УДК УДК 517.988.6

©2015 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

УМОВИ ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ НУЛІВ ДІАГОНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ДІЮТЬ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних майже періодичних рівнянь у просторі обмежених послідовностей, що не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic equations in the space of bounded sequences that do not use $\mathcal{H}$-classes of these equations.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел, E – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $L(E,E)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : E \to E$ з нормою $\|A\|_{L(E,E)} = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E$ і $\mathfrak{M}$ – банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ векторів $x_n \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$.

Визначимо у просторі $\mathfrak{M}$ оператор зсуву S_m, $m \in \mathbb{Z}$, співвідношенням

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичним* (див., наприклад, [1,2]), якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через $\mathfrak{B}$ підпростір майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}$.

Нехай Ω — область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ — множина всіх не порожніх компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо відображення $F_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{Z}$ що задовольняють умови:

1) векторні функції $F_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, рівномірно неперервні по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$;

2) $(F_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ – майже періодичний по n рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$ елемент простору $\mathfrak{M}$.

Неважко показати, що, як і в [2, с. 428–429],

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},x\in K} \|F_n(x)\|_E < +\infty$$

для кожної множини $K \in \mathcal{K}$ і для довільної послідовності $(m_k)_{k\geqslant 1}$ цілих чисел існує підпослідовність $(m_{k_l})_{l\geqslant 1}$, для якої послідовність $\left(F_{n+m_{k_l}}(x)\right)_{l\geqslant 1}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{Z}\times K$.

Вважатимемо, що $\left(F_{n+m_{k_l}}(x)\right)_{l\geqslant 1}$ збігається рівномірно на кожній множині $\mathbb{Z}\times K$, $K \in \mathcal{K}$, і гранична послідовність $(G_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$, що визначається співвідношеннями

$$G_n(x) = \lim_{l\to\infty} F_{n+m_{k_l}}(x),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Ця вимога виконується, якщо, наприклад, $\dim E < \infty$. У статті наведена вимога виконуватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Позначимо через $\mathbf{\Omega}$ множину всіх елементів $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $\mathfrak{M}$, для кожного з яких $x_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Розглянемо оператор $\mathbf{F} : \mathbf{\Omega} \to \mathfrak{M}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathbf{Fx})_n = F_n(x_n),\quad n \in \mathbb{Z},$$

(цей оператор є узагальненням діагональних операторів, що досліджувалися в [3]) і відповідне рівняння

$$F_n(x_n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

$\mathcal{H}$-класом цього рівняння називається множина всіх рівнянь

$$G_n(y_n) = 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

де G_n визначаються за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Зазначимо, що не кожний обмежений розв'язок рівняння (3) є майже періодичним. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Нехай $E = \mathbb{R}$. Визначимо відображення $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, рівностями

$$H_n(x) = \sin n \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| \leqslant 1, \\ |x| - 1, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

що, як і відображення F_n, $n \in \mathbb{Z}$, задовольняють умови 1 і 2. Очевидно, що кожний елемент $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, для якого $x_n \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$, є розв'язком рівняння $H_n(x_n) = 0$.

При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння, замикання множин значень яких є елементами з $\mathcal{K}$.

2. Функціонал Δ. Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$ і позначимо через $\mathcal{N}(K)$ множину розв'язків $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(\mathbf{x})}$ множини $R(\mathbf{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі E є підмножиною множини K. Також зафіксуємо елемент $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ множини $\mathcal{N}(K)$ і число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$, де

$$r(\mathbf{x}^*, K) =$$
$$= \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)},\ y \in K\right\}.$$

Вважаємо, що $r(\mathbf{x}^*, K) > 0$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $\mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$x_n^* + y_n \in K, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{і} \quad \|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\Delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{x}^*,K,\varepsilon)} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y})\|_{\mathfrak{M}}. \quad (4)$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного рівняння (3) та аналогічного лінійного рівняння наведемо в наступних двох пунктах.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [2,4] не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(K)$ рівняння (3) і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0 \quad (5)$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(K)$ рівняння (3) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\left(S_{m_p}\mathbf{z}\right)_{p\geqslant1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{z}\right)_{p\geqslant1}$ буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geqslant1}$, $(q_r)_{r\geqslant1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, r(\mathbf{z}, K))$

$$\|S_{m_{p_r}}\mathbf{z} - S_{m_{q_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \gamma, \quad r \geqslant 1. \quad (6)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність $\left(F_{n+k_p}(x)\right)_{p\geqslant1}$ збігається рівномірно на $\mathbb{Z} \times K$. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z},\ x\in K} \|F_{n+k_p}(x) - F_{n+k_q}(x)\|_E = 0. \quad (7)$$

Розглянемо елементи

$$\mathbf{y}_r = S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z} = (y_{r,n})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad r \geqslant 1,$$

