УДК 517.956.2

©2015 р. О.В. Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У НАПІВЛІНІЙНІЙ ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглядається початково-крайова задача для системи $n+m$ сингулярно збурених напівлінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку на площині. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку системи за степенями малого параметра.

An initial-boundary value problem for a system of $n+m$ singularly perturbed semilinear partial differential equations of the first order in the plane is considered. We construct and justify an asymptotic expansion of an arbitrary order solution with the powers of a small parameter.

Вступ. Мішані задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку є достатньо вивченими [1]-[5] і мають важливі застосування [4].

Новий клас задач, що вивчаються у фізиці твердого тіла запропоновано в роботі [4]. Особливість цих задач полягає в тому, що характеристики гіперболічної системи є як похилі, так і горизонтальні або вертикальні. З погляду фізики це означає, що частина збурень у середовищі поширюється зі скінченою швидкістю, а частина – з необмеженою. Такі системи рівнянь можуть безпосередньо виникати як математичне трактування фізичних процесів, а також як проміжні рівняння, отримані під час аналізу інших, наприклад, багатовимірних [4].

Перехід від похилих характеристик до горизонтальних або вертикальних і навпаки характеризується ефектом примежового шару [5].

У цій праці запропоновано задачу з малим параметром для гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку. У виродженому випадку задачі ($\varepsilon = 0$) одержуємо задачу з горизонтальними та вертикальними до осей координат характеристиками [4], [8].

При розв'язувані сформульованої задачі використано підхід, запропонований в [6].

Постановка задачі. В області $\Pi = \{(x,t):\ 0 < x, t < \infty\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи $n+m$ рівнянь В області $\Pi = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t,u,v;\varepsilon), i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial v_s}{\partial x} = G_s(x,t,u,v;\varepsilon), s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u_i(x,0;\varepsilon) = u_i(0,t;\varepsilon) = 0, \quad & i = \overline{1,n}, \\ v_s(x,0;\varepsilon) = v_s(0,t;\varepsilon) = 0, \quad & s = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{2}$$

За певних, наведених нижче, умов гладкості на вихідні дані та умов погодження в точці $(0,0)$ для розв'язку задачі (1)–(2) побудуємо гладку асимптотику довільного порядку.

Розглядаємо класичний розв'язок задачі (1)–(2), тобто розв'язок, який неперервний в замиканні області $\overline{\Pi}$ і має неперервні похідні першого порядку, що задовольняють систему (1), а також крайові умови (2). Вимагатимемо також, щоб крайові умови (2) для u_i $(i = \overline{1,n})$, v_s $(s = \overline{1,m})$ погоджувались до неперервності в кутовій точці (0,0), а також задовольняли систему (1) у цій точці, що приводить для всіх $\varepsilon > 0$ до виконання умов:

$$(H_1)\quad \begin{aligned} &F_i(0,0,0,0;\varepsilon)=0, \quad i=\overline{1,n},\\ &G_s(0,0,0,0;\varepsilon)=0, \quad s=\overline{1,m}; \end{aligned}$$

(H_2) Функції F_i і $G_s : \overline{\Pi}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, є $N+2$ рази диференційовні в $\overline{\Pi}$ за всіма змінними, N- довільне натуральне число.

Особливість розв'язку задачі (1)–(2) і його асимптотики полягає в тому, що він має примежовий характер в околі відрізків $\{0 \leqslant x \leqslant l, t=0\}$ і $\{x=0, 0\leqslant t\leqslant T\}$, оскільки при $\varepsilon = 0$ в перших n рівняннях залишається лише похідна $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, а в решти m рівняннях $\dfrac{\partial v}{\partial t}$. Тому для виродженої системи(при $\varepsilon=0$) із $2(n+m)$ крайових умов залишаються тільки $n+m$, а саме:

$$\begin{aligned} &u_i(0,t;0)=0, \quad i=\overline{1,n};\\ &v_s(x,0;0)=0, \quad s=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Інші $n+m$ крайових умов

$$\begin{aligned} &u_i(x,0;0)=0, \quad i=\overline{1,n},\\ &v_s(0,t;0)=0, \quad s=\overline{1,m} \end{aligned}$$

не задовольняють вироджену систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t,u,v;0), & i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = G_s(x,t,u,v;0), & s=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Задача характерна тим, що хоча примежові функції визначаються як розв'язок рівнянь з частинними похідними першого порядку, а межа, на якій задано крайові умови, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, можна побудувати без будь-яких інших умов погодження, крім (H_1), асимптотику розв'язку довільного порядку N, рівномірну в $\overline{\Pi}$.

Підкреслимо, що нелінійність правих частин в системі (1) значно ускладнює обгрунтування асимптотики порівняно з лінійним випадком [7].

Побудова нульового наближення. Аналогічно до системи лінійних рівнянь [7] асимптотику розв'язку задачі (1)–(2) шукаємо у вигляді суми функцій регулярної частини та двох примежових шарів

$$\begin{cases} u_i(x,t;\varepsilon) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h[\bar{u}_{ih}(x,t)+\\ \quad +P^u_{ih}(x,\tau)+Q^u_{ih}(\xi,t)], \ i=\overline{1,n},\\ v_s(x,t;\varepsilon) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h[\bar{v}_{sh}(x,t)+\\ \quad +P^v_{sh}(x,\tau)+Q^v_{sh}(\xi,t)], \ s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{4}$$

Підставимо (4) в систему (1) та крайові умови (2). Для всіх $i=\overline{1,n}$ та $s=\overline{1,m}$ уведемо позначення

$$\begin{aligned} &\overline{u}(x,t;\varepsilon) = (\overline{u}_1(x,t;\varepsilon),\\ &\qquad \overline{u}_2(x,t;\varepsilon),\ldots,\overline{u}_n(x,t;\varepsilon)),\\ &\overline{v}(x,t;\varepsilon) = (\overline{v}_1(x,t;\varepsilon),\\ &\qquad \overline{v}_2(x,t;\varepsilon),\ldots,\overline{v}_m(x,t;\varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i &= \overline{F}_i + PF_i + QF_i,\\ G_s &= \overline{G}_s + PG_s + QG_s, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \overline{F}_i &= F_i(\overline{u},\overline{v},x,t;\varepsilon) =\\ &= F_{i0} + \varepsilon\overline{F}_{i1} + \ldots + \varepsilon^r\overline{F}_{ir} + \ldots,\\ PF_i &= F_i(\overline{u}(x,\varepsilon\tau) + P^u(x,\tau), \overline{v}(x,\varepsilon\tau)+\\ &+ P^v(x,\tau), x, \varepsilon\tau;\varepsilon) -\\ &- F_i(\overline{u}(x,\varepsilon\tau),\overline{v}(x,\varepsilon\tau),x,\varepsilon\tau;\varepsilon) =\\ &= PF_{i0} + \varepsilon PF_{i1} + \ldots + \varepsilon^r PF_{ir} + \ldots,\\ QF_i &= F_i(\overline{u}(\varepsilon\xi,t) + Q^u(\xi,t), \overline{v}(\varepsilon\xi,t)+\\ &+ Q^v(\xi,t), \varepsilon\xi, t;\varepsilon) -\\ &- F_i(\overline{u}(\varepsilon\xi,t),\overline{v}(\varepsilon\xi,t),\varepsilon\xi,t;\varepsilon) =\\ &= QF_{i0} + \varepsilon QF_{i1} + \ldots + \varepsilon^r QF_{ir} + \ldots. \end{aligned}$$

Аналогічно можна записати функції $\overline{G}_s, PG_s, QG_s$.

Задачі для коефіцієнтів асимптотичного розкладу (4) отримаємо стандартним способом [5].

