УДК 517.53

©2015 р. О.Б. Скасків, О.Ю. Тарновецька

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО СТІЙКІСТЬ РЯДІВ, ПОДІБНИХ НА РЯДИ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Для додатного, збіжного для всіх $x \geq 0$ ряду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $a_n \geq 0$, $(n \geq 0)$, де $\tau(x)$ — додатна зростаюча диференційовна функція така, що $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$, а (λ_n), (β_n) — невід'ємні послідовності, отримано умови достатні для того, щоб співвідношення $\ln \mu(x, F) \sim \ln \mu(x, F_w)$ виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега, де $F_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n + \beta_n) + x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$, а $w(t)$ — додатна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.

We establish conditions for the asymptotic relation $\ln \mu(x, F) \sim \ln \mu(x, F_w)$ as $x \to +\infty$ outside of some exceptional set of finite Lebesgue measure for a positive functional series of the form $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $a_n \geq 0$, $(n \geq 0)$, convergent for $x \geq 0$, where $\tau(x)$ is a positive increase differentiable function such that $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$, (λ_n), (β_n) are positive sequences, $F_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n + \beta_n) + x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$, and $w(t)$ is an increasing to $+\infty$ in interval $[0, +\infty)$ function.

1. Вступ. Нехай $D(\lambda)$ — клас абсолютно збіжних в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda = (\lambda_n)$ — деяка послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$, а через $D^+(\lambda)$ позначимо підклас класу $D(\lambda)$, в який входять ряди Діріхле вигляду (1) такі, що $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$.

Нехай $S(\lambda, \beta, \tau)$ клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n},\ a_n \geq 0\ (n \geq 0),$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ невід'ємні послідовності, $\tau(x)$ – додатна неспадна на $[0; +\infty)$ функція. Зрозуміло, що $S(\lambda, 0, 0) = D^+(\lambda)$ у випадку, коли $0 \leq \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$.

Для $x \geq 0$ і $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ визначимо

$$\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} :\ n \geq 0\},$$

тобто, $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} :\ n \geq 0\}$ у випадку $F \in D(\lambda)$.

Для довільної послідовності (b_n), $b_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(n \geq 0)$ і функції $F \in D(\lambda)$, введемо в розгляд ряди Діріхле

$$B^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n e^{z\lambda_n},\ B^-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} e^{z\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що у випадку, коли послідовність (b_n) задовольняє умову

$$b = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) < +\infty, \tag{2}$$

то $F \in D(\lambda) \Leftrightarrow B^+ \in D(\lambda) \Leftrightarrow B^- \in D(\lambda)$.

Якщо співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^+) = = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^-) \tag{3}$$

виконуються при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, то як і в [1, 2] говоритимемо, що максимальний член $\mu(x, F)$ ряду Діріхле (1) є *стійким* (*стійким за Гайсиним*).

Нехай L — клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функцій $l(t)$ таких, що $l(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$; L_+ — підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функції.

Через $\mathcal{W}$ позначимо клас функцій $w \in L_+$ таких, що

$$\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x) dx < +\infty.$$

У статті [2] вказані такі достатні умови стійкості за Гайсиним.

Теорема 1 (Скасків, Тракало [2]). *Нехай* $\{F, B^+, B^-\} \subset D(\lambda)$, $w \in L_+$ *і виконується умова*

$$\ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \le w(\lambda_n) \quad (n \ge n_1). \qquad (4)$$

Якщо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln \nu(t)}{t^2} dt < +\infty, \qquad (5)$$

де $\nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)} dn(x)$, $n(x) = \sum\limits_{\lambda_n \le x} 1$, *то максимальний член* $\mu(x, F)$ *є стійким.*

Нескладно помітити, що $\ln \nu(t) \le w(t) + \ln n(t)$ $(t \ge 0)$, тому умова (5) випливає з умов (6) і $w \in \mathcal{W}$.

