

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України, Львів

## ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта двовимірного параболічного рівняння в області, розташування частини межі якої визначається невідомими залежними від часу функціями.

The unique solvability conditions of the inverse problem of finding the minor coefficient in a two-dimensional parabolic equation in the domain for which the location of boundary part is described by the unknown time-dependent functions are established.

Одним із важливих напрямків розвитку теорії диференціальних рівнянь є дослідження обернених задач для рівнянь із частинними похідними. Здебільшого обернені задачі зводяться до відтворення невідомих параметрів математичних моделей таких, як коефіцієнти рівняння, граничні чи початкові значення невідомої функції та ін. Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з відомими межами вивчені достатньо повно. Зокрема, у працях [1]–[5] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції у параболічних рівняннях в областях з відомими межами. Результати досліджень коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь показали, що питання ідентифікації коефіцієнта, який залежав би від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Певним наближенням до вирішення цього питання можна вважати подання коефіцієнта у вигляді добутку двох функцій від різних аргументів, одна з яких відома, а інша підлягає визначенню. У роботі [6] розглянуто задачу одночасного визначення функцій, що залежать від різних аргументів, у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні.

При моделюванні процесів із фазовими переходами виникають задачі з вільними межами, що представляють важливий як і теоретичний, так і практичний інтерес. По-

єднавши в одній задачі визначення невідомої межі та знаходження невідомого коефіцієнта рівняння, можна розглядати її як обернену задачу з двома невідомими параметрами. У роботах [7]–[10] вивчено обернені задачі визначення залежних від часу старших коефіцієнтів в одно- та двовимірних параболічних рівняннях в областях з вільними межами. Дослідження обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з невідомими молодшими коефіцієнтами в областях з вільними межами є актуальним.

**1. Формулювання задачі.** В області  $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t), 0 < x_2 < h(t), 0 < t < T\}$ , де  $l = l(t), h = h(t)$  – невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта  $c(t)$  параболічного рівняння

$$u_t = \Delta u + c(t)u + f(x_1, x_2, t), \quad (1)$$

$$(x_1, x_2, t) \in \Omega_T,$$

за умов

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (2)$$

$$(x_1, x_2) \in [0, l(0)] \times [0, h(0)],$$

$$u_{x_1}(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t),$$

$$u_{x_1}(l(t), x_2, t) = \mu_2(x_2, t),$$

$$(x_2, t) \in [0, h(t)] \times [0, T],$$

$$u_{x_2}(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t),$$

$$u_{x_2}(x_1, h(t), t) = \mu_4(x_1, t), \quad (3)$$

$$(x_1, t) \in [0, l(t)] \times [0, T],$$

$$\int_0^{l(t)} \int_0^{h(t)} u(x_1, x_2, t) dx_2 dx_1 = \mu_5(t),$$

$$\int_0^{l(t)} \int_0^{h(t)} x_2 u(x_1, x_2, t) dx_2 dx_1 = \mu_6(t),$$

$$u(0, 0, t) = \mu_7(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Заміною змінних  $y_1 = \frac{x_1}{l(t)}$ ,  $y_2 = \frac{x_2}{h(t)}$  задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими  $(l(t), h(t), c(t), v(y_1, y_2, t))$ , де  $v(y_1, y_2, t) = u(y_1 l(t), y_2 h(t), t)$ , в області  $Q_T = \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1, 0 < t < T\}$

$$v_t = \frac{1}{l^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2} + \frac{y_1 l'(t)}{l(t)} v_{y_1} + \frac{y_2 h'(t)}{h(t)} v_{y_2} + c(t)v + f(y_1 l(t), y_2 h(t), t), \quad (5)$$

$$(y_1, y_2, t) \in Q_T,$$

$$v(y_1, y_2, 0) = \varphi(y_1 l(0), y_2 h(0)), \quad (6)$$

$$(y_1, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$v_{y_1}(0, y_2, t) = l(t)\mu_1(y_2 h(t), t),$$

$$v_{y_1}(1, y_2, t) = l(t)\mu_2(y_2 h(t), t),$$

$$(y_2, t) \in [0, 1] \times [0, T],$$

$$v_{y_2}(y_1, 0, t) = h(t)\mu_3(y_1 l(t), t),$$

$$v_{y_2}(y_1, 1, t) = h(t)\mu_4(y_1 l(t), t), \quad (7)$$

$$(y_1, t) \in [0, 1] \times [0, T],$$

$$h(t)l(t) \int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 = \mu_5(t), \quad (8)$$

$$t \in [0, T],$$

$$h^2(t)l(t) \int_0^1 \int_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 =$$

$$= \mu_6(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$v(0, 0, t) = \mu_7(t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

## 2. Існування розв'язку задачі (5)–(10).

**Теорема 1.** *Припустимо, що виконуються умови:*

$$1) f \in C^{2,0}([0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T]),$$

$$\mu_i \in C^{2,1}([0, \infty) \times [0, T]), \quad i = 1, 2,$$

$$\mu_j \in C^{2,1}([0, \infty) \times [0, T]), \quad j = 3, 4,$$

$$\mu_k \in C^1[0, T], \quad k = 5, 7, \quad \varphi \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty));$$

$$2) f(x_1, x_2, t) \geq 0, \quad (x_1, x_2, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T], \quad 0 < \varphi_0 \leq \varphi(x_1, x_2) \leq \varphi_1 < \infty, \quad (x_1, x_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \quad \mu_k(t) > 0, \quad k = 5, 7, \quad t \in [0, T];$$

3) умови узгодження нульового та першого порядків.