Переходимо до побудови головних членів

асимптотики. Для всіх $(x,t)\in\Pi$ регулярну частину асимптотики будуємо у вигляді:

$$u_i(x,t)\sim\bar{u}_{i0}(x,t),\ \ v_s(x,t)\sim\bar{v}_{s0}(x,t), \qquad (5)$$

для якої, позначивши

$$\overline{u}_0(x,t)=(\overline{u}_{10}(x,t),\overline{u}_{20}(x,t),\ldots,\overline{u}_{m0}(x,t)),$$

$$\overline{v}_0(x,t)=(\overline{v}_{10}(x,t),\overline{v}_{20}(x,t),\ldots,\overline{v}_{n0}(x,t)),$$

одержимо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}_{i0}}{\partial x}=\overline{F}_{i0}\equiv\\ \qquad\equiv F_{i0}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0),\\ \qquad\qquad i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial\bar{v}_{s0}}{\partial t}=\overline{G}_{s0}\equiv\\ \qquad\equiv G_{s0}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0),\\ \qquad\qquad s=\overline{1,m},\\ \bar{u}_{i0}(0,t)=0,\quad i=\overline{1,n},\\ \bar{v}_{s0}(x,0)=0,\quad s=\overline{1,m}.\end{cases} \qquad (6)$$

Задача (6), за вказаних вище припущень, має єдиний класичний розв'язок $\bar{u}_{i0},\bar{v}_{s0}$ у всій області Π [8].

З формулювання задачі для визначення $\bar{u}_{i0},\bar{v}_{s0}$, які є наближенням розв'язку задачі (1)–(2), очевидно, що не всі умови виконуються.

Підправимо (5) функцією примежового шару так, щоб виконувалась перша умова (2)

$$\begin{cases}u_i(x,t)\sim u_{i0}(x,t),i=\overline{1,n},\\ v_s(x,t)\sim v_{s0}(x,t)+Q^v_{s0}(\xi,t),s=\overline{1,m}.\end{cases} \qquad (7)$$

з регуляризуючою змінною

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon}.$$

Розвинемо праві частини системи (1) в ряд за степенями ε і підставимо (7) у систему (1) та крайові умови (2), прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε. Таким чином, одержимо задачу для визначення Q^v_{s0}:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q^v_{s0}}{\partial t}+\dfrac{\partial Q^v_{s0}}{\partial\xi}=QG_{s0}\equiv\\ \qquad\equiv G_s(\bar{u}_0(0,t),\bar{v}_0(0,t)+\\ \qquad+Q^v_0(\xi,t),0,t;0)-\\ \qquad-G_s(\bar{u}_0(0,t),\bar{v}_0(0,t),0,t;0),\\ \qquad(\xi,t)\in D_\xi=\{\xi\geqslant0,0\leqslant t\leqslant T\},\\ Q^v_{s0}(\xi,0)=0,\\ Q^v_{s0}(0,t)=-\bar{v}_{s0}(0,t),\qquad s=\overline{1,m},\end{cases} \qquad (8)$$

де

$$Q^v_0(x,t)=(Q^v_{10}(x,t),Q^v_{20}(x,t),\ldots,Q^v_{m0}(x,t)).$$

У підобласті $D_\infty=\{\xi\geqslant t,0\leqslant t\leqslant T\}$ розв'язок $Q^v_{s0}(\xi,t)$ визначається крайовою умовою $Q^v_{s0}(\xi,0)=0$ і тому в цій підобласті функція $Q^v_{s0}(\xi,t)=0$. А в підобласті $D_0=\{0\leqslant\xi\leqslant t\leqslant T\}$ розв'язок $Q^v_{s0}(\xi,t)$ визначається крайовою умовою $Q^v_{s0}(0,t)=-\bar{v}_{s0}(0,t)$ [8].

Отже, для визначення функцій примежового шару Q^v_{s0} отримано крайові задачі у горизонтальній півсмузі для системи гіперболічних рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язків задач (8) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження розв'язків Q^v_{s0} у кутовій точці $(0,0)$ нульового та першого порядків. Для нього повинні виконуватись наступні рівності

$$Q^v_{s0}(\xi,0)|_{\xi=0}=Q^v_{s0}(0,t)|_{t=0},\quad s=\overline{1,m}.$$

Очевидним є те, що ліва частина рівності дорівнює нулеві в кутовій точці, а використавши початкову умову (6), одержимо

$$0=-\bar{v}_{s0}(0,t)|_{t=0}=0,\qquad s=\overline{1,m}.$$

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку. Для цього повинна виконуватись рівність

$$\frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial t}|_{(0,0)}+\frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial\xi}|_{(0,0)}=$$
$$=G_s(\bar{u}_0(0,t),\bar{v}_0(0,t)+Q^v_0(\xi,t),0,t;0)|_{(0,0)}-$$
$$-G_s(\bar{u}_0(0,t),\bar{v}_0(0,t),0,t;0)|_{(0,0)}.$$

Використавши умову (8), залишилось показати, що $\dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t} = 0$. З умов (6) одержимо $\dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}|_{(0,0)} = G_{s0}(0,0,0,0;0)$, а права частина рівності рівна нулеві, що випливає з умови (H_1).

Функція Q^v_{s0} має примежовий характер. Дійсно, на підставі однорідності крайової умови (8), функція Q^v_{s0} під характеристикою $\xi = x$ рівняння (8) приймає нульові значення. При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функція Q^v_{s0} відмінна від нуля вздовж межі $x = 0$ області П.

Завершимо побудову нульового наближення розв'язку задачі (1)–(2) знаходженням примежового шару в оточенні межі $t = 0$ області П. За допомогою цієї функції скоригуємо розв'язок u_{i0}, v_{s0} так, щоб виконувалась крайова умова при $t = 0$, а тому u_{i0}, v_{s0} матимуть вигляд

$$\begin{cases} u_i(x,t) \sim u_{i0}(x,t) + P^u_{i0}(x,\tau), i = \overline{1,n} \\ v_s(x,t) \sim v_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t), s = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (9)$$

Уведемо тепер ще одну регуляризуючу змінну
$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$
підставивши (9) у систему (1) і прирівнявши коефіцієнти при найнижчих степенях ε, одержимо задачу для P^u_{i0}

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P^u_{i0}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P^u_{i0}}{\partial x} = PF_{i0} \equiv \\ \quad \equiv F_i(\bar{u}_0(x,0) + P^u_0(x,\tau), \\ \qquad \bar{v}_0(x,0), x, 0, 0) - \\ \quad - F_i(\bar{u}_0(x,0), \bar{v}_0(x,0), x, 0, 0), \\ \quad (x,t) \in S_\tau = \{\tau \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant l\}, \\ P^u_{i0}(0,\tau) = 0, \\ P^u_{i0}(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (10)$$

Очевидно, що $P^u_{i0} \equiv 0$ в підобласті $S_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant l, \tau \geqslant x\}$, а для іншої підобласті $S_0 = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau \leqslant x\}$ рівняння (10) з крайовою умовою $P^u_{i0}(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0),\ i = \overline{1,n}$ має єдиний розв'язок [8].

Для продовження побудови асимптотики нульового порядку розв'язку задачі (1)–(2) потрібно зберігати достатню гладкість наближень, що досягається виконанням умов погодження нульового і першого порядків для задачі (10) і доводиться аналогічно як і в задачі для Q^v_{s0}.