Наслідок 2 (Скасків, Тракало [2]). *Нехай для* $\lambda = (\lambda_n)$ *виконується умова*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt < +\infty, \quad n(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n \le t} 1. \qquad (6)$$

Якщо $\{F, B^+, B^-\} \subset D(\lambda)$, $w \in \mathcal{W}$, *а для* (b_n)– *умова (4), то максимальний член* $\mu(x, F)$ *є стійким.*

У статті [2, теорема 3] доведено, що твердження Наслідку 1 не можна покращити у тому сенсі, що за умови (6), існує $F \in D^+(\lambda)$ така, що, якщо для функції $w \in L_+$ умова (5) не виконується, то для функції

$$B_w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n) + z\lambda_n}$$

отримуємо, що існує $d > 0$ таке,що для всіх $x \ge x_0$:

$$\ln \mu(x, B_w) \ge (1 + d) \ln \mu(x, F), \qquad (7)$$

тобто максимальний член $\mu(x, F)$ не є стійким.

Мета даної статті отримати умови стійкості за Гайсиним максимального члена рядів з класу $S(\lambda, \beta, \tau)$. Для функцій $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ і $w \in L_+$ розглянемо ряд

$$B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n + \beta_n) + x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}.$$

Правильне таке твердження.

Теорема 2. *Нехай диференційовна функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$, *а функція* $w \in L_+$ *така, що* $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$, *де* $\nu_1(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)} dn_*(x)$, $n_*(x) = \sum\limits_{\lambda_n + \beta_n \le x} 1$. *Якщо* $B_w \in S(\lambda, \beta, \tau)$, *то співвідношення*

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_w) \qquad (8)$$

виконується при $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

Зауважимо, що з умови $B_w \in S(\lambda, \beta, \tau)$ випливає, що $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$.

2. Допоміжні твердження. Нехай ν – борелева міра на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, тобто, невід'ємна зліченно-адитивна міра на $\sigma-$алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ борелевих підмножин $\mathbb{R}_+$. Розглянемо на $\mathbb{R}_+$ такі функції: додатні функції $\lambda = \lambda(x)$, $\beta = \beta(x)$ і диференційовну функцію $\tau = \tau(x)$ таку, що $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_0)$. Через $\mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$ позначимо клас функцій $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, що зображаються для всіх $x \in \mathbb{R}$ інтегралами вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) e^{\lambda(t)x + \beta(t)\tau(x)} \nu(dt),$$

де $a = a(t) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ деяка вимірна (борелева) функція.

Доведення теореми 2 використовує ту ж ідею, що й у статтях [2,3] і полягає у застосуванні твердження про співвідношення типу Бореля для відповідних інтегральних зображень рядів, що розглядаються. У нашому випадку, для інтегралів з класу $\mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$. Власне, доведемо спочатку таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* τ *– додатна диференційовна на* $[0; +\infty)$ *функція така, що* $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_0)$. *Якщо* $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$ *і*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} < +\infty, \qquad (9)$$

де $\nu_0(x) = \nu\{t : \ \lambda(t) + \beta(t) \le x\}$, *то існує така множина* $E \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної міри Лебега, що співвідношення*

$$\ln F(x) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(x, F) \qquad (10)$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$, *де*

$$\mu_*(x, F) = \sup\{a(t) e^{x\lambda(t) + \tau(x)\beta(t)} \colon t \in \operatorname{supp} \nu\}.$$

Відкритим залишається питання про необхідність умови (9), тобто, чи для кожної міри, для якої умова (9) не виконується існує функція $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$, для якої на множині нескінченної міри Лебега виконується нерівність

$$\ln F(x) > (1+d)\ln \mu_*(x, F) \qquad (11)$$

з деяким $d > 0$. Відзначимо, що у випадку класу $\mathcal{I}(\nu) := \mathcal{I}(\nu, \lambda^*, 0, 0)$, $\lambda^*(t) \equiv t$, тобто, функцій $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, зображуваних для всіх $x \geq 0$ інтегралами вигляду $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} a(t)e^{xt}\nu(dt)$, у статті [2] доведено, що для кожної міри ν, для якої умова (9) з $\nu_0(t) = \nu\{x \geq 0\colon x \leq t\}$ не виконується, існує така функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$, що нерівність (11) при деякому $d > 0$ виконується для всіх достатньо великих $x \geq x_0$. Звідси, зокрема, випливає, що умову (9) в класі $\mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$ істотно послабити не можна. Власне, вона є необхідною в усьому класі

$$\mathcal{I}_0(\nu) := \cup_\lambda \cup_\beta \cup_\tau \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$$