простору $\mathfrak{M}$, де $y_{r,n} = y_{n+k_{p_r}} - y_{n+k_{q_r}}$. Очевидно, що

$$S_{-k_{q_r}}\mathbf{y}_r \in \Omega(\mathbf{z}, K, \gamma), \quad r \geqslant 1. \quad (8)$$

Покажемо, що

$$\Delta(\mathbf{z}, K, \gamma) = 0. \quad (9)$$

Завдяки (4), (8) та тому, що

$$F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) \equiv 0, \quad r \geqslant 1, \quad (10)$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(\mathbf{z}, K, \gamma) = \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{z},K,\gamma)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_n(z_n + y_n)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + y_{r,n}) \right\|_E =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) \right\|_E +$$

$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}) - F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z},\ x\in K} \left\| F_{n+k_{p_r}}(x) - F_{n+k_{q_r}}(x) \right\|_E,\ r \geqslant 1,$$

з яких на підставі (7) і (10) випливає співвідношення (9), що суперечить (5).

Отже, припущення, що розв'язок z рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

4. Застосування теореми 1. Використаємо теорему 1 до дослідження одного класу нелінійних різницевих рівнянь та лінійного рівняння, аналогічного (3).

4.1. Нелінійне різницеве рівняння $F_n(x_{n+1} - g_n(x_n)) = 0$**,** $n \in \mathbb{Z}$**.** У цьому рівнянні F_n – відображення, що й у рівнянні (3), а неперервні відображення $g_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, є такими, що:

а) $(g_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ як векторна функція зі значеннями в $\mathfrak{M}$ неперервна по x на Ω и, отже, рівномірно неперервна по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$ (див. [5, с. 112]);

б) $(g_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ як послідовність майже періодична рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Викладемо ідею одного методу з'ясування майже періодичності обмежених розв'язків досліджуваного різницевого рівняння з використанням теореми 1.

Якщо $\mathbf{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є розв'язком цього рівняння і $R(\mathbf{v}) \subset K_1$, де $K_1 \in \mathcal{K}$, то на підставі умов а) і б) послідовність $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, що визначається рівностями

$$h_n = v_{n+1} - g_n(v_n),\ \ n \in \mathbb{Z},$$

є обмеженою і $R(\mathbf{h}) \subset K_2$ для деякої множини $K_2 \in \mathcal{K}$. Отже, $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є розв'язком рівняння (3). У цьому випадку до (3) можна застосувати теорему 1 при $K = K_2$ і $\mathbf{z} = \mathbf{h}$. Вважатимемо, що умови цієї теореми виконуються. Тоді послідовність $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є майже періодичною і до майже періодичного різницевого рівняння

$$x_{n+1} - g_n(x_n) = h_n,\ \ n \in \mathbb{Z},$$

що має обмежений розв'язок $\mathbf{x} = \mathbf{v}$, можна застосувати результати досліджень статті [6] (у випадку $f_n(x) = g_n(x) + h_n$, $n \in \mathbb{Z}$) і показати майже періодичність $\mathbf{v}$ (при додаткових вимогах до f_n, $n \in \mathbb{Z}$).

4.2. Лінійний аналог рівняння (3)**.** Розглянемо відображення $F_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, що визначаються рівностями

$$F_n(x) = A_n x - h_n,\ \ n \in \mathbb{Z},$$

у випадку майже періодичних послідовностей $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ і $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $A_n \in L(E, E)$ і $h_n \in E$. Також розглянемо відповідне лінійне рівняння

$$A_n x_n = h_n,\ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

що є окремим випадком рівняння (3).

Послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ і відповідний оператор $\mathbf{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (A_n x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \tag{12}$$

називаються *майже періодичними*, якщо замикання множини $\{S_m \mathbf{A} S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ є компактною множиною.

Зазначимо, що у цьому рівнянні оператори A_n, $n \in \mathbb{Z}$, можуть не мати обернених неперервних операторів.

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо лінійне рівняння* (11) *має розв'язок $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ зі значеннями в K і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{z},K,\varepsilon)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n(z_n + y_n) - h_n\|_E > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок майже періодичний.

На завершення наведеної частини результатів із застосуванням функціонала Δ, зазначимо, що аналогічний функціонал використовувався автором для дослідження майже періодичних різницевих рівнянь із неперервним та дискретним аргументами [7]–[10], дискретних рівнянь [11], диференціальних рівнянь [12]–[14], диференціально-різницевих рівнянь [15], а також рівнянь з неперервним аргументом [16], для яких (3) є дискретним аналогом.

5. Дослідження рівняння (11) **без використання функціонала** Δ. Справджуються наступні два твердження про існування та єдиність розв'язків рівняння (11) у просторах $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{B}$.

