УДК 517.9

©2015 р. Л.М. Сергєєва

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ПОБУДОВА ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЩО МІСТЯТЬ ВІДХИЛЕННЯ ЗА ЧАСОМ

Описано алгоритм побудови глобального розв'язку для певного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу та наведено умови його існування.

We provide the algorithm of constructing a global solution for some nonhomogeneous partial differential equation with deviating argument in the time variable. We justify this algorithm and study existence conditions of this solution.

Останнім часом значна увага дослідників приділяється рівнянням із частинними похідними, які містять відхилення за часовими або просторовими змінними. Це пов'язане із розширенням областей застосування таких рівнянь, зокрема, вони використовуються для опису різних процесів у біології, біофізиці, біохімії, медицині, теорії управління, теорії кліматичних моделей і багатьох інших. Подібні рівняння часто доводиться розглядати при розв'язуванні балістичних та варіаційних задач, вони зустрічаються в математичній теорії штучних нейронних мереж, результати якої використовуються для обробки сигналів і зображень та проблем розпізнавання образів.

Врахування відхилення в класичних задачах математичної фізики приводить до рівнянь з частинними похідними із відхиленням тільки за часом. В багатьох випадках до цих задач може бути застосовано метод відокремлення змінних із деякими модифікаціями [1]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу розглядалися в роботах Л.Е. Ельсгольца, С.Б. Норкіна, М. Меджитова, Г.А. Каменського, З.Б. Сеідова, А.М. Самойленка, М.Й. Ронто та інших [2–7].

В даній роботі описано алгоритм побудови глобального розв'язку для деякого неоднорідного рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу та наведено умови його існування.

Розглянемо рівняння вигляду

$$u_t(x,t)=\int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)u_{xx}(x,t+s)ds+$$
$$+q(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

де $Q=\{(x,t):0<x<l, t\in\mathbb{R}\}$, $p(t,\cdot)$ при кожному $t\in\mathbb{R}$ вимірна, а $p(\cdot,s)$ при кожному $s\in[-\mu,0]$ неперервна функція.

Визначення структури розв'язку задачі (1), (2)**.** Раніше було встановлено [1], що для відповідної однорідної задачі

$$u_t(x,t)=\int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)u_{xx}(x,t+s)ds$$

власні функції і власні значення мають відповідно вигляд

$$X_k(x)=sin\frac{k\pi x}{l},\ \lambda_k=(\frac{\pi k}{l})^2,\ k=1,...,n,$$

з деяким $n\geq 1$.

Розглянемо неоднорідне рівняння (1). Будемо шукати глобальний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) у вигляді суми

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}T_k(t)sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{3}$$

Крайові умови, очевидно, задовольняються.

Будемо припускати, що функція $q(x,t)$ може бути представлена у вигляді суми перших n доданків ряду Фур'є:

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (4)$$

де

$$q_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l q(\xi,t) sin\frac{k\pi\xi}{l} d\xi.$$

Підставимо (3) в рівняння (1), враховуючи (4):

$$\sum_{k=1}^{n}\Bigg[T_k'(t) + \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)T_k(t+s)ds -$$
$$-q_k(t)\Bigg] sin\frac{k\pi x}{l} = 0.$$

Це рівняння задовольняється, якщо всі коефіцієнти розкладу рівні нулю, тобто

$$T_k'(t) + \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)T_k(t+s)ds - q_k(t) = 0, \quad (5)$$

при $k = 1, ..., n$.

У праці [8] було показано, що для такого рівняння можна побудувати рівняння без відхилення аргументу, всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками рівняння (5). Таке рівняння матиме вигляд

$$T_k'(t) + \bar{p}_k(t)T_k(t) - \bar{q}_k(t) = 0. \qquad (6)$$

Згідно алгоритму, наведеному в [9], знайдемо $\bar{p}(t)$ та $\bar{q}(t)$. Загальний розв'язок рівняння (6) визначається формулою Коші

$$T_k(t) = T_{k,0} e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\bar{p}_k(r)dr} + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\bar{p}_k(r)dr} d\tau,$$

де

$$T_{k,0} = T_k(t_0), \quad t, t_0 \in \mathbb{R},$$

яка буде задовольняти рівняння (5), коли

$$T_k'(t) = -\bar{p}_k(t)\Bigg[T_{k,0} e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\bar{p}_k(r)dr} +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] + \bar{q}_k(t) =$$
$$= -\lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)\Bigg[T_{k,0} e^{-\int\limits_{t_0}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t+s} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] ds + q_k(t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Покладаючи в (7) $T_{k,0} = 0$, отримаємо

$$-\bar{p}_k(t)\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] + \bar{q}_k(t) =$$
$$= -\lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t+s} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] ds +$$
$$+ q_k(t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (8)$$