Тоді можна вказати таке число  $T_0$ ,  $0 < T_0 \leq T$ , яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок  $(l, h, c, v) \in (C^1[0, T_0])^2 \times C[0, T_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ ,  $l(t) > 0$ ,  $h(t) > 0$ ,  $t \in [0, T_0]$ , задачі (5)–(10).

**Доведення.** Для доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) зведемо задачу до еквівалентної системи рівнянь відносно невідомих і застосуємо до неї теорему Шаудера про нерухому точку. Позначимо  $w_i(y_1, y_2, t) = v_{y_i}(y_1, y_2, t)$ ,  $z_i(y_1, y_2, t) = v_{y_i y_i}(y_1, y_2, t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $z_3(y_1, y_2, t) = v_{y_1 y_2}(y_1, y_2, t)$ ,  $p(t) = l'(t)$ ,  $q(t) = h'(t)$ . З умов (8), (9) знаходимо

$$h(t) = \frac{\mu_6(t) \int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2}{\mu_5(t) \int_0^1 \int_0^1 y^2 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2}, \quad (11)$$

$$t \in [0, T],$$

$$l(t) = \frac{\mu_5^2(t) \int_0^1 \int_0^1 y^2 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2}{\mu_6(t) \left( \int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 \right)^2}, \quad (12)$$

$$t \in [0, T].$$

Прийнявши в (5)  $y_1 = 0, y_2 = 0$ , отримуємо

$$c(t) = \frac{1}{\mu_7(t)} \left( \mu_7'(t) - \frac{z_1(0, 0, t)}{l^2(t)} - \frac{z_2(0, 0, t)}{h^2(t)} - f(0, 0, t) \right), \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Продиференціювавши умови (8), (9) за змінною  $t$  і використавши (5), одержуємо

$$p(t) = \frac{h(t)F_1(t) - F_2(t)}{h^2(t) \int_0^1 (1 - y_2)v(1, y_2, t)dy_2}, \quad (14)$$

$$t \in [0, T],$$

$$q(t) = \left( F_2(t) \int_0^1 v(1, y_2, t)dy_2 - h(t)F_1(t) \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 y_2v(1, y_2, t)dy_2 \right) \left( l(t) \int_0^1 v(y_1, 1, t)dy_1 \times \right. \\ \left. \times h(t) \int_0^1 (1 - y_2)v(1, y_2, t)dy_2 \right)^{-1}, \quad (15)$$

$$t \in [0, T],$$

де

$$F_1(t) = \mu_5'(t) - h(t) \int_0^1 (\mu_2(y_2h(t), t) - \\ - \mu_1(y_2h(t), t))dy_2 - l(t) \int_0^1 (\mu_4(y_1l(t), t) - \\ - \mu_3(y_1l(t), t))dy_1 - c(t)\mu_5(t) - \\ - l(t)h(t) \int_0^1 \int_0^1 f(y_1l(t), y_2h(t), t)dy_1dy_2,$$

$$F_2(t) = \mu_6'(t) - h^2(t) \int_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t), t) - \\ - \mu_1(y_2h(t), t))dy_2 - l(t)h(t) \int_0^1 \mu_4(y_1l(t), t)dy_1 +$$

$$+ l(t) \int_0^1 (v(y_1, 1, t) - v(y_1, 0, t))dy_1 - c(t)\mu_6(t) - \\ - l(t)h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 y_2f(y_1l(t), y_2h(t), t)dy_1dy_2.$$

За допомогою функції Гріна  $G_{22} = G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)$  другої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1} + \frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}$$

розв'язок задачі (5)–(7) подамо у вигляді

$$v(y_1, y_2, t) = v_0(y_1, y_2, t) + \\ + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left( w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) \times \right. \\ \left. \times \frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + v(\eta_1, \eta_2, \tau) \times \right. \\ \left. \times c(\tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T, \quad (16)$$

де

$$G_{ij}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) = \\ = \frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}} \times \\ \times \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(y_1 - \eta_1 + 2n)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) + \right. \\ \left. + (-1)^i \exp\left(-\frac{(y_1 + \eta_1 + 2n)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) \right) \times \\ \times \left( \exp\left(-\frac{(y_2 - \eta_2 + 2m)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right) + \right. \\ \left. + (-1)^j \exp\left(-\frac{(y_2 + \eta_2 + 2m)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right) \right), \\ i, j = 1, 2, \theta_1(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{l^2(\sigma)}, \theta_2(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{h^2(\sigma)},$$