для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ співвідношення (10) виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

Для доведення теореми 3 нам потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $\tau'(x) \geq 0$ $(x > 0)$ *і* $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$. *Для всіх* $x > 0$ *виконується нерівність*

$$F(x) \leq 2\int_G a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt), \qquad (12)$$

де $G := \{t > 0\colon \lambda(t) + \tau'(x)\beta(t) \leq 2g'(x)\}$, $g(x) := \ln F(x)$.

Доведення. Відзначимо спочатку, що функція F неспадна на $\mathbb{R}_+$ і, тому, $F'(x) \geq 0$ для всіх $x > 0$, а також, що $F'(x) < +\infty$ $(x > 0)$. Зауважимо, що при фіксованому $x > 0$

$$\frac{1}{F(x)}\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2F'(x)}\int\limits_0^{+\infty}(\lambda(t)+\tau'(x)\beta(t))\times$$
$$\times a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt) = 1/2.$$

Звідси,

$$F(x) \leq F(x)/2 +$$
$$+\int_G a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt)$$

і, отже, лему 1 доведено.

Сформулюємо також дещо інший варіант леми 1.

Лема 2. *Нехай* $\tau'(x) \geq 0$ $(x > 0)$ *і* $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$. *Для всіх* $x > 0$ *виконується нерівність* (12) *з* $G = G_0 := \{t > 0\colon \lambda(t) \leq 2g'(x)\}$, $g(x) := \ln F(x)$.

Доведення. Зауважимо, що $G \subset G_0$ при фіксованому $x > 0$. Залишається застосувати лему 1.

Доведення теореми 3. Скориставшись умовою $\tau'(x) \geq 1$, за лемою 1 отримаємо

$$F(x) \leq$$
$$\leq 2\mu_*(x, F)\nu\{t\colon \lambda(t) + \tau'(x)\beta(t) \leq 2g'(x)\} \leq$$
$$\leq 2\mu_*(x, F)\nu(\{t\colon \lambda(t) + \beta(t) \leq 2g'(x)\}) \leq$$
$$\leq 2\mu_*(x, F)\nu_0(2g'(x)), \qquad (13)$$

позаяк $\{t\colon \lambda(t) + \tau'(x)\beta(t) \leq 2g'(x)\} \subset \{t\colon \lambda(t) + \beta(t) \leq 2g'(x)\}$ для кожного $x > 0$.

З умови (9) випливає збіжність інтегралу

$$\int^{+\infty} \frac{\ln \nu_0(t)}{t^2}dt < +\infty.$$

Звідси, отримуємо [4], що існує додатна зростаюча до $+\infty$ неперервна на $\mathbb{R}_+$ функція $\psi(t)$ така, що виконуються умови

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$
$$\ln \nu_0(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty). \qquad (14)$$

Для функцій $\psi_0(t) = \psi(t)/2$ і $g(x) = \ln F(x)$ означимо множину

$$E = \{x > 0\colon g'(x) \geq \psi_0(g(x))\}.$$

Тоді, для міри Лебега цієї множини за умовою (14) маємо

$$\operatorname{meas} E = \int_E dx \leq \int_E \frac{g'(x)}{\psi_0(g(x))}dx \leq$$
$$\leq \int_{g(E)}\frac{du}{\psi_0(u)} \leq \int_0^{+\infty}\frac{du}{\psi_0(u)} < +\infty,$$

тобто, множина E має скінченну міру Лебега. Отже, при $x \to +\infty$ ($x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$) з нерівності (13) за умовою (14) отримуємо

$$\ln F(x) \le \ln 2 + \ln \mu_*(x, F) + \ln \nu_0(\psi(g(x))) = \\ = \ln 2 + \ln \mu_*(x, F) + o(\psi^{-1}(\psi(g(x)))) = \\ = \ln 2 + \ln \mu_*(x, F) + o(\ln F(x)).$$

Останнє співвідношення повністю доводить наше твердження.