Враховуючи (7) та (8), одержимо

$$\bar{p}_k(t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\bar{p}_k(r)dr} = \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s) e^{-\int\limits_{t_0}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} ds,$$

звідки

$$\bar{p}_k(t) = \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s) e^{-\int\limits_{t}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} ds, \ k \leq n, \ t \in \mathbb{R}. \qquad (9)$$

Підставимо (9) в (8):

$$-\lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s) e^{\int\limits_{t+s}^{t}\bar{p}_k(r)dr} ds \times$$
$$\times \Bigg[\int\limits_{t_0}^{t} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] + \bar{q}_k(t) =$$
$$= -\lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t+s} \bar{q}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t+s}\bar{p}_k(r)dr} d\tau\Bigg] ds +$$
$$+ q_k(t),$$
$$\bar{q}_k(t) = q_k(t) +$$

$$+\lambda_k \int_{-\mu}^{0}\int_{t+s}^{t} p(t,s)\bar{q}_k(\tau)e^{\int\limits_{t+s}^{\tau}\bar{p}_k(r)dr}d\tau ds, \quad (10)$$

де $k \le n,\ \ t \in \mathbb{R}$. Тоді розв'язок $T_k(t)$ рівняння (6) запишемо у вигляді

$$T_k(t) = c_k e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_k(s)ds} + \int_0^t \bar{q}_k(\tau)e^{-\int\limits_\tau^t \bar{p}_k(s)ds}d\tau, \quad (11)$$

вважаємо, що c_k – довільні сталі, $t_0 = 0$, $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{q}_k(t)$ знаходимо із рівнянь (9), (10).

Якщо всі розв'язки рівняння (6) є глобальними розв'язками рівняння (5), то функція $\bar{p}$ задовольняє рівняння (9), а функція $\bar{q}$ – (10). Таким чином, необхідною і достатньою умовою того, щоб всі розв'язки рівняння (6) були глобальними розв'язками рівняння (5), є існування розв'язків рівнянь (9), (10).

Знайдемо умови, при виконанні яких розв'язок рівняння (6) буде глобальним розв'язком рівняння (5). Для цього доведемо наступну теорему.

Теорема. *Нехай функція p задовольняє накладені вище умови,*

$$|p(t,s)| < \alpha, \quad \alpha = const, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in [-\mu, 0],$$

і виконується нерівність

$$\frac{1-\rho}{1+\rho}(\rho e^{\rho+1} + 1) < 1, \quad \rho = \sqrt{1 - \alpha\lambda_n\mu^2},$$

де n – ціла частина числа $0.8047425\frac{l}{\pi\sqrt{\alpha}\mu}$, *а* $\mu < \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda_n}}$.

Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1), (2) *вигляду* (3).

Доведення. Розглянемо рівняння (9). Його розв'язок буде неперервною функцією внаслідок умов, які накладено на $p(t,s)$. Використовуючи принцип стискаючих відображень, знайдемо умови, при яких це рівняння матиме єдиний розв'язок.

Для неперервної на $\mathbb{R}$ функції $\bar{p}_k$ визначимо оператор $(S\bar{p}_k)(t)$

$$(S\bar{p}_k)(t) = \lambda_k \int_{-\mu}^{0} p(t,s)e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_k(r)dr}ds.$$

Будемо шукати розв'язок в просторі $C(\gamma)$. Нехай $\|\bar{p}_k\|_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\bar{p}_k(t)| \le \gamma$. Тоді для $(S\bar{p}_k)(t)$ справедлива оцінка

$$\|S\bar{p}_k\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}}|\lambda_k \int_{-\mu}^{0} p(t,s)e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_k(r)dr}ds| \le$$

$$\le \frac{\alpha\lambda_k}{\gamma}|e^{\mu\gamma} - 1|.$$

Якщо виконується нерівність

$$\frac{\alpha\lambda_k}{\gamma}|e^{\mu\gamma} - 1| \le \gamma, \quad (12)$$

то оператор $(S\bar{p}_k)(t)$ відображає простір $C(\gamma)$ в себе.