Побудова наближення першого порядку. Асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку (u,v) задачі (1)–(2) для всіх $i = \overline{1,n}$ та $s = \overline{1,m}$ будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P^u_{i0}(x,\tau) + \\ \quad + \bar{u}_{i1}(x,t) + P^u_{i1}(x,\tau) + Q^u_{i1}(\xi,t), \\ v_s(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t) + \\ \quad + \bar{v}_{s1}(x,t) + P^v_{s1}(x,\tau) + Q^v_{s1}(\xi,t). \end{cases} \quad (11)$$

Підставляємо (11) в систему (1)–(2). Тоді задачі для Q^u_{i1} матимуть вигляд

$$\frac{\partial Q^u_{i1}}{\partial \xi} = QF_{i0} \equiv$$
$$\equiv F_i\left(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t) + Q^v_0(\xi,t), 0, t; 0\right) -$$
$$- F_i\left(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t), 0, t; 0\right), (\xi,t) \in D_\xi,$$
$$Q^u_{i1}(\infty,t) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Проінтегруємо рівняння для $Q^u_{i1}, i = \overline{1,n}$, враховуючи умови $Q^v_{s0}(\xi,t) = 0$, $s = \overline{1,m}$, $\xi \geqslant t$, тоді одержимо розв'язок

$$Q^u_{i1}(\xi,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\xi QF_{i0}(Q^v_0(\varsigma,t),t)d\varsigma, \\ \qquad (\xi,t) \in D_0, \quad i = \overline{1,n}, \\ 0, \ (\xi,t) \in D_\infty. \end{cases} \quad (12)$$

Аналогічно для $P^v_{s1}, s = \overline{1,m}$, використавши, що $P^u_{i0}(x,\tau) = 0,\ i = \overline{1,n},\ \ \tau \geqslant x$, одержимо

$$P^v_{s1}(x,\tau) = \begin{cases} \int\limits_x^\tau PG_{s0}(P^u_0(x,s),x)ds, \\ \qquad (x,\tau) \in S_0, \quad s = \overline{1,m}, \\ 0, (x,\tau) \in S_\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Запишемо рівняння для знаходження регулярних членів першого наближення $\bar{u}_{i1}$ *і* $\bar{v}_{s1}$, шукаючи відповідні частинні похідні у точці $(\bar{u}_0(x,t), \bar{v}_0(x,t), x, t; 0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} F_{iu} \cdot \bar{u}_{j1}(x,t) + \\ \qquad + \sum\limits_{l=1}^{m} F_{iv} \cdot \bar{v}_{l1}(x,t) + \\ \qquad + \bar{f}_{i1}(x,t), \;\; i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} G_{su} \cdot \bar{u}_{j1}(x,t) + \\ \qquad + \sum\limits_{l=1}^{m} G_{sv} \cdot \bar{v}_{l1}(x,t) + \\ \qquad + \bar{g}_{s1}(x,t), \;\; s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{14}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t) = F_{i\varepsilon}\ (\bar{u}_0(x,t), \bar{v}_0(x,t), x, t; 0) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial t}$, $(i = \overline{1,n})$; $\bar{g}_{s1}(x,t) =$ $= G_{s\varepsilon}(\bar{u}_0(x,t), \bar{v}_0(x,t), x, t; 0) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial x}$, $(s = \overline{1,m})$, а знайдені функції Q^u_{i1} і P^v_{s1} дозволяють задати крайові умови

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1}(0,t) = -Q^u_{i1}(0,t), & i = \overline{1,n}, \\ \bar{v}_{s1}(x,0) = -P^v_{s1}(x,0), & s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{15}$$

Задачу (14)–(15), аналогічно як і задачу (6), можемо розв'язати, звівши до системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду.

Для Q^v_{s1} $(s = \overline{1,m})$ одержимо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q^v_{s1}}{\partial t} + \dfrac{\partial Q^v_{s1}}{\partial \xi} = Q_{s1} G \equiv \\ \qquad \equiv \sum\limits_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t) Q^v_{l1} + q_{s1}(\xi,t), \\ \qquad\qquad (\xi,t) \in D_\xi, \\ Q^v_{s1}(\xi,0) = 0, \\ Q^v_{s1}(0,t) = -\bar{v}_{s1}(0,t), \quad s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{16}$$

де

$$\begin{aligned} q_{s1}(\xi,t) &= G_{su}(\xi,t) \times \\ &\times \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{u}_{j1}(0,t) + Q^u_{j1}(\xi,t) \Big) + \\ &+ G_{sv}(\xi,t) \cdot \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{v}_{l1}(0,t) \right) + \\ &+ G_{sx}(\xi,t)\xi + G_{s\varepsilon}(\xi,t) - \\ &- \bar{G}_{su}(0,t) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{u}_{j1}(0,t) \right) - \\ &- \bar{G}_{sv}(0,t) \cdot \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{v}_{l1}(0,t) \right) - \\ &- \bar{G}_{sx}(0,t)\xi - \bar{G}_{s\varepsilon}(0,t). \end{aligned}$$

Зауважимо, що похідні $G_{su}\ (\xi,t)$, $G_{sv}\ (\xi,t)$, $G_{sx}(\xi,t)$, $G_{s\varepsilon}\ (\xi,t)$ обчислюються в точці $(\bar{u}_0(0,t),\ \bar{v}_0(0,t) + Q^v_0(\xi,t), 0, t; 0)$, а похідні $\bar{G}_{su}(0,t)$, $\bar{G}_{sv}(0,t)$, $\bar{G}_{sx}(0,t)$, $\bar{G}_{s\varepsilon}(0,t)$ — в точці $(\bar{u}_0(0,t),\ \bar{v}_0(0,t), 0, t; 0)$.

Оскільки система (16) не є однорідною, то для існування класичного розв'язку одержаної задачі потрібно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків в кутовій точці (0,0), але і відповідна гладкість функції $q_{s1}(\xi,t)$, тобто існування її неперервних похідних першого порядку. Але частинні похідні існують, на підставі умови (H_2) і гладкості функцій Q^v_{s0}, Q^u_{i1} в усій області D_ξ.

Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, $Q^v_{s1}(\xi,0)|_{\xi=0}=$ $Q^v_{s1}(0,t)|_{t=0}$. Рівність нулеві лівої частини випливає з однорідної крайової умови (16), а рівність нулеві правої частини покажемо, використавши умови (15),(10) послідовно, тобто

$$0 = -\bar{v}_{s1}(0,t)|_{t=0} = -P^v_{s1}(x,0)|_{x=0} = 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

Тому крайові умови системи (16) погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0).

Щоб крайові умови задовольняли систему рівнянь в точці (0,0) повинна виконуватись рівність

$$\frac{\partial Q^v_{s1}}{\partial t}|_{(0,0)} + \frac{\partial Q^v_{s1}}{\partial \xi}|_{(0,0)} = \\ = \sum_{l=1}^{m} G_{sv} \cdot Q^v_{l1}|_{(0,0)} + q_{s1}|_{(0,0)}, \quad s = \overline{1,m}.$$

Використавши умови (8), (12),(16), прийдемо до рівності

$$0 - \frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}|_{(0,0)} = \sum_{l=1}^{m} G_{sv} \cdot 0 + 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

Залишилося показати, що похідна $\bar{v}_{s1}$ за t рівна нулеві. З умови (14) маємо

$$\frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} G_{su} \cdot \bar{u}_{j1}|_{(0,0)} + \\ + \sum_{l=1}^{m} G_{sv} \cdot \bar{v}_{l1}|_{(0,0)} + \bar{g}_{s1}|_{(0,0)} = 0, \quad s = \overline{1,m},$$

а використавши умови (H_1) і (3), одержимо $\bar{g}_{s1}(0,0) = G_{s\varepsilon}(0,0) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial x} = 0$. Те, що $v_{s1}|_{(0,0)} = -P^v_{s1}(0,0) = 0$, одержано з умов (15) та (13). Оскільки виконуються (15) та (12), то $u_{i1}|_{(0,0)} = -Q^u_{i1}(0,0) = 0$. Отже, всі умови для існування класичного розв'язку задачі (16) виконуються.

