^+]$, $I_k^- = [a_k^-, a_k]$ і $I_k = [a_k^-, a_k^+]$ при $k = 1, ..., n$, $I_0 = I_0^+$ та $I_{n+1} = I_{n+1}^-$. Розглянемо також проміжки $J_k = [a_k^+, a_{k+1}^-]$ для $k = 0, 1, ..., n$. Нехай $I = \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} I_k$, $J = \bigcup\limits_{k=0}^{n} J_k$. Зрозуміло, що $I \cup J = [a,b]$. Поставимо у відповідність кожній функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ функцію $g = L_{A,\delta} f : [a,b] \to \mathbb{R}$, що визначається таким чином:

$$g(x) = f(x), \; x \in J;$$

$$g(x) = f(a_k) + \frac{f(a_k^+) - f(a_k)}{a_k^+ - a_k}(x - a_k),$$

$$x \in I_k^+, \ k = 0, ..., n;$$

$$g(x) = f(a_k) + \frac{f(a_k^-) - f(a_k)}{a_k^- - a_k}(x - a_k),$$

$$x \in I_k^-, \ k = 1, ..., n+1.$$

Зауважимо, що визначення функції f коректне, бо для точок a_k^+ і a_k^- і одна, і друга формули дають, що $g(a_k^+) = f(a_k^+)$ і $g(a_k^-) = f(a_k^-)$. Крім того $g(a_k) = f(a_k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Коли функція f зростає, то кутові коефіцієнти $\alpha_k^+ = \frac{f(a_k^+)-f(a_k)}{a_k^+-a_k} \geq 0$ і $\alpha_k^- = \frac{f(a_k^-)-f(a_k)}{a_k^--a_k} \geq 0$ і лінійні функції $g|_{I_k^+}$ та $g|_{I_k^-}$ зростають, а тому і g буде зростаючою функцією на $[a, b]$. При цьому $f(a_k) \leqslant g(x) \leqslant f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$ і $f(a_k^-) \leqslant g(x) \leqslant f(a_k)$ при $x \in I_k^-$. Так само $f(a_k) \leqslant g(x) \leqslant f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$. Так само $f(a_k) \leqslant f(x) \leqslant f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$ і $f(a_k^-) \leqslant f(x) \leqslant f(a_k)$ при $x \in I_k^-$. Тому

$$|g(x) - f(x)| \leqslant f(a_k^+) - f(a_k) = \omega_f(I_k^+) \text{ на } I_k^+$$

і

$$|g(x) - f(x)| \leqslant f(a_k) - f(a_k^-) = \omega_f(I_k^-) \text{ на } I_k^-,$$

а значить,

$$|g(x) - f(x)| \leqslant \omega_f(I_k) \text{ на } I_k.$$

Для зростаючої функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ і її точки розриву x покладемо $\Delta(x) = (f(x-0), f(x+0))$. Символом $D(f)$ ми позначаємо множину точок розриву функції f, а через $C(f)$ - множину її точок неперервності.

Лема 3. Нехай x_1 і x_2 – це різні точки з $D(f)$. Тоді $\Delta(x_1) \cap \Delta(x_2) = \varnothing$.

Доведення. Для певності припустимо, що $x_1 < x_2$. Покажемо, що тоді $f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0)$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\delta_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Оскільки $x_1 < b$, то $f(x_1 + 0) = \lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x)$, а значить, існує таке $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, що $f(x) > f(x_1 + 0) - \varepsilon$, як тільки $x_1 < x \leqslant x_1 + \delta_1$. Так само $a < x_2$, отже, $f(x_2 - 0) = \lim\limits_{x \to x_2 - 0} f(x)$, а значить, існує таке $\delta_2 \in (0, \delta_0)$, що $f(x) < f(x_2 - 0) + \varepsilon$, як тільки $x_2 - \delta_2 \leqslant x < x_2$. Зауважимо, що при цьому:

$$x_1 + \delta_1 < x_1 + \delta_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_2 - \delta_0 < x_2 - \delta_2.$$

В такому разі

$$f(x_1 + 0) < f(x_1 + \delta_1) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant f(x_2 + \delta_2) + \varepsilon < f(x_2 - 0) + 2\varepsilon,$$

отже, $f(x_1 + 0) < f(x_2 - 0) + 2\varepsilon$, звідки при $\varepsilon \to 0$ отримаємо нерівність

$$f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0).$$

Тому $\Delta(x_1) \cap \Delta(x_2) = \varnothing$.