Оцінимо різницю $(S\bar{p}_{k,1})(t) - (S\bar{p}_{k,2})(t)$:

$$|(S\bar{p}_{k,1})(t) - (S\bar{p}_{k,2})(t)| =$$

$$= |\lambda_k \int_{-\mu}^{0} p(t,s)e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_{k,1}(r)dr}ds -$$

$$-\lambda_k \int_{-\mu}^{0} p(t,s)e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_{k,2}(r)dr}ds| \le$$

$$\le \alpha\lambda_k|\int_{-\mu}^{0}(e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_{k,1}(r)dr} - e^{-\int\limits_t^{t+s}\bar{p}_{k,2}(r)dr})ds| \le$$

$$\le \frac{\alpha\lambda_k}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}(\mu\gamma - 1) + 1|\|\bar{p}_{k,1} - \bar{p}_{k,2}\|_0.$$

Таким чином, $(S\bar{p}_k)(t)$ буде оператором стиску в просторі $C(\gamma)$ при виконанні нерівності

$$\frac{\alpha\lambda_k}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}(\mu\gamma - 1) + 1| < 1. \quad (13)$$

Будемо вимагати, щоб одночасно виконувались умови (12) та (13).

Розглянемо рівняння

$$\frac{\alpha\lambda_k}{\gamma}|e^{\mu\gamma} - 1| = \gamma.$$

Воно буде мати розв'язки, такі, що

$$\frac{\alpha\lambda_k}{\gamma^2}|(\frac{\gamma^2}{\alpha\lambda_k} + 1)(\mu\gamma - 1) + 1| < 1.$$

Але тільки для

$$\gamma \leq \frac{\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1}{|\mu|}$$

будуть виконуватись умови стиску і відображення оператором $(S\bar{p}_k)(t)$ простору $C(\gamma)$ в себе. Враховуючи це, отримаємо оцінку:

$$\frac{1-\rho}{1+\rho}(\rho e^{\rho+1}+1) < 1, \;\; \rho = \sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}. \quad (14)$$

Отже, при виконанні цієї умови простір $C(\gamma)$ буде повним нормованим простором, і оператор S буде мати в ньому єдину нерухому точку, тобто розв'язок рівняння (9) буде існувати і він буде єдиним.

Розглянемо рівняння (10). Здійснимо в ньому заміну змінних

$$\bar{q}_k(t) = q_k(t) + z_k(t).$$

Отримаємо:

$$z_k(t) =$$

$$= \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0}\int\limits_{t+s}^{t} p(t,s) e^{\int\limits_{t+s}^{\tau}\bar{p}_k(r)dr}(q_k(\tau)+z_k(\tau))d\tau ds, \quad (15)$$

при $\;k \leq n,\;\; t \in \mathbb{R}$. Без втрати загальності, будемо вважати, що $\;|q(x,t)| \leq \frac{1}{2}$.

Визначимо оператор S_1 в просторі $C(M)$ функцій $z_k = z_k(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$, таких що

$$\|z_k\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}}|z_k(t)| \leq M.$$

$(S_1z_k)(t)$ – неперервна на $\mathbb{R}$ функція, причому виконуються оцінки

$$\|S_1 z_k\|_0 \leq \frac{\lambda_k\alpha(1+M)}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}-\mu\gamma-1|,$$

$$|(Sz_{k,1})(t)-(Sz_{k,2})(t)| \leq$$

$$\leq \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0}\int\limits_{t+s}^{t} |p(t,s)||e^{\int\limits_{t+s}^{\tau}\bar{p}_k(r)dr}|d\tau ds \times$$

$$\times \|z_{k,1}-z_{k,2}\|_0 \leq \frac{\lambda_k\alpha}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}-\mu\gamma-1|,$$

де $z_{k,1}$, $z_{k,2}$ – довільні функції із $C(M)$.

Внаслідок (12) при

$$M \geq \frac{\frac{\lambda_k\alpha}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}-\mu\gamma-1|}{1-\frac{\lambda_k\alpha}{\gamma^2}|e^{\mu\gamma}-\mu\gamma-1|}$$

оператор S_1 відображає $C(M)$ в себе і є оператором стиску. Простір $C(M)$ є повним нормованим простором. Цього достатньо, щоб оператор S_1 мав в $C(M)$ єдину нерухому точку. Вона і є єдиним в $C(M)$ розв'язком рівняння (15).

Знайдемо діапазон значень для k. Оскільки $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$, то із умови (14) можна наближено знайти оцінку для параметра k

$$k < 0.8047425\frac{l}{\pi\sqrt{\alpha}\mu}. \quad (16)$$

Тому $k \in [1,n]$, де n – ціла частина $0.8047425\frac{l}{\pi\sqrt{\alpha}\mu}$.