Для P^u_{i1} $(i = \overline{1,n})$ задача матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P^u_{i1}}{\partial t} + \dfrac{\partial P^u_{i1}}{\partial \xi} = P_{i1}F \equiv \\ \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} F_{iu}(x,\tau) P^u_{j1} + p_{i1}(x,\tau), \\ (x,\tau) \in S_\tau, \\ P^u_{i1}(0,\tau) = 0, \\ P^u_{i1}(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), \\ \qquad\qquad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{17}$$

де для всіх $i = \overline{1,n}$

$$p_{i1}(x,\tau) = F_{iv}(x,\tau) \times \\ \times \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial t}(x,0)\tau + \bar{v}_{l1}(x,0) + P^v_{l1}(x,\tau) \right) + \\ + F_{iu}(x,\tau) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\partial t}(x,0)\tau + \bar{u}_{j1}(x,0) \right) + \\ + F_{it}(x,\tau)\tau + F_{i\varepsilon}(x,\tau) - \\ - \bar{F}_{iv}(x,0) \cdot \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial t}(x,0)\tau + \bar{v}_{l1}(x,0) \right) - \\ - \bar{F}_{iu}(x,0) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\partial t}(x,0)\tau + \bar{u}_{j1}(x,0) \right) - \\ - \bar{F}_{it}(x,0)\tau - \bar{F}_{i\varepsilon}(x,0).$$

Зауважимо, що похідні $F_{iv}(x,\tau)$, $F_{iu}(x,\tau)$, $F_{it}(x,\tau)$, $F_{i\varepsilon}(x,\tau)$ обчислюються в точці $(\bar{u}_0(x,0) + P^u_0(x,\tau),\ \bar{v}_0(x,0), x, 0; 0)$, а похідні $\bar{F}_{iu}(x,0)$, $\bar{F}_{iv}(x,0)$, $\bar{F}_{it}(x,0)$, $\bar{F}_{i\varepsilon}(x,0)$ — в точці $(\bar{u}_0(x,0),\ \bar{v}_0(x,0), x, 0; 0)$. А також $P^u_{i1} \equiv 0$ в підобласті S_∞. Як і в задачі (16) можна провести аналогічні міркування і довести існування класичного розв'язку задачі (17) для функції P^u_{i1}.

Отже, побудовано всі члени асимптотики першого наближення, які є гладкими функціями своїх аргументів.

Побудова асимптотики довільного порядку. Повне асимптотичне розвинення розв'язку (u_i, v_s) задачі (1)–(2) будуємо у вигляді (4). Опишемо алгоритм визначення функцій асимптотичного наближення довільного порядку $h > 1$. Допоміжні задачі отримуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень [5], аналогічно вищенаведеному, тому пропустимо опис способу їх отримання.

Спочатку визначаємо функції $Q^u_{ih} = (Q^u_{1h}, \ldots, Q^u_{nh})$ як розв'язки задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q^u_{ih}}{\partial \xi} = q^u_{ih}(\xi,t), \xi > 0,\ 0 < t \leqslant T, \\ Q^u_{ih}(\infty,t) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{18}$$

де $q^u_{ih}(\xi,t)=QF_{i,h-1}-\dfrac{\partial Q^u_{i\,h-2}}{\partial t}, i=\overline{1,n},$

а ξ – вище задане регуляризуюче перетворення. Функції $q^u_{ih}(\xi,t)$ $(i=\overline{1,n})$ є відомими неперервними і рівні нулеві під характеристикою $\xi=t$, що випливає з їх структури. Тому розв'язок Q^u_{ih} задач (18) для кожного $i=\overline{1,n}$ запишемо у явному вигляді

$$Q^u_{ih}(\xi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_t^{\xi} q^u_{ih}(\zeta,t)d\zeta,\\ \qquad (\xi,t)\in D_0,\ i=\overline{1,n},\\ 0,\ \ (\xi,t)\in D_\infty.\end{cases} \tag{19}$$

Задача для P^v_{sh} із умовами $P^v_{sh}(x,\infty)=0$, $s=\overline{1,m}$ записується у явному вигляді

$$P^v_{sh}(x,\tau)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_x^{\tau} p^v_{sh}(x,\vartheta)d\vartheta,\\ \qquad (x,\tau)\in S_0, s=\overline{1,m},\\ 0,\ (x,\tau)\in S_\infty,\end{cases} \tag{20}$$

де $p^v_{sh}(x,\tau)=PG_{s,h-1}-\dfrac{\partial P^v_{s\,h-2}}{\partial x},\ s=\overline{1,m}.$ Тут p^v_{sh} $(s=\overline{1,m})$ – відомі неперервні функції, рівні нулеві над характеристикою $\tau=x$.

Зазначимо, що гладкість функцій Q^u_{ih} і P^v_{sh} $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, зокрема і на характеристиках $\xi=t$ та $x=\tau$, відповідно, випливає безпосередньо із їх структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar{u}_h,\bar{v}_h)$ для всіх $(x,t)\in\overline{\Pi}$ є розв'язками такої задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{u}_{ih}}{\partial x}= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F_{iu}(x,t)\bar{u}_{jh}+\\ \qquad +\displaystyle\sum_{l=1}^{m} F_{iv}(x,t)\bar{v}_{lh}+\\ \qquad\qquad +\bar{f}_{ih}(x,t), i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial \bar{v}_{sh}}{\partial t}= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} G_{su}(x,t)\bar{u}_{jh}+\\ \qquad +\displaystyle\sum_{l=1}^{m} G_{sv}(x,t)\bar{v}_{lh}+\\ \qquad\qquad +\bar{g}_{sh}(x,t), s=\overline{1,m},\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\bar{u}_{ih}(0,t)=-Q^u_{ih}(0,t), \quad i=\overline{1,n},\\ \bar{v}_{sh}(x,0)=-P^v_{sh}(x,0), \quad s=\overline{1,m},\end{cases} \tag{22}$$

де $\bar{f}_{ih}(x,t),\ \bar{g}_{sh}(x,t)$ — відомі функції, що рекурентно виражаються через $\bar{u}_{i\bar{h}},\ \bar{v}_{s\bar{h}}$ $(\bar{h}<h)$.

Задача (21)–(22), аналогічно до задачі (14)–(15), розв'язується методом зведення до системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду [8].

Для Q^v_{sh} маємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q^v_{sh}}{\partial t}+\dfrac{\partial Q^v_{sh}}{\partial \xi}=QG_{sh}\equiv\\ \qquad \equiv\displaystyle\sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t)Q^v_{lh}+q^v_{sh},\\ \qquad\qquad (\xi,t)\in D_\xi, s=\overline{1,m},\\ Q^v_{sh}(\xi,0)=0, (\xi,t)\in D_\infty,\\ Q^v_{sh}(0,t)=-\bar{v}_{sh}(0,t),\\ \qquad\qquad (\xi,t)\in D_0,\ \ s=\overline{1,m},\end{cases} \tag{23}$$

де $q^v_{sh}(\xi,t)$ – відома гладка функція в D_ξ, що рекурентно виражається через $Q^u_{i\bar{h}},Q^v_{s\bar{h}}(\bar{h}<h)$ і $q^v_{sh}(\xi,t)=0$ в підобласті D_∞.

Аналогічно, як у задачі (16), для доведення існування класичного розв'язку задачі (23) потрібно, щоб функція $q^v_{sh}(\xi,t)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0). Частинні похідні функцій $q^v_{sh}(\xi,t)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій.

Перейдемо до перевірки виконання умов погодження, які випливають із (20) та (22):

$$0 = Q^v_{sh}(\xi,0)\Big|_{\xi=0} =$$
$$= Q^v_{sh}(0,t)\Big|_{t=0} = -v_{sh}(0,t)\Big|_{t=0},$$
$$0 = -v_{sh}(0,0) = P^v_{sh}(0,0) = 0, \quad s=\overline{1,m}.$$

Отже, крайові умови погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0). Перевіримо, чи початкові умови задовольняють систему (23) в точці (0,0), тобто

$$\frac{\partial Q^v_{sh}}{\partial t}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial Q^v_{sh}}{\partial \xi}\Big|_{(0,0)} =$$
$$= \sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t)Q^v_{lh}\Big|_{(0,0)} + q^v_{sh}\Big|_{(0,0)}, \ s=\overline{1,m},$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (23), останнє можна записати у вигляді

$$-\frac{\partial \bar v_{sh}(0,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\cdot G_{sv}(0,0) + q^v_{sh}(0,0),$$
$$s=\overline{1,m}.$$

Права частина цього співвідношення рівна нулеві, оскільки $q^v_{sh}(\xi,t)=0$ $(s=\overline{1,m})$ при $\xi \geqslant t \geqslant 0$, що випливає із їхніх властивостей. Використавши друге рівняння (21) та умови (22), маємо

$$\frac{\partial \bar v_{sh}(0,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\sum_{j=1}^{n} G_{su}(0,0)Q^u_{jh}(0,t)\Big|_{t=0} -$$
$$-\sum_{l=1}^{m} G_{sv}(0,0)P^v_{lh}(x,0)\Big|_{x=0} +$$
$$+\bar g_{sh}(0,0), \ s=\overline{1,m}, \ (x,t)\in \Pi.$$