Цілком подібно до теореми 3 доводиться таке твердження.

Теорема 4. *Нехай τ – додатна диференційовна на $[0; +\infty)$ функція така, що $\tau'(x) \ge 0$ ($x \ge x_0$). Якщо $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$ і виконується умова (9) з $\nu_0(x) = \nu\{t : \ \lambda(t) \le x\}$, то існує така множина $E \subset \mathbb{R}_+$ скінченної міри Лебега, що співвідношення (10) виконується при $x \to +\infty$ ($x \notin E$).*

Доведення. За лемою 2 для всіх $x \ge x_0$ замість нерівності (13) отримуємо нерівність $F(x) \le 2\mu_*(x, F)\nu_0(2g'(x))$, $\nu_0(x) = \nu\{t\colon \lambda(t) \le x\}$. Подальше доведення є дослівним повтором доведення теореми 3.

3. Наслідки для інтегралів Лапласа та рядів подібних до рядів Тейлора-Діріхле.

Отримаємо деякі наслідки з теореми 3.

Наслідок 2. *Нехай τ – додатна диференційовна на $[0; +\infty)$ функція, така, що $0 < \tau'(x) \le 1$ ($x \ge x_0$), а $F \in \mathcal{I}(\nu, \lambda, \beta, \tau)$. Якщо виконується умова (9), то співвідношення (10) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E_1 скінченної $\tau-$міри, тобто,*

$$\tau - \mathrm{meas}(E_1) := \int_{E_1} d\tau(x) < +\infty.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $\tau(0) = 0$. Застосуємо твердження теореми 3 до функції

$$F_1(r) = F(\tau^{-1}(r)) = \\ = \int_0^{+\infty} a(t) e^{\tau^{-1}(r)\lambda(t) + r\beta(t)} \nu(dt),$$

де τ^{-1} – обернена функція до функції τ. Зрозуміло, що $F_1 \in \mathcal{I}(\nu, \beta, \lambda, \tau^{-1})$, $\mu_*(r, F_1) = \mu_*(\tau^{-1}(r), F)$. Отже, за теоремою 3 співвідношення

$$\ln F_1(r) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(r, F_1)$$

виконується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри Лебега. Звідси негайно отримуємо, що співвідношення (10) виконується при $x \to +\infty$ зовні множини $E_1 = \tau^{-1}(E)$. Але, тоді

$$\tau - \mathrm{meas}(E_1) = \int_{E_1} d\tau(x) = \int_E dr < +\infty.$$

Наслідок 3 ([5]). *Нехай додатна функція $\tau(x)$ така, що або a) $\tau'(x) \ge 1$ ($x > 0$), або b) $0 < \tau'(x) \le 1$ ($x > 0$). Якщо послідовність $(\lambda_n + \beta_n)$ не має однакових елементів і виконується умова (9) з $\nu_0(t) = n_0(t) := \sum_{\lambda_n + \beta_n \le t} 1$, то для кожної функції $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ співвідношення Бореля*

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \qquad (15)$$

виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної лебегової міри у випадку a) і скінченної $\tau-$міри у випадку b).

Доведення. Зауважимо, що за умовою (9) $\nu_0(t) < +\infty$ для кожного $t \ge 0$, тому, послідовність $(\lambda_n + \beta_n)$ не має скінченних точок скупчення. Нехай міра ν є мірою Лебега-Стілт'єса, побудованою за функцією $n_*(t)$ (n_* – лічильна функція послідовності $(\lambda_n + \beta_n)$). Нехай функції $\lambda(t), \beta(t), a(t)$ такі, що $\lambda(t) = \lambda_n, \beta(t) = \beta_n, a(t) = a_n$ при $t = \lambda_n + \beta_n$ для кожного $n \ge 0$ і $\lambda(t) = \beta(t) = a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n + \beta_n \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$. Цей вибір є можливим, позаяк серед елементів $(\lambda_n + \beta_n)$ нема однакових. Зрозуміло, що тоді

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} = \int_{\mathbb{R}_+} a(t) e^{x\lambda(t) + \tau(x)\beta(t)} \nu(dt),$$

а також $\nu_0(x) = \nu\{t\colon \lambda(t) + \beta(t) \le x\} = n_*(x)$. Залишається скористатися теоремою 3 і наслідком 2.