Наступне твердження добре відоме, але ми дамо його доведення для повноти міркувань.

Лема 4. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція і $\varepsilon > 0$. Тоді множина $D^\varepsilon(f) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$ скінченна.

Доведення. За лемою 1 $\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$ для кожного $x \in D(f)$. Припустимо, що множина $D^\varepsilon(f)$ містить n різних точок $x_1, ..., x_n$. Розглянемо множину $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \Delta(x_k)$ і оцінимо її міру Лебега $\mu(E)$. Маємо

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\Delta(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k+0) - f(x_k-0)) = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(x_k) \geqslant n\varepsilon$$

і $\mu(E) \leqslant f(b) - f(a)$, адже $E \subseteq [f(a), f(b)]$. Тому $n\varepsilon \leqslant f(b) - f(a)$, а значить, $n \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{\varepsilon}$. Отже множина $D^\varepsilon(f)$ не може мати більше як $[\frac{f(b)-f(a)}{\varepsilon}]$ точок, а значить, є скінченною.

З леми 4 негайно випливає, що у зростаючої функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ множина її точок розриву $D(f)$ не більш ніж зліченна, адже $D(f) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D^{1/n}(f)$ і множини $D^{1/n}(f)$ скінченні за лемою 4.

Приступимо тепер до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 5. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція. Тоді існує послідовність неперервних зростаючих функцій $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, така, що $f_n(x) \to f(x)$ на $[a, b]$.

Доведення. Розглянемо скінченні множини $A_n = D^{1/n}(f) \setminus \{a, b\}$ і $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$

при $n \in \mathbb{N}$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина B_n скінченна і $B_n \subseteq (a,b)$, причому $\omega_f(x) < \frac{1}{n}$ для кожного $x \in B_n$, то існує таке число $\varepsilon_n > 0$, що для кожного $x \in B_n$ виконується нерівність $\omega_f([x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n]) < \frac{1}{n}$. Для кожного номера n виберемо таке число $\delta_n > 0$, що $\delta_n < \min\{\frac{1}{n}, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \eta_{A_n}\}$ і розглянемо функції $g_n = L_{A_n,\delta_n} f$.

Покладемо $A_n = \{a_{n,1}, ..., a_{n,m_n}\}$, де $a = a_{n,0} < a_{n,1} < ... < a_{n,m_n} < a_{n,m_{n+1}} = b$, $a^+_{n,k} = a_{n,k} + \delta_n$ і $I^+_{n,k} = [a_{n,k}, a^+_{n,k}]$ для $k = 0, 1, ..., m_n$, $a^-_{n,k} = a_{n,k} - \delta_n$ і $I^-_{n,k} = [a^-_{n,k}, a_{n,k}]$ для $k = 1, ..., m_n+1$, $I_{n,k} = I^-_{n,k} \cup I^+_{n,k}$ для $k = 1, ..., m_n$, $I_{n,0} = I^+_{n,0}$, $I_{n,m_n+1} = I^-_{n,m_n+1}$. Нехай $J_{n,k} = [a^+_{n,k}, a^-_{n,k+1}]$ і $J_n = \bigcup\limits_{k=0}^{m_n} J_{n,k}$.

Нехай $x \in (a,b)$. Покажемо, що $g_n(x) \to g(x)$ при $n \to \infty$. Нехай $A = D(f) \cup \{a,b\}$. Зрозуміло, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{a,b\}$. Зауважимо, що за побудовою функцій g_n виконуються рівності $g_n(x) = f(x)$ для $x \in \widetilde{A_n} = A_n \cup \{a,b\}$ і для $x \in J_n$.