На підставі (19) та (20) перші два доданки справа останнього виразу рівні нулеві. Залишилось показати, що $\bar g_{sh}(x,t)$ в кутовій точці рівна нулеві. Функція $\bar g_{sh}$ в точці $(0,0)$ рівна нулеві із-за виконання умов $u_{i\bar h}(0,0) = v_{s\bar h}(0,0) = 0$ $(\bar h < h)$ і $\dfrac{\partial^h G_s}{\partial \varepsilon^h}(0,0,0,0;0)=0$. А з крайової умови для функції $\bar v_{s,h-1}(0,0)$ матимемо $\dfrac{\partial \bar v_{s,h-1}(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial P_{s,h-1}(0,0)}{\partial x} = 0$, $s=\overline{1,m}$. Остання рівність справедлива тому, що $P^v_{s,h-1}(x,\tau)=0$ для $\tau \geqslant x$, отже $\dfrac{\partial P^v_{s,h-1}}{\partial x}(x,\tau)=0$, якщо $\tau\geqslant x$ $(s=\overline{1,m})$. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (23) в області $\xi>0$, $0<t\leqslant T$. Крім того, відзначимо, що функції Q^v_{sh} $(s=\overline{1,m})$ мають примежовий характер, тобто відмінні від нуля в околі межі $x=0$ області $\overline{\Pi}$ і при $\varepsilon\to 0$ характеристика $t=\xi$ рівняння (23) прямує до вертикального положення.

Для визначення наближень функцій примежових шарів P^u_{ih} в околі межі $t=0$ області Π одержимо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P^u_{ih}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P^u_{ih}}{\partial x} = PF_{ih} \equiv \\ \qquad \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} F_{iu}(x,\tau)P^u_{jh} + p^u_{ih}, \\ \qquad\qquad (x,\tau)\in S_\tau, \\ P^u_{ih}(0,\tau)=0, \ (x,\tau)\in S_0, \\ P^u_{ih}(x,0) = -\bar u_{ih}(x,0), \\ \qquad (x,\tau)\in S_\infty, i=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{24}$$

де $p^u_{ih}(x,\tau)$ – відома гладка функція в S_τ, що рекурентно виражена через $P^u_{i\bar h}, P^v_{s\bar h}(\bar h<h)$. Зазначимо, що $p^u_{ih}(x,\tau)=0$ в підобласті S_∞.

Доведення існування класичного розв'язку P^u_{ih} для кожного $i=\overline{1,n}$ та $h>1$ задачі (24) проводиться аналогічно як для задачі (23). Функції P^u_{ih} $(i=\overline{1,n})$ відмінні від тотожного нуля нижче характеристики $\tau=x$ рівняння (24), яка при $\varepsilon\to 0$ прямує до горизонтального положення. Це свідчить про примежовий характер поведінки P^u_{ih}.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку (u_i, v_s) задачі (1)–(2) побудовано. Перейдемо до обгрунтування отриманої асимптотики.

Оцінка залишкового члена. Нехай $N>0$ – довільне натуральне число. Виділимо в асимптотиці (4) розв'язку (u_i, v_s) задачі (1)-(2) частинні суми порядку N і позначимо їх, врахувавши, що $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$,

$$\begin{cases} U_i^N(x,t,\varepsilon) & =\sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h[\bar{u}_{ih}(x,t)+ \\ & +P_{ih}^u(x,\tau)+ \\ & +Q_{ih}^u(\xi,t)],\ i=\overline{1,n}, \\ V_s^N(x,t,\varepsilon) & =\sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h[\bar{v}_{sh}(x,t)+ \\ & +P_{sh}^v(x,\tau)+ \\ & +Q_{sh}^v(\xi,t)],\ s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{25}$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* (H_1)-(H_2), *то для достатньо малих* $\varepsilon>0$ *задача* (1)-(2) *має єдиний класичний розв'язок* (u_i,v_s), *для якого* $U_i^N(x,t,\varepsilon)$ *та* $V_s^N(x,t,\varepsilon)$ *є рівномірні асимптотичні наближення з точністю* $O(\varepsilon^{N+1})$ *в області* $\overline{\Pi}$, *тобто*

$$\max_{\overline{\Pi}}|u_i-U_i^N|=O(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\max_{\overline{\Pi}}|v_s-V_s^N|=O(\varepsilon^{N+1}).$$

Доведення. Залишкові члени розвинення (4) позначаємо через $R_i^u=u_i^\varepsilon-U_i^{N+1}$ і $R_s^v=v_s^\varepsilon-V_s^{N+1}$, відповідно для них отримаємо задачі подібні до (1)-(2)

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial R_i^u}{\partial t}+\dfrac{\partial R_i^u}{\partial x}=\hat{F}_i(R^u,R^v,x,t;\varepsilon), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial R_s^v}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial R_s^v}{\partial x}=\hat{G}_s(R^u,R^v,x,t;\varepsilon), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} R_i^u(x,0;\varepsilon)=R_i^u(0,t;\varepsilon)=0, i=\overline{1,n}, \\ R_s^v(x,0;\varepsilon)=R_s^v(l,t;\varepsilon)=0, s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{27}$$

де

$$\hat{F}_i=-\varepsilon\frac{\partial U_i^{N+1}}{\partial t}-\frac{\partial U_i^{N+1}}{\partial x}+$$
$$+F_i(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon),$$
$$\hat{G}_s=-\frac{\partial V_s^{N+1}}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial V_s^{N+1}}{\partial x}+$$
$$+G_s(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon).$$
$$R^u=(R_1^u,\dots R_n^u),\ R^v=(R_1^v,\dots R_m^v),$$
$$U^{N+1}=\left(U_1^{N+1},\dots U_n^{N+1}\right),$$
$$V^{N+1}=\left(V_1^{N+1},\dots V_m^{N+1}\right).$$

З того що U^{N+1},V^{N+1} задовольняють рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$, $\hat{F}_i(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$, $\hat{G}_s(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ мають рівномірні оцінки у всій області Π. З того, що $U^{N+1}=V^{N+1}=\dfrac{\partial U^{N+1}}{\partial t}=\dfrac{\partial V^{N+1}}{\partial t}=\dfrac{\partial U^{N+1}}{\partial x}=\dfrac{\partial V^{N+1}}{\partial x}=0$ у кутовій точці $(0,0)$ і виконується умова (H_1), справедливі рівності $\hat{F}_i(0,0,0,0;\varepsilon)=0$, $\hat{G}_s(0,0,0,0;\varepsilon)=0$.

Запишемо (26) у вигляді

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial R_i^u}{\partial t}+\frac{\partial R_i^u}{\partial x}-F_{iu}(M)\sum_{j=1}^{n}R_j^u- \\ &-F_{iv}(M)\sum_{l=1}^{m}R_l^v=\Pi_i^u(R^u,R^v,x,t;\varepsilon), \\ &\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,n}, \\ &\frac{\partial R_s^v}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial R_s^v}{\partial x}-G_{su}(M)\sum_{j=1}^{n}R_j^u- \\ &-G_{sv}(M)\sum_{l=1}^{m}R_l^v=\Pi_s^v(R^u,R^v,x,t;\varepsilon), \\ &\qquad\qquad\qquad s=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{28}$$

де $M-$ точка з координатами $(u_{i0}(x,t)+P_{i0}^u(x,\tau),v_{s0}(x,t)+Q_{s0}^u(\xi,t),0,t;0)$, а функції Π_i^u,Π_s^v мають вигляд

$$\Pi_i^u(R^u,R^v,x,t;\varepsilon)=\hat{F}_i-$$
$$-F_{iu}(M)\sum_{j=1}^{n}R_j^u-F_{iv}(M)\sum_{l=1}^{m}R_l^v,$$

$$\Pi_s^v(R^u,R^v,x,t;\varepsilon)=\hat{G}_s-$$
$$-G_{su}(M)\sum_{j=1}^{n}R_j^u-G_{sv}(M)\sum_{l=1}^{m}R_l^v.$$

Зауважимо, що з властивостей функцій $\hat{F}_i,\hat{G}_s$ отримаємо аналогічні властивості і для $\Pi_i^u,\Pi_s^v(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, тобто функції $\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$, $\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ рівномірні в $\overline{\Pi}$ і $\Pi_i^u(0,0,0,0;\varepsilon)=0$, $\Pi_s^v(0,0,0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$.