Отож, глобальний розв'язок рівняння (5) буде мати вигляд (11), де $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{q}_k(t)$ знаходяться із рівнянь (9), (10).

Тому

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\big(c_k e^{-\int\limits_0^t\bar{p}_k(r)dr} +$$

$$+\int\limits_0^t \bar{q}_k(\tau)e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\bar{p}_k(r)dr}d\tau\big)sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Рівняння (9), (10) для $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{q}_k(t)$ розв'яжемо методом послідовних наближень. За початкові наближення візьмемо $\bar{p}_k^{(0)}(t) = 0$ і $\bar{q}_k^{(0)}(t) = q_k(t)$. Тоді

$$\bar{p}_k^{(m)}(t) = \lambda_k\int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)e^{-\int\limits_{t}^{t+s}\bar{p}_k^{(m-1)}(r)dr}ds, \quad (17)$$

де $m = 1,2,....$

$$\bar{q}_k^{(\nu)}(t) = q_k(t) +$$

$$+\lambda_k\int\limits_{-\mu}^{0}\int\limits_{t+s}^{t} p(t,s)\bar{q}_k^{(\nu-1)}(\tau)e^{\int\limits_{t+s}^{\tau}\bar{p}_k^{(m)}(r)dr}d\tau ds,$$

$$\nu = 1,2,..., \quad k \leq n, t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Послідовності (17) і (18) є рівномірно збіжними на $\mathbb{R}$ внаслідок виконання умов теореми, тому

$$\bar{p}_k = \lim_{m\to\infty} \bar{p}_k^{(m)}, \quad \bar{q}_k = \lim_{\nu\to\infty} \bar{q}_k^{(\nu)},$$

Враховуючи те, що $|p(t,s)| < \alpha$, можна отримати наступні оцінки:

$$|\bar{p}_k^{(1)}(t) - \bar{p}_k^{(0)}(t)| \leq \alpha|\mu|\lambda_k,$$

$$|\bar{q}_k^{(1)}(t) - \bar{q}_k^{(0)}(t)| \leq \frac{\alpha\lambda_k\mu^2}{(\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1)^2}\times$$

$$\times|e^{\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1} - \sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2} - 2)|,$$

Згідно оцінок методу послідовних наближень для кожного наступного наближення має місце така оцінка

$$|\bar{p}_k^{(m)} - \bar{p}_k| \leq \frac{\delta^m|\bar{p}_k^{(1)} - \bar{p}_k^{(0)}|}{1-\delta},$$

$$|\bar{q}_k^{(\nu)} - \bar{q}_k| \leq \frac{\delta^\nu|\bar{q}_k^{(1)} - \bar{q}_k^{(0)}|}{1-\delta},$$

У нашому випадку $\delta = \frac{1-\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}}{1+\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}}(\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}e^{\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1} + 1)$, тоді отримаємо:

$$|\bar{p}_k^{(m)} - \bar{p}_k| \leq \frac{\delta^m\alpha|\mu|\lambda_k}{1-\delta},$$

$$|\bar{q}_k^{(\nu)} - \bar{q}_k| \leq \frac{\delta^\nu\alpha\lambda_k\mu^2}{(1-\delta)(\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1)^2}\times$$

$$\times|e^{\sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2}+1} - \sqrt{1-\alpha\lambda_k\mu^2} - 2)|,$$

$$k = \overline{1,n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* Побудова глобальних розв'язків рівнянь з частинними похідними, які містять відхилення по часу / А.М. Самойленко, Л.М. Сергєєва // Нелінійні коливання. — 2014. — 17, №4. — С. 489–502.

2. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

3. *Эльсгольц Л.Э.* О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами / Л.Э. Эльсгольц // УМН. – 1960. – **15**, №5 (95). – С. 222–224.

4. *Меджитов М.* Двухточечная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом / М. Меджитов // Тр. семинара по теории диф. уравн. с откл. арг. – 1969. – **7**. – С. 178–182.

5. *Каменский Г.А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом / Г.А. Каменский // Диф. уравнения. – 1970. – **6**, №8. – С. 1349–1358.

6. *Сеидов З.Б.* Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / З.Б. Сеидов // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, №6. – С. 830–834.

7. *Самойленко А.М.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

8. *Сергеєва Л.М.* Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь / Л.М. Сергєєва, Я.Й. Бігун // Нелінійні коливання. — 2011. — 14, №1. — С. 100–110.

9. *Самойленко А.М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №5. – С. 631–640.