Якщо $x \in A$, то існує такий номер N, що $x \in \widetilde{A_N}$. Але $\widetilde{A_n} \supseteq \widetilde{A_N}$ при $n \geqslant N$. В такому разі $g_n(x) = f(x)$ при $n \geqslant N$, отже, $g_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Нехай $x \in [a,b] \setminus A$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і виберемо такий номер N_1, що $1/N_1 < \varepsilon$. Оскільки $x \notin A$, то $x \notin \widetilde{A_{N_1}}$. Множина $\widetilde{A_{N_1}}$ скінченна, тому відстань $d(x) = d(x, \widetilde{A_{N_1}}) = \frac{1}{2}\min\{|x - a_{N_1,k}| : k = 0, 1, ..., m_{N_1+1}\} > 0$. Оскільки $0 < \delta_n \leqslant \frac{1}{n}$ для кожного n, то $\delta_n \to 0$, отже, існує такий номер N_2, що $\delta_n < d(x)$, як тільки $n \geqslant N_2$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$ і $n \geq N$. Покажемо, що тоді $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Якщо $x \in J_n$, то $g_n(x) = f(x)$ і $|g_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$. Нехай $x \notin J_n$, тоді $x \in I_{n,k}$ для деякого $k = 0, 1, ..., m_n+1$, зокрема, $|x - a_{n,k}| < \delta_n$. Оскільки $|x - a_{N_1,k}| \geqslant d(x) > \delta_n$ для $k = 0, 1, ..., m_{N_1}+1$, бо $n \geqslant N_2$, то $a_{n,k} \neq a_{N_1,k}$ при $k = 0, 1, ..., m_{N_1}+1$, тобто $a_{n,k} \notin \widetilde{A_{N_1}}$, а значить, $a_{n,k} \in B_m$ для деякого m, такого, що $N_1 \leqslant m < n$. Тоді

$$|g_n(x) - f(x)| \leqslant \omega_f(I_{n,k}) =$$

$$= \omega_f([a_{n,k} - \delta_n, a_{n,k} + \delta_n]) \leqslant$$

$$\leqslant \omega_f([a_{n,k} - \delta_n, a_{n,k} + \delta_n]) < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N_1} < \varepsilon.$$

Таким чином, $g_n(x) \to f(x)$ на [a,b].

З побудови функції g_n випливає, що вона зростає на $[a,b]$. В точках з інтервалів I^o_n при $k = 0, 1, ..., m_n$ і з проміжків $I_{n,0} = [a, a+\delta_n)$ та $I_{n,m+1} = (b - \delta_n, b]$ функція g_n неперервна, отже, $\omega_{g_n}(x) = 0$ в таких точках. На множині $J_n = \bigsqcup\limits_{k=0}^{m_n} J_{n,k}$ маємо, що $g_n(x) = f(x)$. Тому на інтервалах $I^o_{n,k}$ обов'язково $\omega_{g_n}(x) = \omega_f(x) < \frac{1}{n}$, бо $x \notin \widetilde{A_n}$, якщо $x \in J_{n,k}$. Якщо x_0 – крайня точка з $J_{n,k}$, то $\omega_{g_n}(x_0) \leqslant \omega_f(x_0) < \frac{1}{n}$, бо і тут $x_0 \notin \widetilde{A_n}$. Таким чином, справді $\omega_{g_n}(x) < \frac{1}{n}$ на $[a,b]$.

За теоремою 4 існує неперервна зростаюча функція $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, така, що $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$ на $[a,b]$. Зрозуміло, що тоді $f_n(x) \to f(x)$ на $[a,b]$ і теорема доведена.

6. Поточкові границі послідовностей монотонних функцій

З теореми 5 легко вивести наступний результат.

Теорема 6. Кожна спадна функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ є поточковою границею послудовностей неперервних спадних функцій $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Доведення. Розглянемо функцію $g = -f$. Зрозуміло, що g – зростаюча функція на $[a,b]$. За теоремою 5 існує послідовність неперервних зростаючих функцій $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, така, що $g_n(x) \to g(x)$ на $[a,b]$. Функції $g_n(x) = -f_n(x)$ будуть неперервними і спадними на $[a,b]$, причому

$$f_n(x) = -g_n(x) \to -g(x) = f(x)$$

на $[a,b]$.

Додамо до цього ще один результат.

Теорема 7. Нехай X - невироджений проміжок числової прямої, $f_n : X \to \mathbb{R}$ монотонні функції при $n = 1, 2, ...$ і $f : X \to \mathbb{R}$ - це поточкова границя послідовності функцій f_n. Тоді:
(i) функція f монотонна;
(ii) якщо f не стала, то існує такий номер

N, що при $n \geqslant N$ або всі функції f_n зростають, або всі вони спадають;
(iii) якщо f стала то серед функцій f_n безліч функцій може зростати і безліч функцій може спадати.