Якщо $|\bar{R}_i^u|\leqslant C_1\varepsilon$ $(i=\overline{1,n})$, і $|\bar{R}_s^v|\leqslant C_1\varepsilon$ $(s=\overline{1,m})$, $|\tilde{R}_i^u|\leqslant C_1\varepsilon$ $(i=\overline{1,n})$, і $|\tilde{R}_s^v|\leqslant C_1\varepsilon$ $(s=\overline{1,m})$ де C_1– додатнє число, то існують $C_2>0,\ \varepsilon_0>0$, такі що при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$\left|\Pi_i^u(\bar{R}^u,\bar{R}^v,x,t;\varepsilon)-\Pi_i^u(\tilde{R}^u,\tilde{R}^v,x,t;\varepsilon)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\bar{R}_j^u-\tilde{R}_j^u\right|+\sum_{l=1}^{m}\left|\bar{R}_l^v-\tilde{R}_l^v\right|\right),$$
$$\left|\Pi_s^v(\bar{R}^u,\bar{R}^v,x,t;\varepsilon)-\Pi_s^v(\tilde{R}^u,\tilde{R}^v,x,t;\varepsilon)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\bar{R}_j^u-\tilde{R}_j^u\right|+\sum_{l=1}^{m}\left|\bar{R}_l^v-\tilde{R}_l^v\right|\right).$$

Перейдемо до доведення існування класичного розв'язку задачі
(26) - (27) при достатньо малих ε, причому $R_i^u=O(\varepsilon^{N+1})$ $(i=\overline{1,n})$ та $R_s^v=O(\varepsilon^{N+1})$ $(s=\overline{1,m})$. На підставі рівностей

$$u_i-U_i^N=(u_i-U_i^{N+1})+(U_i^{N+1}-U_i^N)=$$
$$=R_i^u+O(\varepsilon^{N+1}),\ i=\overline{1,n},$$
$$v_s-V_s^N=(v_s-V_s^{N+1})+(V_s^{N+1}-V_s^N)=$$
$$=R_s^v+O(\varepsilon^{N+1}),\ s=\overline{1,m},$$

справедливим є твердження теореми.

Запишемо (28) в операторному вигляді

$$L_i^u[R^u,R^v]=\Pi_i^u(R^u,R^v,x,t;\varepsilon),\ i=\overline{1,n},$$
$$L_s^v[R^u,R^v]=\Pi_s^v(R^u,R^v,x,t;\varepsilon),\ s=\overline{1,m}$$

і застосуємо метод послідовних наближень:

$$\begin{aligned}&R_i^{u(0)}=0,\ R_s^{v(0)}=0\\&L_i^u[R^u,R^v]=\Pi_i^u(R^{u(k-1)},R^{v(k-1)},x,t;\varepsilon),\\&L_s^v[R^u,R^v]=\Pi_s^v(R^{u(k-1)},R^{v(k-1)},x,t;\varepsilon),\\&R_i^{u(k)}|_{t=0}=0,\ R_i^{u(k)}|_{x=0}=0,\ i=\overline{1,n},\\&R_s^{v(k)}|_{t=0}=0,\ R_s^{v(k)}|_{x=0}=0,\ s=\overline{1,m},\\&\qquad k=1,2,\ldots.\end{aligned}\tag{29}$$

З рівностей $\Pi_i^u(0,0,0,0;\varepsilon)=0$, $\Pi_s^v(0,0,0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ для задачі (29) для довільного k виконуються умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,0)$.

З (29) при $k=1$, маємо

$$\begin{aligned}&L_i^u[R^{u(1)},R^{v(1)}]=\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon),\\&L_s^v[R^{u(1)},R^{v(1)}]=\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon),\\&R_i^{u(1)}|_{t=0}=0,\ R_i^{u(1)}|_{x=0}=0,\ i=\overline{1,n},\\&R_s^{v(1)}|_{t=0}=0,\ R_s^{v(1)}|_{x=0}=0,\ s=\overline{1,m},\end{aligned}\tag{30}$$

Праві частини функцій $\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)$ та $\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)$ системи (30) неперервні у всій області $\overline{\Pi}$ і виконуються умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,0)$. Отже, задача (30) має єдиний класичний розв'язок. Те ж саме відноситься до задач (29) для всіх $k>1$.

Для розв'язку задачі (30) справедлива оцінка [5]

$$\begin{aligned}&\max_{\overline{\Pi}}\{|R_i^{u(1)}(x,t;\varepsilon)|,|R_s^{v(1)}(x,t;\varepsilon)|\}\leqslant\\&\leqslant C_3\max_{i,s}\left(\max_{\overline{\Pi}}\{|\Pi_i^u|,|\Pi_s^v|\}\right),\end{aligned}\tag{31}$$

де $\Pi_i^u=\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)$, $\Pi_s^v=\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)$, а C_3– додатновизначена стала, що не залежить від ε. Надалі через $C_4,C_5,\ldots$ будемо позначати сталі, що не залежать від ε.

Використавши те, що $\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$, $\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ рівномірні в $\overline{\Pi}$, з (31) для всіх $(x,t)\in\overline{\Pi}$ справджується

$$\left|R_i^{u(1)}(x,t;\varepsilon)\right| \leqslant C_4\varepsilon^{N+1}, \quad (i=\overline{1,n}),$$
$$\left|R_s^{v(1)}(x,t;\varepsilon)\right| \leqslant C_4\varepsilon^{N+1}, \quad (s=\overline{1,m}). \tag{32}$$

Визначемо нові сталі $C_0 = \max\{C_3, C_4\}$, $C_1 = 2C_0$. Сталій C_1 відповідають деякі C_2 і ε_0 із властивостей функцій Π_i^u та Π_s^v. Виберемо ε_0 достатньо малим, щоб виконувалась нерівність $2C_2C_0\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Покажемо, що для довільного k при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}\max_{\overline{\Pi}}|R_i^{u(k)}| &\leqslant \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\times\\ &\times C_0\varepsilon^{N+1},\ i=\overline{1,n},\\ \max_{\overline{\Pi}}|R_s^{v(k)}| &\leqslant \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\times\\ &\times C_0\varepsilon^{N+1},\ s=\overline{1,m},\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\max_{\overline{\Pi}}\left|z_i^{u(k)}\right| &\equiv \max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(k)}-R_i^{u(k-1)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}}C_0\varepsilon^{N+1},\ i=\overline{1,n},\\ \max_{\overline{\Pi}}\left|z_s^{v(k)}\right| &\equiv \max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(k)}-R_s^{v(k-1)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}}C_0\varepsilon^{N+1}\ i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{34}$$

При $k=1$ виконання цих нерівностей очевидне. З рівняння (29) при $k=2$ для $z_i^{u(2)}$ і $z_s^{v(2)}$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ отримаємо задачі

$$\begin{aligned} L_i^u[z^{u(2)},z^{v(2)}] &= \Pi_i^u(R^{u(1)},R^{v(1)},x,t;\varepsilon)-\\ &- \Pi_i^u(R^{u(0)},R^{v(0)},x,t;\varepsilon),\\ L_s^v[z^{u(2)},z^{v(2)}] &= \Pi_s^v(R^{u(1)},R^{v(1)},x,t;\varepsilon)-\\ &- \Pi_s^v(R^{u(0)},R^{v(0)},x,t;\varepsilon),\\ z_i^{u(2)}|_{t=0}=0,&\ z_i^{u(2)}|_{x=0}=0,\ \ i=\overline{1,n},\\ z_s^{v(2)}|_{t=0}=0,&\ z_s^{v(2)}|_{x=0}=0,\ \ s=\overline{1,m}.\end{aligned} \tag{35}$$