а  $v_0(y_1, y_2, t)$  визначається рівністю

$$v_0(y_1, y_2, t) = \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, 0) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0)) d\eta_1 d\eta_2 - \\
& - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
& \quad \times \frac{\mu_1(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)} d\eta_2 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
& \quad \times \frac{\mu_2(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)} d\eta_2 d\tau - \\
& - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\
& \quad \times \frac{\mu_3(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)} d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \quad \times \frac{\mu_4(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)} d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \quad \times f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_1 d\eta_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Врахувавши властивості функції Гріна

$$-G_{22\tau} = \frac{1}{l^2(\tau)} G_{22\eta_1 \eta_1} + \frac{1}{h^2(\tau)} G_{22\eta_2 \eta_2},$$

$$G_{22y_1} = -G_{12\eta_1}, \quad G_{22y_2} = -G_{21\eta_2},$$

продиференціємо (16) за змінними  $y_1, y_2$

$$\begin{aligned}
& z_1(y_1, y_2, t) = v_{0y_1 y_1}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{12y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left( \frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} \times \right. \\
& \quad \times z_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} z_3(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
& \left. + \left( c(\tau) + \frac{p(\tau)}{l(\tau)} \right) w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$(y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$\begin{aligned}
& z_2(y_1, y_2, t) = v_{0y_2 y_2}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{21y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left( \frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} \times \right. \\
& \quad \times z_3(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} z_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
& \left. + \left( c(\tau) + \frac{q(\tau)}{h(\tau)} \right) w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$(y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$\begin{aligned}
& z_3(y_1, y_2, t) = v_{0y_1 y_2}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{12y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left( \frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} \times \right. \\
& \quad \times z_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} z_3(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
& \left. + \left( c(\tau) + \frac{p(\tau)}{l(\tau)} \right) w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$(y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T,$$

де  $v_{0y_1 y_1}(y_1, y_2, t), v_{0y_2 y_2}(y_1, y_2, t), v_{0y_1 y_2}(y_1, y_2, t)$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
& v_{0y_1 y_1}(y_1, y_2, t) = \\
& = l^2(0) \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, 0) \times \\
& \quad \times \varphi_{\eta_1 \eta_1}(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0)) d\eta_1 d\eta_2 + \\
& \quad + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
& \quad \times (l(\tau)(\mu_{1x_2 x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) - \mu_{1\tau}(\eta_2 h(\tau), \tau) - \\
& \quad - \eta_2 q(\tau) \mu_{1x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) + f_{x_1}(0, \eta_2 h(\tau), \tau)) - \\
& \quad - p(\tau) \mu_1(\eta_2 h(\tau), \tau)) d\eta_2 d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
& \quad \times (l(\tau)(\mu_{2\tau}(\eta_2 h(\tau), \tau) - \mu_{2x_2 x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) + \\
& \quad + \eta_2 q(\tau) \mu_{2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) - f_{x_1}(l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau)) + \\
& \quad + p(\tau) \mu_2(\eta_2 h(\tau), \tau)) d\eta_2 d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\
& \times \frac{l^2(\tau)}{h(\tau)} \mu_{3x_1x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \times \frac{l^2(\tau)}{h(\tau)} \mu_{4x_1x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times l^2(\tau) f_{x_1x_1}(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \\
& \quad v_{0y_2y_2}(y_1, y_2, t) = \\
& = h^2(0) \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, 0) \times \\
& \times \varphi_{\eta_2\eta_2}(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0)) d\eta_1 d\eta_2 - \\
& - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \frac{h^2(\tau)}{l(\tau)} \mu_{1x_2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_2 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \frac{h^2(\tau)}{l(\tau)} \mu_{2x_2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_2 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\
& \times (h(\tau)(\mu_{3x_1x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) - \mu_{3\tau}(\eta_1 l(\tau), \tau) - \\
& - \eta_1 p(\tau) \mu_{3x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) + f_{x_2}(\eta_1 l(\tau), 0, \tau)) - \\
& - q(\tau) \mu_3(\eta_1 l(\tau), \tau)) d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \times (h(\tau)(\mu_{4\tau}(\eta_1 l(\tau), \tau) - \mu_{4x_1x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_1 p(\tau) \mu_{4x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) - f_{x_2}(\eta_1 l(\tau), h(\tau), \tau)) + \\
& + q(\tau) \mu_4(\eta_1 l(\tau), \tau)) d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times h^2(\tau) f_{x_2x_2}(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \\
& \quad v_{0y_1y_2}(y_1, y_2, t) = \\
& = l(0)h(0) \int_0^1 \int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, 0) \times \\
& \times \varphi_{\eta_1\eta_2}(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0)) d\eta_1 d\eta_2 + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{11\eta_1}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \frac{h(\tau)}{l(\tau)} \mu_{1x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_2 d\tau - \\
& - \int_0^t \int_0^1 G_{11\eta_1}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \frac{h(\tau)}{l(\tau)} \mu_{2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_2 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_{11\eta_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\
& \times \frac{l(\tau)}{h(\tau)} \mu_{3x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) d\eta_1 d\tau - \\
& - \int_0^t \int_0^1 G_{11\eta_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \times \frac{l(\tau)}{h(\tau)} \mu_{4x_1}(\eta_1 l(\tau), \tau) d\eta_1 d\tau - \\
& - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times l(\tau)h(\tau) f_{x_1x_2}(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) d\eta_1 d\eta_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Таким чином, підставивши рівності

$$w_1(y_1, y_2, t) = l(t) \mu_1(y_2 h(t), t) + \int_0^{y_1} z_1(\xi, y_2, t) d\xi,$$

$$w_2(y_1, y_2, t) = h(t)\mu_3(y_1 l(t), t) + \int_0^{y_2} z_2(y_1, \xi, t) d\xi$$

в (16)–(19), одержуємо систему рівнянь (11)–(19) відносно невідомих  $(h(t), l(t), c(t), p(t), q(t), v(y_1, y_2, t), z_1(y_1, y_2, t), z_2(y_1, y_2, t), z_3(y_1, y_2, t))$ . Якщо  $(l, h, c, v) \in (C^1[0, T])^2 \times C[0, T] \times C^{2,1}(\overline{Q_T})$  є розв'язком задачі (5)–(10), то  $(h, l, c, p, q, v, z_1, z_2, z_3) \in (C[0, T])^5 \times (C(\overline{Q_T}))^4$  є розв'язком системи рівнянь (11)–(19). Правильним є і обернене твердження.