Наслідок 4 ([6]). *Нехай додатна функція $\tau(x)$ така, що $\tau'(x) \ge 0$ ($x > x_0$). Якщо послідовність (λ_n) не має однакових елементів і виконується умова (9) з $\nu_0(t) =$*

$n_\lambda(t) := \sum_{\lambda_n\le t} 1$, *то для кожної функції* $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ *співвідношення Бореля* (15) *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

Доведення. За умовою (9) $\nu_0(t) < +\infty$ для кожного $t \ge 0$, тому, послідовність (λ_n) не має скінченних точок скупчення. Нехай міра ν є мірою Лебега-Стілт'єса, побудованою за функцією $n_\lambda(t)$ (n_λ – лічильна функція послідовності (λ_n)). Нехай функції $\lambda(t), \beta(t), a(t)$ такі, що $\lambda(t) = \lambda_n, \beta(t) = \beta_n, a(t) = a_n$ при $t = \lambda_n$ для кожного $n \ge 0$ і $\lambda(t) = \beta(t) = a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$. Цей вибір є можливим, позаяк серед елементів (λ_n) нема однакових. Зрозуміло, що тоді знову $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt)$, і крім цього $\nu_0(x) = \nu\{t\colon \lambda(t) \le x\} = n_\lambda(x)$. Залишається скористатися теоремою 4.

Зауважимо, що при виконанні умов наслідку 3 умова (9) є еквівалентною до умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n(\lambda_n+\beta_n)) < +\infty, \qquad (16)$$

а у наслідку 4 — до умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n\lambda_n) < +\infty, \qquad (17)$$

Доведення теореми 2. Нехай $\alpha_n := \lambda_n + \beta_n$ ($n \ge 0$), а $a(t), b(t), \lambda(t), \beta(t)$ – вимірні невід'ємні функції на $\mathbb{R}_+$ такі, що $a(t) = |a_n|$, $b(t) = e^{w(t)}$, $\lambda(t) = \lambda_n$, $\beta(t) = \beta_n$ при $t = \alpha_n$ і

$$\mu(x,F) = \sup\{a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)} :\ t \in \mathbb{R}_+\},$$
$$\mu(\sigma,B_w) = \sup\{a(t)b(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)} :\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Для цього достатньо прийняти, що $a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n+\beta_n \colon n \ge 0\}$.

Тоді, для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\mu(x,F) \le \mu(x,B_w) \le B_w(x) = \qquad (18)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| b(\alpha_n) e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} =$$
$$= \int_0^{+\infty} a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt), \qquad (19)$$

де міра ν така, що

$$\nu(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(\alpha_n)\delta_{\alpha_n}(G)$$

для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+$, а $\delta_\alpha(G)$ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці $\alpha \in \mathbb{R}_+$, тобто, $\delta_\alpha(G) = 1$ при $\alpha \in G$ і $\delta_\alpha(G) = 0$ при $\alpha \notin G$. Зрозуміло, що

$$\nu_0(x) = \nu(\{t > 0\colon \lambda(t)+\beta(t) \le x\}) \le$$
$$\le \sum_{\alpha_n \le x} b(\alpha_n) = \sum_{\alpha_n\le x} e^{w(\alpha_n)} = \nu_1(x)$$

і, тому, з умови $\ln\nu_1 \in \mathcal{W}$ негайно отримуємо, що виконується умова (9) з теореми 3. За теоремою 3, застосованою до інтеграла (19), при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега, з (18)–(19) отримаємо

$$\ln\mu(x,F) \le \ln\mu(x,B_w) \le (1+o(1))\ln\mu_*(x),$$

де $\mu_*(x) = \sup\{a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)} \colon t \in \operatorname{supp}\nu\}$. За вибором функції $a(t)$ виконується $\mu_*(x) = \mu(x,F)$, тому, звідси отримаємо співвідношення (8). Теорему 2 доведено.