Оскільки $\left|R_i^{u(0)}\right| = 0 \leqslant C_1\varepsilon$, та $\left|R_s^{v(0)}\right| = 0 \leqslant C_1\varepsilon$, $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},)$ то з врахуванням властивостей функцій Π_i^u та Π_s^v, маємо

$$\begin{aligned} &|\Pi_i^u(R^{u(1)},R^{v(1)},x,t;\varepsilon)-\\ &\quad -\Pi_i^u(R^{u(0)},R^{v(0)},x,t;\varepsilon)| \leqslant\\ &\quad\leqslant C_2\varepsilon(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Pi}}|R_j^{u(1)}|+\\ &\quad+\sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Pi}}|R_l^{v(1)}|) \leqslant\\ &\quad\leqslant 2C_2\varepsilon C_0\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{N+1},\\ &|\Pi_s^v(R^{u(1)},R^{v(1)},x,t;\varepsilon)-\\ &\quad -\Pi_s^v(R^{u(0)},R^{v(0)},x,t;\varepsilon)| \leqslant\\ &\quad\leqslant C_2\varepsilon(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Pi}}|R_j^{u(1)}|+\\ &\quad+\sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Pi}}|R_l^{v(1)}|) \leqslant\\ &\quad\leqslant 2C_2\varepsilon C_0\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{N+1}.\end{aligned} \tag{36}$$

Умову $2C_2C_0\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ виконуємо за рахунок вибору малого ε_0.

Застосувавши до задач (36) умови (31), одержимо нерівності

$$\max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}C_3\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}C_0\varepsilon^{N+1},\ \ i=\overline{1,n},$$
$$\max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}C_3\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}C_0\varepsilon^{N+1},\ \ s=\overline{1,m}.$$

З нерівності трикутника матимемо

$$\begin{aligned}\max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(2)}\right| &= \max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(1)}+z_i^{u(2)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(1)}\right| + \max_{\overline{\Pi}}\left|z_i^{u(2)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)C_0\varepsilon^{N+1},\ \ i=\overline{1,n},\\ \max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(2)}\right| &= \max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(1)}+z_s^{v(2)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(1)}\right| + \max_{\overline{\Pi}}\left|z_s^{v(2)}\right| \leqslant\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)C_0\varepsilon^{N+1},\ \ s=\overline{1,m}.\end{aligned}$$

Виконання нерівностей (33), (34) при $k=2$ доведено.

Зробимо припущення математичної індукції, що нерівності (33), (34) виконуються для всіх $k=1,\ldots,q$ і доведемо виконання для $k=q+1$. Отже, з (29)

$$\begin{gathered}L_i[z^{u(q+1)},z^{v(q+1)}]=\\ =\Pi_i^u(R^{u(q)},R^{v(q)},x,t;\varepsilon)-\\ -\Pi_i^u(R^{u(q-1)},R^{v(q-1)},x,t;\varepsilon),\\ L_s[z^{u(q+1)},z^{v(q+1)}]=\\ =\Pi_s^v(R^{u(q)},R^{v(q)},x,t;\varepsilon)-\\ -\Pi_s^v(R^{u(q-1)},R^{v(q-1)},x,t;\varepsilon),\end{gathered}\tag{37}$$

$$z_i^{u(q+1)}|_{t=0}=0,\ z_i^{u(q+1)}|_{x=0}=0,\quad i=\overline{1,n},$$
$$z_s^{v(q+1)}|_{t=0}=0,\ z_s^{v(q+1)}|_{x=0}=0,\quad s=\overline{1,m}.$$

З того, що умови (33), (34) виконуються для $k=q-1$ і $k=q$ справедливим є $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(q-1)}\right|\leqslant C_1\varepsilon$, $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(q-1)}\right|\leqslant C_1\varepsilon$, $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(q)}\right|\leqslant C_1\varepsilon$, $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(q)}\right|\leqslant C_1\varepsilon$, $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|z_i^{u(q)}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{q-1}}C_0\varepsilon^{N+1}$, $\max\limits_{\overline{\Pi}}\left|z_S^{v(q)}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{q-1}}C_0\varepsilon^{N+1}$, тому

$$\begin{gathered}|\Pi_i^u(R^{u(q)},R^{v(q)},x,t;\varepsilon)-\\ -\Pi_i^u(R^{u(q-1)},R^{v(q-1)},x,t;\varepsilon)|\leqslant\\ C_2\varepsilon(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Pi}}|R_j^{u(q)}|+\sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Pi}}|R_l^{v(q)}|)\leqslant\\ \leqslant 2C_2\varepsilon C_0\frac{1}{2^{q-1}}\varepsilon^{N+1}\leqslant\frac{1}{2^q}\varepsilon^{N+1},\ i=\overline{1,n},\\ |\Pi_s^v(R^{u(q)},R^{v(q)},x,t;\varepsilon)\\ -\Pi_s^v(R^{u(q-1)},R^{v(q-1)},x,t;\varepsilon)|\leqslant\\ C_2\varepsilon(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Pi}}|R_j^{u(q)}|+\sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Pi}}|R_l^{v(q)}|)\leqslant\\ \leqslant 2C_2\varepsilon C_0\frac{1}{2^{q-1}}\varepsilon^{N+1}\leqslant\frac{1}{2^q}\varepsilon^{N+1},\ s=\overline{1,m}.\end{gathered}\tag{38}$$

Застосувавши оцінку (31) до задачі (37), отримаємо

$$\max_{\overline{\Pi}}\left|R_i^{u(q+1)}\right|\leqslant\frac{1}{2^q}C_0\varepsilon^{N+1}.$$

$$\max_{\overline{\Pi}}\left|R_s^{v(q+1)}\right|\leqslant\frac{1}{2^q}C_0\varepsilon^{N+1}.$$

Тепер з нерівності трикутника матимемо

$$\begin{gathered}\max_{\overline{\Pi}}|R_i^{u(q+1)}|=\max_{\overline{\Pi}}|R_i^{u(q)}+z_i^{u(q+1)}|\\ \leqslant\max_{\overline{\Pi}}|R_i^{u(q)}|+\max_{\overline{\Pi}}|z_i^{u(q+1)}|\leqslant\\ \leqslant(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^q})C_0\varepsilon^{N+1},\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\max_{\overline{\Pi}}|R_s^{v(q+1)}|=\max_{\overline{\Pi}}|R_s^{v(q)}+z_s^{v(q+1)}|\leqslant\\ \max_{\overline{\Pi}}|R_s^{v(q)}|+\max_{\overline{\Pi}}|z_s^{v(q+1)}|\leqslant\\ \leqslant(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^q})C_0\varepsilon^{N+1},s=\overline{1,m}.\end{gathered}$$

Доведено, що для $k=q+1$ виконуються нерівності (33), (34).

Виконання умови (34) забезпечує рівномірну збіжність в $\overline{\Pi}$ рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty}z_i^{u(k)}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}z_s^{v(k)}$, $(i=\overline{1,n},s=\overline{1,m})$ що еквівалентне збіжності послідовностей $\{R_i^{u(k)}\}$, $\{R_s^{v(k)}\}$. Відповідно $\lim\limits_{k\to\infty}R_i^{u(k)}(x,t;\varepsilon)=R_i^u(x,t;\varepsilon)$ $(i=\overline{1,n})$ та $\lim\limits_{k\to\infty}R_s^{v(k)}(x,t;\varepsilon)=R_s^v(x,t;\varepsilon)$ $(s=\overline{1,m})$– неперервні функції в $\overline{\Pi}$ і з умови (33) маємо оцінки $|R_i^u|\leqslant 2C_0\varepsilon^{N+1}$, $|R_s^v|\leqslant 2C_0\varepsilon^{N+1}$ а звідси маємо доведену рівномірну оцінку $R_i^u=O(\varepsilon^{N+1})$, $R_s^v=O(\varepsilon^{N+1})$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ в $\overline{\Pi}$.

Крім неперервності функцій R_i^u, R_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, для доведення існування класичного розв'язку задачі (26)–(27), нам необхідно довести неперервність їх частинних похідних і виконання умов погодження першого порядку для рівнянь (28) в області $\overline{\Pi}$.