Нехай  $(h, l, c, p, q, v, z_1, z_2, z_3)$  є неперервним розв'язком системи рівнянь (11)–(19). Продиференціюємо (16) за змінними  $y_1, y_2$ . Праві частини отриманих рівностей та рівностей (17)–(19) співпадають, тому можемо зробити висновок, що  $z_i(y_1, y_2, t) = v_{y_i y_i}(y_1, y_2, t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $z_3(y_1, y_2, t) = v_{y_1 y_2}(y_1, y_2, t)$ . Отже, функція  $v \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$  задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{1}{l^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2} + \frac{y_1 p(t)}{l(t)} v_{y_1} + \frac{y_2 q(t)}{h(t)} v_{y_2} + c(t)v + f(y_1 l(t), y_2 h(t), t), \quad (20)$$

$$(y_1, y_2, t) \in Q_T,$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на  $[0, T]$  функцій  $c(t), h(t), p(t), q(t)$ . Прийmemo в (20)  $y_1 = 0, y_2 = 0$ . Віднявши від отриманої рівності (13), одержуємо умову (10). З рівностей (11), (12) випливають умови (8), (9). Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати (11), (12) за  $t$ . Використавши те, що функція  $v(y_1, y_2, t)$  задовольняє рівняння (20), та віднявши від отриманих рівностей (14), (15), одержуємо

$$\mu_5(t)((p(t) - l'(t))h(t) + (q(t) - h'(t))l(t)) = 0,$$

$$\mu_6(t)((p(t) - l'(t))h(t) + 2(q(t) - h'(t))l(t)) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що  $p(t) = l'(t)$ ,  $q(t) = h'(t)$ ,  $l, h \in (C^1[0, T])^2$ , функція  $v(y_1, y_2, t)$  задовольняє рівняння (5).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (11)–(19) у вище зазначеному сенсі доведено.

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (11)–(19). Визначимо значення невідомих функцій  $l(t), h(t)$  у початковий момент часу. З умов (2), (4) отримуємо

$$\int_0^{l_0} \int_0^{h_0} \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \mu_5(0),$$

$$\int_0^{l_0} \int_0^{h_0} x_2 \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \mu_6(0), \quad (21)$$

$l_0 = l(0)$ ,  $h_0 = h(0)$ . Позначивши

$$\int_0^{l_0} \varphi(x_1, x_2) dx_1 = \psi(l_0, x_2),$$

систему (21) подамо у вигляді

$$\int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2) dx_2 = \mu_5(0),$$

$$\int_0^{h_0} x_2 \psi(l_0, x_2) dx_2 = \mu_6(0).$$

Згідно з припущеннями теореми

$$l_0 \varphi_0 \leq \psi(l_0, x_2) \leq l_0 \varphi_1.$$

Тоді

$$l_0 h_0 \varphi_0 \leq \int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2) dx_2 \leq l_0 h_0 \varphi_1.$$

Функція  $y = \int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2) dx_2$  при довільно фіксованому  $l_0 > 0$  монотонно зростаюча стосовно  $h_0$ . Таким чином, існує єдине значення  $h_0(l_0)$ , яке є розв'язком рівняння

$$\int_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2) dx_2 = \mu_5(0).$$

Тоді

$$\frac{\mu_5(0)}{l_0 \varphi_1} \leq h_0(l_0) \leq \frac{\mu_5(0)}{l_0 \varphi_0},$$

$$\frac{\varphi_0 \mu_5^2(0)}{2l_0 \varphi_1^2} \leq \int_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2) dx_2 \leq \frac{\varphi_1 \mu_5^2(0)}{2l_0 \varphi_0^2}.$$

Функція  $y = \int_0^{h_0} x_2 \psi(l_0, x_2) dx_2$  монотонно спадна функція змінної  $l_0$ , яка перетне пряму  $y = \mu_6(0)$  тільки в одній точці. Таким чином, існує єдиний розв'язок  $l_0, h_0$  системи (21).

З (16) можемо зробити висновок про існування такого числа  $t_1, 0 < t_1 \leq T$ , що

$$v(y_1, y_2, t) \geq \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \quad (22)$$

$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Очевидно, що виконання умови (22) рівносильне виконанню нерівності

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \right. \\ & \quad \times \frac{\mu_1(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)} d\eta_2 d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\mu_2(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)} d\eta_2 d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\mu_3(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)} d\eta_1 d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\mu_4(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)} d\eta_1 d\tau + \\ & \left. + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\ & + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(\tau) v(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\ & \left. + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \Big| \leq M_0, \quad (23) \\ & (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \end{aligned}$$

Врахувавши (23), з (16) одержуємо

$$v(y_1, y_2, t) \leq \varphi_1 + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (24)$$

$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді для розв'язків рівнянь (11), (12) справедливі нерівності

$$0 < H_0 \leq h(t) \leq H_1 < \infty,$$

$$0 < L_0 \leq l(t) \leq L_1 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \quad (25)$$