Нехай для $w \in L_+$

$$B_{-w}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{-w(\lambda_n+\beta_n)+x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}.$$

З теореми 2 негайно випливає таке твердження.

Твердження 1. *Нехай диференційовна функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$, *а функція* $w \in L_+$ *така, що* $\ln\nu_1 \in \mathcal{W}$, *де* $\nu_1(t) = \int_0^t e^{w(x)}dn_*(x)$, $n_*(x) = \sum_{\lambda_n+\beta_n\le x} 1$. *Тоді для кожної функції* $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ *співвідношення*

$$\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_{-w}) \qquad (20)$$

виконується при $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

Справді, за теоремою 2, застосованою до функції B_{-w}, при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега отримуємо $\ln\mu(x,B_{-w}) = (1+\ o(1))\times$ $\times\ln\mu(x,(B_{-w})_w) = (1+o(1))\ln\mu(x,F)$, позаяк $\mu(x,(B_{-w})_w) = \mu(x,F)$. Тобто, твердження 1 доведено.

5. Ще кілька тверджень і заключні коментарі про стійкість за Гайсиним.

Наслідок 5. *Нехай диференційовна функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$. *Якщо*

$w \in \mathcal{W}$, $\ln n_* \in \mathcal{W}$, *де* $n_*(x) = \sum\limits_{\lambda_n+\beta_n\le x} 1$ *і* $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$, *то співвідношення* (8) *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

Доведення. Нехай $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$. Зауважимо спочатку, що з умов $\ln n_* \in \mathcal{W}$, $w \in \mathcal{W}$, позаяк, $\nu_1(x) \le e^{w(x)} \sum_{\alpha_n\le x} 1 = e^{w(x)} n_*(x)$, випливає, що $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$, а також, що $\ln \nu_*(x) = o(x)$, $w(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$. Звідси, зокрема також, маємо $\ln n = o(\alpha_n)$ $(n \to +\infty)$. Оскільки з умов $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ і $\tau'(x) \ge 1$ випливає, що

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n}{\alpha_n} = +\infty,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(a_n e^{w(\alpha_n)})}{\alpha_n} = +\infty,$$

і, отже, враховуючи, що $x \le \tau(x)$, для кожного фіксованого $x > 0$ і при $n \to +\infty$ отримаємо

$$a_n e^{w(\alpha_n)+x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} \le a_n e^{w(\alpha_n)+\tau(x)\alpha_n} \le$$
$$\le \exp\Big\{ -(1+o(1))\Big(-\ln(a_n e^{w(\alpha_n)}\Big)\Big\} \le$$
$$\le \exp\{-2\alpha_n\} \le \exp\{-2\ln n\},$$

тому $B_w \in S(\lambda,\beta,\tau)$. Для завершення доведення наслідку 5 залишилось застосувати теорему 2.

Подібно до того, як теорему 2 і твердження 1 було отримано з теореми 3, за допомогою теореми 4 отримуємо таке твердження.

Нехай для $w \in L_+$

$$B^{\lambda}_{\pm w}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\pm w(\lambda_n)+x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}.$$

Теорема 5. *Нехай диференційовна функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau'(x) \ge 0$ $(x > 0)$, *а функція* $w \in L_+$ *така, що* $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$, *де* $\nu_1(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)} dn_\lambda(x)$, $n_\lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n\le x} 1$. *Якщо* $B^{\lambda}_w \in S(\lambda,\beta,\tau)$, *то співвідношення* (8) *і* (20) *виконуються при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

Доведення. Нехай $a(t), b(t), \lambda(t), \beta(t)$ – вимірні невід'ємні функції на $\mathbb{R}_+$ такі, що $a(t) = |a_n|$, $b(t) = e^{w(t)}$, $\lambda(t) = \lambda_n$, $\beta(t) = \beta_n$ при $t = \lambda_n$ і

$$\mu(x,F) = \sup\{a(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)} : \ t \in \mathbb{R}_+\},$$
$$\mu(\sigma,B^{\lambda}_w) = \sup\{a(t)b(t)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)} : \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Для цього, як і вище, достатньо прийняти, що $a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n : n \ge 0\}$.