Доведення. а). Припустимо, що гранична функція f не є монотонною. Тоді існують точки $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, що $x_1 < x_2$ і $f(x_1) > f(x_2)$, $x_3 < x_4$ і $f(x_3) < f(x_4)$. Розглянемо число $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{f(x_1) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3)\}$ яке, зрозуміло, додатне. Оскільки $f_n(x_i) \to f(x_i)$ при $n \to \infty$ для $i = 1,2,3,4$, то для кожного $i = 1,2,3,4$ існує такий номер N_i, що $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$, при $n \geqslant N_i$ для всіх $i = 1,2,3,4$. Розглянемо номер $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Для ф-ції f_N отримаємо:

$$f_N(x_1) > f(x_1) - \varepsilon \geqslant f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} = \\ = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

і

$$f_N(x_2) < f(x_1) + \varepsilon \leqslant f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} = \\ = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

Отже, $f_N(x_1) > f_N(x_2)$. Так само:

$$f_N(x_3) < f(x_3) + \varepsilon \leqslant f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{2} = \\ = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}$$

і

$$f_N(x_4) > f(x_4) - \varepsilon \geqslant f(x_4) - \frac{f(x_4) - f(x_3)}{2} = \\ = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2},$$

Отже, $f_N(x_3) < f_N(x_4)$. Виходить, що функція f_N не монотонна, що суперечить умові.

б). Нехай f не стала функція. Тоді існують такі дві точки $x_1, x_2 \in X$, що $x_1 < x_2$ і $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Припустимо, що $f(x_1) < f(x_2)$. Розглянемо додатне число $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2))$. Для $i = 1,2$ існує номер N_i, такий, що $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant N_i$. Візьмемо номер $N = \max\{N_1, N_2\}$. Нехай $n \geqslant N$. Тоді:

$$f_n(x_1) < f(x_1) + \varepsilon = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} = \\ = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$f_n(x_2) > f(x_2) - \varepsilon = f(x_2) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} = \\ = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

отже, $f_n(x_1) < f_n(x_2)$. В такому разі обов'язково $f_n(x') < f_n(x'')$, як тільки $x' < x''$ і $x', x'' \in X$. Справді, якби $f_n(x_3) > f_n(x_4)$ для деяких x_3 і x_4 з X, таких, що $x_3 < x_4$, то функція f_n не була б монотоннною, що суперечить умові. Таким чином, всі функції f_n при $n \geq N$ будуть зростати. У випадку $f(x_1) > f(x_2)$ так само доводиться, що всі функції f_n будуть спадними, починаючи з деякого номера N.

в). Нехай $f(x) = c$ на X. Припустимо, що $X =< a, b >$, тобто, що X – це проміжок з кінцями a і b з розширеної числової прямої $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Оскільки проміжок X невироджений, то $a < b$. Тоді існують такі числа x_1, x_0 і x_2, що $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ і $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Покладемо $g_k(x) = c + \frac{1}{k}(x - x_0)$ і $h_k(x) = c - \frac{1}{k}(x - x_0)$ для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Очевидно, що функції g_k строго зростають на X, а h_k строго спадають на X, причому $g_k \to c = f(x)$ і $h_k \to c = f(x)$ на X. Покладаючи $f_n = g_k$ при $n = 2k$ і $f_n = h_k$ при $n = 2k - 1$, ми отримаємо шукану послідовність функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фіхтенгольц Ф.М.* Курс диференціального та інтегрального числення. Том 1.
2. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2. - Чернівці: ЧНУ, 2010. - 192с.
3. *Baire R.* Sur les fonctions desvariables reélles // An. Mat. Pura Appl., ser. 3. - 1899. - 3. -P.1-123.
4. *Baire R.* Sur les fonctions discontinues quise rattachent aux fonctions continues // C.R. - 1898. - 126. -P. 1521-1523.

5. *Hahn. H.* Über halbstetige und unstetige Funktionen// Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa.– 126. – S. 91-110.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.1. – С.-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. – 448с.

7. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.2. – С.-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. – 464с.

8. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій.// Збірник праць Інституту математики НАН України. Теорія наближень функцій та суміжні питання. – 2014. – 11, №3. – С. 182-183.