Теорема 3. *Нехай*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E,E)} < +\infty. \tag{13}$$

Рівняння (11) *для кожної послідовності* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ *має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ *тоді і тільки тоді, коли оператор* A_n *для кожного* $n \in \mathbb{Z}$ *має обернений неперервний оператор* A_n^{-1} *і*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\|A_n^{-1}\right\|_{L(E,E)} < +\infty. \tag{14}$$

Зазначимо, що в цій теоремі послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ може не бути майже періодичною.

Доведення. Якщо рівняння (11) для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ має єдиний розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, то для кожного $n \in \mathbb{Z}$ для множини значень $R(A_n)$ і ядра $\ker A_n$ оператора A_n виконуються співвідношення

$$R(A_n) = E, \tag{15}$$

і

$$\ker A_n = \{0\}. \tag{16}$$

Якби для деякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ виконувалося співвідношення $\ker A_{n_0} \neq \{0\}$, то тоді елемент

$$\mathbf{a} = \begin{cases} a, & \text{якщо } n = n_0, \\ 0, & \text{якщо } n \in \mathbb{Z}\setminus\{n_0\}, \end{cases}$$

простору $\mathfrak{M}$ належав би ядру оператора $\mathbf{A}$, що визначається співвідношенням (12). Це суперечило б єдиності розв'язку $\mathbf{x}$ рівняння (11), що відповідає $\mathbf{h}$.

Завдяки (15), (16) та теоремі Банаха про обернений оператор [5, с. 225] оператор A_n має обернений неперервний оператор A_n^{-1}.

Покажемо, що виконується співвідношення (14).

Оскільки для кожної обмеженої послідовності $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $h_n \equiv \mathrm{const} \in E$, рівняння (11) має єдиний обмежений розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (A_n^{-1}\mathrm{const})_{n\in\mathbb{Z}}$, то для кожного вектора $u \in E$ послідовність $(A_n^{-1}u)_{n\in\mathbb{Z}}$ є обмеженою. Тому за теоремою Банаха-Штейнгауса [17, с. 54] виконується співвідношення (14).

Навпаки, якщо оператор A_n має обернений неперервний оператор A_n^{-1} для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і виконується співвідношення (14), то для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ рівняння (11) має розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, що подається у вигляді

$$\mathbf{x} = (A_n^{-1}h_n)_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{17}$$

Цей розв'язок, очевидно, єдиний.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *– майже періодична послідовність. Якщо оператор* A_n *має обернений неперервний оператор* A_n^{-1} *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ *і виконується співвідношення* (14), *то для кожної послідовності* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{B}$ *рівняння* (11) *має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{B}$.

Цю теорему доведемо за допомогою теореми 3 та наступних двох тверджень.

Лема 1. *Нехай* $\mathcal{M}$ *– передкомпактна множина лінійних неперервних операторів, що діють у просторі* $\mathfrak{M}$, *кожний оператор* $A \in \mathcal{M}$ *має обернений неперервний оператор* A^{-1} *і для деякого додатного числа* γ *виконується співвідношення*

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \left\|A^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \gamma. \tag{18}$$

Тоді кожний оператор $B \in \overline{\mathcal{M}}$, *де* $\overline{\mathcal{M}}$ *– замикання* $\mathcal{M}$ *у просторі* $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, *має обернений неперервний оператор* B^{-1},

$$\left\|B^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \gamma \tag{19}$$

і замикання множини $\{A^{-1} : A \in \mathcal{M}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ є компактною множиною.

Доведення. Нехай $B \in \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$. Існує послідовність операторів $A_n \in \mathcal{M}$, $n > \gamma$, для яких

$$\|A_n - B\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \frac{1}{n}, \quad n > \gamma. \tag{20}$$

Оскільки

$$B = A_n \left(I - A_n^{-1}(A_n - B)\right)$$

для кожного $n > \gamma$,

$$\left\|A_n^{-1}(A_n - B)\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|A_n^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \|A_n - B\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \frac{\gamma}{n} < 1$$

для кожного $n > \gamma$ (тут використано (18) і (20)) і оператори A_n та $I - A_n^{-1}(A_n - B)$ мають неперервні обернені (другий оператор є оборотним на підставі нерівності

$$\left\|A_n^{-1}(A_n - B)\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} < 1$$

[5, с. 228]), то оператор B також має обернений неперервний оператор і

$$B^{-1} = \left(I - A_n^{-1}(A_n - B)\right)^{-1} A_n^{-1}, \quad n > \gamma.$$

Звідси отримуємо, що

$$\left\|B^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \left(\left\|A_n^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left(I - A_n^{-1}(A_n - B)\right)^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}, \quad n > \gamma.$$

Оскільки

$$\left\|\left(I - A_n^{-1}(A_n - B)\right)^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \left\|A_n^{-1}(A_n - B)\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n - \gamma}$$

(див. [18, с. 45]) і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-\gamma} = 1$, то для B^{-1} виконується нерівність (19).