Тоді, $\mu(x,F) \le \mu(x,B_w) \le B^{\lambda}_w(x) = \int\limits_0^{+\infty} a(x)e^{x\lambda(t)+\tau(x)\beta(t)}\nu(dt)$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, де міра ν така, що $\nu(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(\lambda_n)\delta_{\lambda_n}(G)$ для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+$, а $\delta_\lambda(G)$ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Зрозуміло, що $\nu_0(x) = \nu(\{t \ge 0 \colon \lambda(t) \le x\}) \le \sum_{\alpha_n\le x} b(\alpha_n) = \sum_{\alpha_n\le x} e^{w(\alpha_n)} = \nu_1(x)$ і, тому, з умови $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$ негайно отримуємо, що виконуються умови теореми 4. Завершує доведення практично дослівне повторення відповідних місць у доведеннях теореми 2 і твердження 1. Теорему 5 доведено.

З теореми 5 нескладно, повторюючи міркування з доведення наслідку 4, отримати такий його аналог.

Наслідок 6. *Нехай диференційовна функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau'(x) \ge 0$ $(x > 0)$. *Якщо* $w \in \mathcal{W}$, $\ln n_\lambda \in \mathcal{W}$, *де* $n_\lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n\le x} 1$ *і* $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$, *то співвідношення* (8) *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної лебегової міри.*

З цитованого вище твердження зі статті [2, теорема 3] випливає, що якщо $\ln n_\lambda \in \mathcal{W}$, то умова $w \in \mathcal{W}$ є і необхідною для того, щоб для кожної функції $F \in S(\lambda) := \cup_\beta \cup_\tau S(\lambda,\beta,\tau)$ співвідношення (8) виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної лебегової міри.

З теореми 2 і твердження 1, а також з теореми 5, негайно отримуємо також такі твердження про співвідношення (3) для рядів типу Тейлора-Діріхле.

Нехай $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$, (b_n) – довільна послідовність така, що $b_n > 0$ $(n \ge 0)$, $w \in L_+$. Позначимо

$$F_\pm = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{\pm 1} e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}.$$

Теорема 6. *Нехай $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, де τ — диференційовна функція. Максимальний член $\mu(x, F)$ є стійким (тобто, співвідношення $\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F_{\pm})$ виконуються при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної лебегової міри), якщо виконується одна з таких двох груп умов:*

$\mathbf{1^0}$. *Функція $\tau(x)$ така, що $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$, а функція $w \in L_+$ така, що $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$, де $\nu_1(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)} dn_*(x)$, $n_*(x) = \sum\limits_{\lambda_n + \beta_n \leq x} 1$, $B_w \in S(\lambda, \beta, \tau)$, а також*

$$\ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \leq w(\lambda_n + \beta_n) \quad (n \geq n_1).$$

$\mathbf{2^0}$. *Функція $\tau(x)$ така, що $\tau'(x) \geq 0$ $(x > 0)$, а функція $w \in L_+$ така, що $\ln \nu_1 \in \mathcal{W}$, де $\nu_1(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)} dn_\lambda(x)$, $n_\lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \leq x} 1$, $B_w^\lambda \in S(\lambda, \beta, \tau)$, а також*

$$\ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq n_1).$$

Через елементарність, доведення теореми 6 ми не наводимо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайсин А.М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера // Докл. РАН. – 2000. – Т.370, №6. – С.735–737.

2. *Скасків О.Б., Тракало О.М.* Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №4. – С.571-—576.

3. *Скасків О.Б.* Стійкість максимума послідовності лінійних функцій // Матем. вісн. НТШ. – 2004. – Т.1. – С.120–129.

4. *Скаскив О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С.282–292.

5. Скасків О.Б., Трусевич О.М. *Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора-Діріхле* // Мат. Студ. – 2000. – Т.13, №1. – С.79–82.

6. Трусевич О.М. *Аналоги теореми Бореля для одного класу додатних функціональних рядів* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.53. – С.45–47.