Позначимо  $Z_i(t) = \max_{(y_1, y_2) \in ([0, 1])^2} |z_i(y_1, y_2, t)|$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . З (13)–(15), врахувавши (22), (24), (25) одержуємо

$$|c(t)| \leq C_1 + C_2 Z_1(t) + C_3 Z_2(t),$$

$$|p(t)| \leq C_4 + C_5 Z_1(t) + C_6 Z_2(t),$$

$$|q(t)| \leq C_7 + C_8 Z_1(t) + C_9 Z_2(t), \quad (26)$$

$$t \in [0, t_1].$$

Використавши (25), (26) та оцінки функції Гріна [11], з (17)–(19) отримуємо

$$Z_1(t) \leq C_{10} + C_{11} \int_0^t (1 + Z_1(\tau) + Z_2(\tau) + Z_3(\tau) +$$

$$+ Z_1(\tau)Z_2(\tau) + Z_1(\tau)Z_3(\tau) + Z_2(\tau)Z_3(\tau) +$$

$$+ Z_1^2(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0, t_1],$$

$$Z_2(t) \leq C_{12} + C_{13} \int_0^t (1 + Z_1(\tau) + Z_2(\tau) + Z_3(\tau) +$$

$$+ Z_1(\tau)Z_2(\tau) + Z_1(\tau)Z_3(\tau) + Z_2(\tau)Z_3(\tau) +$$

$$+ Z_2^2(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0, t_1],$$

$$Z_3(t) \leq C_{14} + C_{15} \int_0^t (1 + Z_1(\tau) + Z_2(\tau) + Z_3(\tau) + Z_1(\tau)Z_2(\tau) + Z_1(\tau)Z_3(\tau) + Z_2(\tau)Z_3(\tau) + Z_1^2(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0, t_1].$$

Звідси для функції  $R(t) = R_1(t) + R_2(t) + R_3(t)$ , де  $R_i(t) = 1 + Z_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , одержуємо нерівність

$$R(t) \leq C_{16} + C_{17} \int_0^t \frac{R(\tau) + R^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [12]. Звідси отримуємо оцінку

$$R(t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0],$$

де  $M_2$  і  $T_0$ ,  $0 < T_0 \leq t_1$ , визначаються відомими величинами. Тоді

$$|z_1(y_1, y_2, t)| \leq M_2, \quad |z_2(y_1, y_2, t)| \leq M_2,$$

$$|z_3(y_1, y_2, t)| \leq M_2, \quad |c(t)| \leq B_1 < \infty,$$

$$|p(t)| \leq B_2 < \infty, \quad |q(t)| \leq B_3 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Подамо систему рівнянь (11)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

$\omega = (h(t), l(t), c(t), p(t), q(t), v(y_1, y_2, t), z_1(y_1, y_2, t), z_2(y_1, y_2, t), z_3(y_1, y_2, t))$ , а оператор  $P = (P_1, \dots, P_9)$  визначається правими частинами рівнянь (11)–(19). Позначимо  $N = \{(h, l, c, p, q, v, z_1, z_2, z_3) \in (C[0, T_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^4 : H_0 \leq h(t) \leq H_1, L_0 \leq l(t) \leq L_1, |c(t)| \leq B_1, |p(t)| \leq B_2, |q(t)| \leq B_3, M_0 \leq v(y_1, y_2, t) \leq M_1, |z_1(y_1, y_2, t)| \leq M_2, |z_2(y_1, y_2, t)| \leq M_2, |z_3(y_1, y_2, t)| \leq M_2\}$ . Очевидно, що множина  $N$  задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор  $P$  переводить  $N$  в себе. Те, що оператор  $P$  цілком неперервний на  $N$ , доводиться як у [12].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (11)–(19), а, отже, існує розв'язок задачі (5)–(10) при  $(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{T_0}$ .

### 3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови:*

$$1) f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T]), \\ \mu_i \in C^{3,1}([0, \infty) \times [0, T]), \quad i = 1, 2, \\ \mu_j \in C^{3,1}([0, \infty) \times [0, T]), \quad j = 3, 4;$$

$$2) 0 < \varphi_0 \leq \varphi(x_1, x_2) \leq \varphi_1 < \infty, \quad (x_1, x_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \quad \mu_i(t) > 0, \quad i = 5, 6, \\ \mu_7(t) \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тоді задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків  $(l, h, c, v) \in (C^1[0, t_1])^2 \times C[0, t_1] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$ ,  $l(t) > 0$ ,  $h(t) > 0$ ,  $t \in [0, t_1]$ , де  $t_1$ ,  $0 < t_1 \leq T$ , визначається вихідними даними.