Для цього достатньо в $\overline{\Pi}$ показати рівномірну збіжність послідовностей $\left\{\dfrac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial t}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial t}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial x}\right\}$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$.

Продиференціюємо (29) за змінною t і введемо позначення $\dfrac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial t}=\mu_i^{u(k)}$, $\dfrac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial t}=\mu_s^{v(k)}$. Одержимо послідовність рівнянь

$$\mu_i^{u(0)}=0,\ \mu_s^{v(0)}=0,$$
$$i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m}\ k=1,2,\dots,$$
$$L_i^u[\mu^{u(k)},\mu^{v(k)}]=\alpha_i^u[R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}]+ \\ +\beta_i^u[\mu^{u(k-1)},\mu^{v(k-1)},R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}], \quad (39)$$
$$L_s^v[\mu^{u(k)},\mu^{v(k)}]=\alpha_s^v[R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}]+ \\ +\beta_s^v[\mu^{u(k-1)},\mu^{v(k-1)},R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}],$$

де, L_i^u, L_s^v– ті ж оператори, що і в (29),

$$\alpha_1^u[R^u,R^v]=\frac{\partial}{\partial t}(F_{1u}(M))\sum_{j=1}^n R_j^u,+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}(F_{1v}(M))\sum_{l=1}^m R_l^v,$$

$$\beta_1^u[\mu^u,\mu^v,R^u,R^v]= \\ =\{F_{1u}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon)- \\ -F_{1u}(M)\}\sum_{j=1}^n\mu_j^u+ \\ +\{F_{1v}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon)- \\ -F_{1v}(M)\}\sum_{l=1}^m\mu_l^s-\alpha_1^u[R^u,R^v]+ \\ +F_{1u}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+ \\ +R^v,x,t;\varepsilon)\sum_{j=1}^n\frac{\partial U_j^{N+1}}{\partial t}+ \\ +F_{1v}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+ \\ +R^v,x,t;\varepsilon)\sum_{l=1}^m\frac{\partial V_l^{N+1}}{\partial t}+ \\ +F_{1t}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+ \\ +R^v,x,t;\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial U_1^{N+1}}{\partial t}+\frac{\partial U_1^{N+1}}{\partial x}\right],$$

$\alpha_i^u,\ \beta_i^u\ (i=\overline{2,n}),\ \alpha_s^v,\ \beta_s^v;(s=\overline{1,m})$ виражаються аналогічно.

Для α_1^u справедлива оцінка

$$|\alpha_1[R^u,R^v]|\leqslant \\ \leqslant\frac{C_5}{\varepsilon}(\sum_{j=1}^n|R_j^u|+\sum_{l=1}^m|R_l^v|), \quad (40)$$

оскільки $\frac{\partial}{\partial t}(F_{1u}(M)) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\frac{\partial}{\partial t}(F_{1v}(M)) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, аналогічно для всіх $\alpha_i^u,\ \alpha_s^v\ (i=\overline{2,n},\ s=\overline{1,m})$. А функції $\beta_i^u,\ \beta_s^v\ (i=\overline{2,n},\ s=\overline{1,m})$ як і β_1^u задовольняють умови

a) $\beta_1(0,0,0,0)=O(\varepsilon^N)$ рівномірне в Π;

b) Якщо $|\bar\mu_i^u|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar\mu_s^v|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde\mu_i^u|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde\mu_s^v|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar R_i^u|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar R_s^v|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde R_i^u|\leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde R_s^v|\leqslant C_6\varepsilon$ то знайдуться $C_7>0$, $\varepsilon_0>0$, такі що при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$|\beta_1[\bar\mu^u,\bar\mu^v,\bar R^u,\bar R^v]-\beta_1[\tilde{\mu^u},\tilde{\mu^u},\tilde R^u,\tilde R^v]|\leqslant \\ \leqslant C_7[\varepsilon(\sum_{j=1}^n|\bar\mu_j^u-\tilde\mu_j^u|+\sum_{l=1}^m|\bar\mu_l^v-\tilde\mu_l^v|)+ \\ +\sum_{j=1}^n|\bar R_j^u-\tilde R_j^u|+\sum_{l=1}^m|\bar R_l^v-\tilde R_l^v|].$$

При $k=1$ з (29) отримаємо крайові умови

$$\mu_i^{u(k)}|_{x=0}=0,\ \ \mu_s^{v(k)}|_{x=0}=0,$$
$$\mu_i^{u(k)}|_{t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\Pi_i^u(0,0,x,0;\varepsilon)=O(\varepsilon^N), \\ i=\overline{1,n}, \quad (41)$$
$$\mu_s^{v(k)}|_{t=0}=\Pi_s^v(0,0,x,0;\varepsilon)=O(\varepsilon^N+1), \\ s=\overline{1,m}.$$

Розглянемо задачу (39)–(41) при $k=1$. З умови (40), оцінок $|R_i^{u(1)}|=O(\varepsilon^{N+1})$, $|R_s^{v(1)}|=O(\varepsilon^{N+1})$ і властивостей функцій β_i^u та β_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, застосувавши оцінки (31), отримаємо

$$\max_{\overline{\Pi}}|\mu_i^{u(1)}|\leqslant C_8\varepsilon^N,\quad (i=\overline{1,n}). \\ \max_{\overline{\Pi}}|\mu_s^{v(1)}|\leqslant C_8\varepsilon^N,\quad (s=\overline{1,m}). \quad (42)$$

Нехай $C_9=\max\limits_{\Pi}\{C_0,C_3,C_8\}$, C_0,C_3,C_8– відповідні сталі з нерівностей (33), (31), (42) і нехай $C_6=2C_9$, якому відповідають C_7,ε_0 з властивості **b**) функцій β_i^u, β_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$. Виберемо ε_0 достатньо малим, щоб виконувалась нерівність

$(C_5 + 2C_7(1+\varepsilon_0))C_9\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$, де C_5– стала з нерівності (40). Тоді

$$\max_{\overline{\Pi}} \left|\mu_i^{u(k)}\right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) C_9 \varepsilon^{N-1},$$

$$\max_{\overline{\Pi}} \left|\mu_i^{u(k)} - \mu_i^{u(k-1)}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} C_9 \varepsilon^{N-1}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{43}$$

З умови (42) випливає виконання нерівностей (43) для $k = 1$, а методом математичної індукції можна довести для довільного k аналогічно як (33) (34). Для функцій $\mu_s^{v(k)}$ $(s = \overline{1,m})$ отримаємо аналогічні оцінки.

На підставі (43), послідовності $\{\mu_i^{u(k)}\}$, $\{\mu_s^{v(k)}\}$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$ рівномірно збіжні в області $\overline{\Pi}$, звідки й виливає неперервність частинних похідних $\dfrac{\partial R_i^u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial R_s^v}{\partial t}$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$ в $\overline{\Pi}$.

Тепер з (29) випливає рівномірна збіжність послідовностей $\left\{\dfrac{\partial R_i u(k)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial R_s v(k)}{\partial x}\right\}$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$ в області $\overline{\Pi}$, а отже і неперервність частинних похідних $\dfrac{\partial R_i^u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R_s^v}{\partial x}$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аболиня В.Э., Мышкис А.Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Матем. сб. — 1960. — Т.50. — №4. — С. 423 - 442.

2.*Курант Р.* Уравения с частными производными. – М.: Мир,1964 – 980с.

3. *Лакс П.* Гиперболические диферецианьные уравения в частных производных. – Ижевск: ИНКИ, 2010. — 296 с.

4. *Кирилич В.М., Филимонов А.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.

5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярых возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

6. *Бутузов В.Ф., Каращук А. Ф.* Асимптотика решения системы уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром при части производных // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т.6. — №3. — С. 723-738.

7. *Флюд О.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь першого порядку // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 135–149.

8. *Пелюшкевич О.В.* Задачі для вироджених гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними: автореф. дис. на здобуття наук. ступення канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – Львів, 2013.– 19с.