Далі, оскільки B^{-1} неперервно залежить від B (на відкритій множині всіх операторів із $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, що мають неперервні обернені оператори) і множина $\overline{\mathcal{M}}$, всі елементи якої оборотні, є компактною множиною, то множина $\left\{B^{-1} : B \in \overline{\mathcal{M}}\right\}$ також є компактною.

Звідси випливає компактність замикання множини $\{A^{-1} : A \in \mathcal{M}\}$ в $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай $\mathcal{M}_1$ і $\mathcal{M}_2$ – компактні множини елементів просторів $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ і $\mathfrak{M}$ відповідно.*

Тоді множина $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ є компактною.

Доведення. Зазначимо, що

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 = \{A\mathbf{x} : A \in \mathcal{M}_1, \mathbf{x} \in \mathcal{M}_2\}.$$

Нехай $(A_n\mathbf{x}_n)_{n\geqslant1}$ – довільна послідовність елементів множини $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ (тут $A_n \in \mathcal{M}_1$ і $\mathbf{x}_n \in \mathcal{M}_2$, $n \geqslant 1$). Оскільки множина $\mathcal{M}_1$ є компактною, то існують підпослідовність $(n_k)_{k\geqslant1}$ послідовності натуральних чисел і елемент $C \in \mathcal{M}_1$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = C.$$

Аналогично, завдяки компактності $\mathcal{M}_2$ існують підпослідовність $(n_{k_l})_{l\geqslant1}$ послідовності $(n_k)_{k\geqslant1}$ і елемент $\mathbf{y} \in \mathcal{M}_2$, для яких

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_{n_{k_l}} = \mathbf{y}.$$

Очевидно, що послідовність $\left(A_{n_{k_l}}\mathbf{x}_{n_{k_l}}\right)_{l\geqslant1}$ є збіжною і

$$\lim_{l\to\infty} A_{n_{k_l}}\mathbf{x}_{n_{k_l}} = C\mathbf{y} \in \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2.$$

Отже, множина $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ є компактною.

Лему 2 доведено.

Доведення теореми 4. Зазначимо, що для $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ виконується співвідношення (13), оскільки ця послідовність є майже періодичною. Зафіксуємо довільну послідовність $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{B}$. Завдяки теоремі 3 та умовам теореми 4 рівняння (11) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, що подається у вигляді (17).

Цей розв'язок є майже періодичним, тобто замикання множини $\{S_m\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактним.

Справді, рівність (17) можна подати у вигляді

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}, \tag{21}$$

де $\mathbf{A}$ – оператор, що визначається співвідношенням (12). На підставі (21)

$$\begin{gathered}\{S_m\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}\} = \left\{S_m\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\right\} = \\ = \left\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m}S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\right\} \subset \\ \subset \left\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\right\}\left\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\right\} \subset \\ \subset \overline{\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}}\ \overline{\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\}}.\end{gathered} \tag{22}$$

Тут $\overline{\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}}$ – замикання множини $\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, а $\overline{\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\}}$ – замикання множини $\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$. Завдяки майже періодичності оператора $\mathbf{A}$, виконанню співвідношення (14) та твердженню леми 1 кожний оператор $\mathbf{B}$ з множини $\overline{\{S_m\mathbf{A}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}}$ буде мати обернений неперервний оператор $\mathbf{B}^{-1}$, причому

$$\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left\|A_n^{-1}\right\|_{L(E,E)},$$

і множина $\overline{\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}}$ буде компактною (оператор $\mathbf{A}^{-1}$ майже періодичний). Множина $\overline{\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\}}$ також є компактною, оскільки $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$. Тому за лемою 2 компактною буде і множина

$$\overline{\{S_m\mathbf{A}^{-1}S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}}\ \overline{\{S_m\mathbf{h} : m \in \mathbb{Z}\}}.$$

Тоді на підставі (22) компактною буде і множина $\overline{\{S_m\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}\}}$, тобто розв'язок $\mathbf{x}$ рівняння (11) буде майже періодичним.

Теорему 4 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

3. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.

4. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.

5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

6. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.

7. *Слюсарчук В.Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.

8. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.

9. *Slyusarchuk V.Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Mathematical Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211–215.

10. *Слюсарчук В.Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Математические заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277–285.

11. *Слюсарчук В.Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407–418.

12. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.

13. *Слюсарчук В.Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384–393.

14. *Слюсарчук В.Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139–160.

15. *Слюсарчук В.Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Известия РАН. Серия математическая. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179–192.

16. *Слюсарчук В.Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь// Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 1–2. – С. 136–138.

17. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 445 с.

18. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.