**Доведення.** Припустимо, що  $(l_i(t), h_i(t), c_i(t), v_i(y_1, y_2, t))$ ,  $i = 1, 2$ , – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{l'_i(t)}{l_i(t)} = p_i(t), \quad \frac{h'_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \\ c(t) = c_1(t) - c_2(t),$$

$$v(y_1, y_2, t) = v_1(y_1, y_2, t) - v_2(y_1, y_2, t).$$

Функції  $p(t), q(t), c(t), v(y_1, y_2, t)$  задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{1}{l_1^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h_1^2(t)} v_{y_2 y_2} + y_1 p_1(t) v_{y_1} + \\ + y_2 q_1(t) v_{y_2} + c_1(t) v + \left( \frac{1}{l_1^2(t)} - \frac{1}{l_2^2(t)} \right) v_{2y_1 y_1} + \\ + \left( \frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) v_{2y_2 y_2} + y_1 p(t) v_{2y_1} + \\ + y_2 q(t) v_{2y_2} + c(t) v_2 + f(y_1 l_1(t), y_2 h_1(t), t) - \\ - f(y_1 l_2(t), y_2 h_2(t), t), \quad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \quad (27)$$

та умови

$$v(y_1, y_2, 0) = 0, \quad (28)$$

$$(y_1, y_2) \in [0, l(0)] \times [0, h(0)],$$

$$v_{y_1}(0, y_2, t) = l_1(t) \mu_1(y_2 h_1(t), t) - \\ - l_2(t) \mu_1(y_2 h_2(t), t),$$

$$v_{y_1}(1, y_2, t) = l_1(t) \mu_2(y_2 h_1(t), t) - \\ - l_2(t) \mu_2(y_2 h_2(t), t),$$



$$\begin{aligned}
v_{y_2}(y_1, 0, t) &= h_1(t)\mu_3(y_1 l_1(t), t) - \\
&\quad - h_2(t)\mu_3(y_1 l_2(t), t), \\
v_{y_2}(y_1, 1, t) &= h_1(t)\mu_4(y_1 l_1(t), t) - \\
&\quad - h_2(t)\mu_4(y_1 l_2(t), t), \quad (29) \\
(y_1, y_2, t) &\in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, T], \\
\int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 &= \\
&= \mu_5(t) \left( \frac{1}{l_1(t)h_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)h_2(t)} \right), \\
\int_0^1 \int_0^1 y^2 v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 &= \\
&= \mu_6(t) \left( \frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)} - \frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)} \right), \\
v(0, 0, t) &= 0, \quad t \in [0, T]. \quad (30)
\end{aligned}$$

Задача (27)–(29) еквівалентна рівнянню

$$\begin{aligned}
v(y_1, y_2, t) &= \tilde{v}_0(y_1, y_2, t) + \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) (\eta_1 p_1(\tau) \times \\
&\times v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 q_1(\tau) v_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c_1(\tau) \times \\
&\times v(\eta_1, \eta_2, \tau)) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T, \quad (31)
\end{aligned}$$

де  $\tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)$  – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{1}{l_1^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h_1^2(t)} v_{y_2 y_2},$$

а  $\tilde{v}_0(y_1, y_2, t)$  визначається рівністю

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0(y_1, y_2, t) &= - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
&\times (l_1(\tau)\mu_1(\eta_2 h_1(\tau), \tau) - l_2(\tau)\mu_1(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \times \\
&\times \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
&\times (l_1(\tau)\mu_2(\eta_2 h_1(\tau), \tau) - l_2(\tau)\mu_2(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \times \\
&\times \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times \\
&\times (h_1(\tau)\mu_3(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - h_2(\tau)\mu_3(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) \times \\
&\times \frac{1}{h_1^2(\tau)} d\eta_1 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
&\times (h_1(\tau)\mu_4(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - h_2(\tau)\mu_4(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) \times \\
&\times \frac{1}{h_1^2(\tau)} d\eta_1 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
&\times \left( \left( \frac{1}{l_1^2(\tau)} - \frac{1}{l_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_1 \eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_2 \eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
&+ \eta_1 p(\tau) v_{2\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(t) v_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
&+ \eta_2 q(\tau) v_{2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l_1(\tau), \eta_2 h_1(\tau), \tau) - \\
&\left. - f(\eta_1 l_2(\tau), \eta_2 h_2(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Оскільки для  $c_i(t), p_i(t), q_i(t), i = 1, 2$ , справджуються рівності, аналогічні до (13)–(15), то звідси отримуємо

$$\begin{aligned}
p(t) \int_0^1 v_2(1, y_2, t) dy_2 + q(t) \int_0^1 v_2(y_1, 1, t) dy_1 + \\
+ \frac{\mu_5(t)c(t)}{l_1(t)h_1(t)} = -p_1(t) \int_0^1 v(1, y_2, t) dy_2 - \\
- q_1(t) \int_0^1 v(y_1, 1, t) dy_1 + \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \times \\
\times \left( \frac{\mu'_5(t)}{l_1(t)} - \frac{c_2(t)\mu_5(t)}{l_1(t)} - \int_0^1 (\mu_4(y_1 l_2(t), t) - \right. \\
\left. - \mu_3(y_1 l_2(t), t)) dy_1 \right) + \left( \frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)} \right) \times \\
\times \left( \frac{\mu'_5(t)}{h_2(t)} - \frac{c_2(t)\mu_5(t)}{h_2(t)} - \int_0^1 (\mu_2(y_2 h_2(t), t) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_1(y_2h_2(t), t)dy_2) - \frac{1}{l_1(t)} \int_0^1 (\mu_2(y_2h_1(t), t) - \\
& \quad -\mu_2(y_2h_2(t), t) - \mu_1(y_2h_1(t), t) + \\
& \quad +\mu_1(y_2h_2(t), t))dy_2 - \frac{1}{h_1(t)} \int_0^1 (\mu_4(y_1l_1(t), t) - \\
& \quad -\mu_4(y_1l_2(t), t) - \mu_3(y_1l_1(t), t) + \\
& \quad +\mu_3(y_1l_2(t), t))dy_1 - \int_0^1 \int_0^1 (f(y_1l_1(t), y_2h_1(t), t) - \\
& \quad -f(y_1l_2(t), y_2h_2(t), t))dy_1dy_2, \quad t \in [0, T], \quad (32) \\
& p(t) \int_0^1 (1 - y_2)v_2(1, y_2, t)dy_2 + \frac{c(t)}{l_1(t)h_1^2(t)} \times \\
& \times (h_1(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) = -\frac{1}{h_1^2(t)} \int_0^1 (v(y_1, 1, t) - \\
& -v(y_1, 0, t))dy_1 - p_1(t) \int_0^1 (1 - y_2)v(1, y_2, t)dy_2 + \\
& + \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left( \frac{\mu_5'(t)}{l_1(t)} - \frac{c_2(t)\mu_5(t)}{l_1(t)} + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \mu_3(y_1l_2(t), t)dy_1 \right) - \left( \frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) \times \\
& \times \left( \frac{\mu_6'(t)}{l_1(t)} - \frac{c_2(t)\mu_6(t)}{l_1(t)} + \int_0^1 (v_2(y_1, 1, t) - \right. \\
& \left. -v_2(y_1, 0, t))dy_1 \right) + \left( \frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)} \right) \left( \frac{1}{h_2^2(t)} \times \right. \\
& \times (\mu_5'(t)h_2(t) - \mu_6'(t)) - \frac{c_2(t)}{h_2^2(t)} (\mu_5(t)h_2(t) - \\
& \quad -\mu_6(t)) - \int_0^1 (1 - y_2)(\mu_2(y_2h_2(t), t) - \\
& \quad \left. -\mu_1(y_2h_2(t), t))dy_2 \right) - \frac{1}{l_1(t)} \int_0^1 (1 - y_2) \times \\
& \quad \times (\mu_2(y_2h_1(t), t) - \mu_2(y_2h_2(t), t) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_1(y_2h_1(t), t) + \mu_1(y_2h_2(t), t))dy_2 + \\
& + \frac{1}{h_1(t)} \int_0^1 (\mu_3(y_1l_1(t), t) - \mu_3(y_1l_2(t), t))dy_1 - \\
& - \int_0^1 \int_0^1 (1 - y_2)(f(y_1l_1(t), y_2h_1(t), t) - \\
& -f(y_1l_2(t), y_2h_2(t), t))dy_1dy_2, \quad t \in [0, T], \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(t) = & -\frac{1}{\mu_7(t)} \left( \frac{v_{y_1y_1}(0, 0, t)}{l_1^2(t)} + v_{2y_1y_1}(0, 0, t) \times \right. \\
& \times \left( \frac{1}{l_1^2(t)} - \frac{1}{l_2^2(t)} \right) + \frac{v_{y_2y_2}(0, 0, t)}{h_1^2(t)} + v_{2y_2y_2}(0, 0, t) \times \\
& \left. \times \left( \frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) \right), \quad t \in [0, T]. \quad (34)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для  $v_i(y_1, y_2, t)$ ,  $i = 1, 2$ , виконується нерівність (22). Тоді

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 v_2(1, y_2, t)dy_2 \neq 0, \quad \int_0^1 y_2v_2(1, y_2, t)dy_2 \neq 0, \\
& \int_0^1 v_2(y_1, 1, t)dy_1 \neq 0, \quad t \in [0, t_1].
\end{aligned}$$

Продиференціювавши (31) за змінними  $y_1, y_2$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
v_{y_1}(y_1, y_2, t) = & \tilde{v}_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) (\eta_1 p_1(\tau) \times \\
& \times v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 q_1(\tau) v_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c_1(\tau) \times \\
& \times v(\eta_1, \eta_2, \tau)) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y_2}(y_1, y_2, t) = & \tilde{v}_{0y_2}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) (\eta_1 p_1(\tau) \times \\
& \times v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 q_1(\tau) v_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c_1(\tau) \times \\
& \times v(\eta_1, \eta_2, \tau)) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T, \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\tilde{v}_{0y_1}(y_1, y_2, t) = \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{12\eta_1}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (l_1(\tau)\mu_1(\eta_2 h_1(\tau), \tau) - l_2(\tau)\mu_1(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{12\eta_1}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times (l_1(\tau)\mu_2(\eta_2 h_1(\tau), \tau) - l_2(\tau)\mu_2(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{12}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \frac{1}{h_1^2(\tau)} \times \\
& \times (l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{3x_1}(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - \mu_{3x_1}(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times l_2(\tau)h_2(\tau) d\eta_1 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{12}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \times \frac{1}{h_1^2(\tau)} (l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{4x_1}(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - \\
& - l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{4x_1}(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) d\eta_1 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \left( \left( \frac{1}{l_1^2(\tau)} - \frac{1}{l_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
& + \eta_1 p(\tau) v_{2\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(t) v_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
& + \eta_2 q(\tau) v_{2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l_1(\tau), \eta_2 h_1(\tau), \tau) - \\
& \left. - f(\eta_1 l_2(\tau), \eta_2 h_2(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \\
& \tilde{v}_{0y_2}(y_1, y_2, t) = - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{21}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau) \times \\
& \times (l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{1x_2}(\eta_2 h_1(\tau), \tau) - \\
& - l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{1x_2}(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{21}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau) (\mu_{2x_2}(\eta_2 h_1(\tau), \tau) \times \\
& \times l_1(\tau)h_1(\tau) - l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{2x_2}(\eta_2 h_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times \frac{1}{l_1^2(\tau)} d\eta_2 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{21\eta_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (h_1(\tau)\mu_3(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - h_2(\tau)\mu_3(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times \frac{1}{h_1^2(\tau)} d\eta_1 d\tau - \int_0^t \int_0^1 \tilde{G}_{21\eta_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau) \times \\
& \times (h_1(\tau)\mu_4(\eta_1 l_1(\tau), \tau) - h_2(\tau)\mu_4(\eta_1 l_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times \frac{1}{h_1^2(\tau)} d\eta_1 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\
& \times \left( \left( \frac{1}{l_1^2(\tau)} - \frac{1}{l_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right. \\
& + \eta_1 p(\tau) v_{2\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(t) v_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\
& + \eta_2 q(\tau) v_{2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l_1(\tau), \eta_2 h_1(\tau), \tau) - \\
& \left. - f(\eta_1 l_2(\tau), \eta_2 h_2(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Виразимо  $l_i(t), h_i(t)$  через  $p_i(t), q_i(t)$

$$l_i(t) = l_i(0) \exp \left( \int_0^t p_i(\tau) d\tau \right),$$

$$h_i(t) = h_i(0) \exp \left( \int_0^t q_i(\tau) d\tau \right), \quad i = 1, 2,$$

де  $l_1(0) = l_2(0) = l_0, h_1(0) = h_2(0) = h_0$ .  
Звідси, використавши рівності

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau,$$

$$\begin{aligned}
& f(yh_1(t)) - f(yh_2(t)) = y(h_1(t) - h_2(t)) \times \\
& \times \int_0^1 f_y(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t) d\sigma,
\end{aligned}$$

ОТРИМУЄМО

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)} = \\
& = -\frac{1}{l_0} \int_0^t p(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left( - \int_0^t (\sigma p(\tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_2(\tau) d\tau \Big) d\sigma, \\
& \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \\
& = -\frac{1}{h_0} \int_0^t q(\tau) d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma q(\tau) + \right. \\
& \left. + q_2(\tau)) d\tau\right) d\sigma, \\
& \mu_i(y_2 h_1(t), t) - \mu_i(y_2 h_2(t), t) = \\
& = y_2 (h_1(t) - h_2(t)) \int_0^1 \mu_{ix_2}(y_2 (h_2(t) + \\
& + \sigma (h_1(t) - h_2(t))), t) d\sigma, \quad i = 1, 2, \\
& \mu_j(y_1 l_1(t), t) - \mu_j(y_1 l_2(t), t) = \\
& = y_1 (l_1(t) - l_2(t)) \int_0^1 \mu_{jx_1}(y_1 (l_2(t) + \\
& + \sigma (l_1(t) - l_2(t))), t) d\sigma, \quad j = 3, 4. \quad (37)
\end{aligned}$$

Продиференціювавши (35), (36) за змінними  $y_1, y_2$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
v_{y_1 y_1}(y_1, y_2, t) &= \tilde{v}_{0y_1 y_1}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_1 y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) (\eta_1 p_1(\tau) \times \\
& \times v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 q_1(\tau) v_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c_1(\tau) \times \\
& \times v(\eta_1, \eta_2, \tau)) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y_2 y_2}(y_1, y_2, t) &= \tilde{v}_{0y_2 y_2}(y_1, y_2, t) + \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_{22y_2 y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) (\eta_1 p_1(\tau) \times \\
& \times v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 q_1(\tau) v_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + c_1(\tau) \times \\
& \times v(\eta_1, \eta_2, \tau)) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T. \quad (39)
\end{aligned}$$

Підставивши (38), (39) в (32)–(34) і використавши (37), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду (31)–(36) відносно невідомих  $(v(y_1, y_2, t), c(t), p(t), q(t), v_{y_1}(y_1, y_2, t),$

$v_{y_2}(y_1, y_2, t))$  з ядрами, що мають інтегровні особливості. З властивостей розв'язків таких систем випливає, що система має тільки тривіальний розв'язок.

Отже,  $l_1(t) = l_2(t)$ ,  $h_1(t) = h_2(t)$ ,  $c_1(t) = c_2(t)$ ,  $v_1(y_1, y_2, t) = v_2(y_1, y_2, t)$ ,  $(y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_{t_1}$ .

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cannon J.R., Lin Y., Wang S. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**, № 2. – Р. 149–163.

2. Мамаюсупов О.Ш. Об определении коэффициента параболического уравнения // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям (Фрунзе). – 1989. – Вып. 22. – С. 157–160.

3. Иванчов Н.И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.

4. Koval'chuk S.M. Determination of the coefficient of thermal conductivity and heat capacity per unit volume in a multilayer medium // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, № 2. – Р. 2042–2047.

5. Пабири́вська Н.В. Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. – **43**, № 1. – С. 51–58.

6. Саватеев Е.Г. Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа // Докл. РАН. – 1994. – **334**, № 5. – С. 562–563.

7. Иванчов М.И. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

8. Баранська І. Визначення старшого коефіцієнта у параболическому рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вып. 64. – С. 20–38.

9. Баранська І.Є. Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболического рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 17–28.

10. Баранська І.Є., Иванчов М.И. Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457–484.

11. Ладженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

12. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)