УДК 517.925

©2015 р. М.О. Білозерова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Для рівнянь другого порядку, що містять у правій частині нелінійності у деякому сенсі близькі до степеневих, встановлено необхідні й достатні умови існування одного класу неколивних розв'язків, а також одержано асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних.

We provide necessary and sufficient conditions for the existence of a class of non-oscillating solutions of second order equations containing non-linearities of a power type in the right-hand side. We also obtain asymptotic representations for these solutions and their derivatives.

В монографії І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія [1] на основі досліджень, що проведені до 1990 року, розроблена асимптотична теорія неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Однак, ця теорія ще далека від свого остаточного завершення. Зокрема, вона не може бути у повній мірі застосована для рівнянь з правильно змінними нелінійностями, які є природними узагальненнями рівнянь зі степеневими нелінійностями та останніми десятиріччями привертають до себе увагу багатьох українських та закордонних математиків (див., напиклад, [2,3]). Дану роботу присвячено розв'язанню однієї з задач цього напрямку.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$[1] $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$[2] або — $]Y_i, y_i^0]$. Крім того, припускаємо, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$ — правильно змінна функція [3] при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, причому $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо при кожному $i \in \{0, 1\}$

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \tag{2}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

При $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ у роботі [4] було отримано необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1), а також встановлено неявні асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Проте, в особливих випадках $\lambda_0 \in \{0, \pm\infty\}$ (див., наприклад, [5]) доводилося накладати додаткові обмеження на функції φ_0, φ_1. Опишемо докладніше ці обмеження.

Нехай $\varphi : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ — правильно змінна функція при $z \to Y$ $(z \in \Delta_Y)$ $(Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл $Y)$ порядку σ. Будемо говорити, що φ задовольняє умову S, якщо для $\theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$ та для будь-якої неперервно диференційовної функції $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z\to Y\\ z\in\Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

має місце при $z \to Y$, $(z \in \Delta_Y)$ співвідношення

$$\theta(zL(z)) = \theta(z)(1 + o(1)).$$

[1] При $\omega > 0$ вважаємо, що $a > 0$.

[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Достатньо важливий для вивчення клас $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (1) було досліджено лише для випадків, коли функція φ_1 задовольняє умову S. У даній роботі вдалося розповсюдити ці результати на випадок рівняння (1), в якому $\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|z||))$, R — правильно змінна на нескінченності функція порядку μ, $0 < \mu < 1$. Зазначимо, що функція $|z|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|z||))$ не задовольняє умову S.

Введемо наступні позначення:

$$I(t)=\int_{A_\omega^1}^{t} p(\tau)\,d\tau,$$

$$A_\omega=\begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau=+\infty,\\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau<+\infty,\end{cases}$$

у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y_1^0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}=Y_1$

$$J(t)=\int\limits_{B_\omega}^{t}|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\;d\tau,$$

$$B_\omega=\begin{cases} b, & \text{если } \int\limits_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\;d\tau=+\infty,\\ \omega, & \text{если } \int\limits_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\;d\tau<+\infty,\end{cases}$$

де $b \in [a;\omega)$ обрано так, щоб $|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\in\Delta_{Y_1}$ при $t\in[b;\omega)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема *Нехай у рівнянні* (1) $\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|z||))$, R *— неперервно диференційовна, з монотонною похіною, правильно змінна на нескінченності функція порядку* μ, $0<\mu<1$, φ_0 *є неперервно диференційовною функцією з монотонною похідною,* $\sigma_1\neq 1$, *існує скінченна чи нескінченна границя* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}$ *та*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|\ln|I(t)||^{\mu-1}J(t)}{\pi_\omega(t)J'(t)}=0. \tag{4}$$

Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-розв'язків необхідним і достатнім є виконання умов*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0|J(t)|^{\frac{1-\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J'(t)}{y_1^0|J(t)|}=Y_1,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\sigma_1-1, \tag{6}$$

та нерівностей

$$\frac{\alpha_0 I(t)}{y_1^0(1-\sigma_1)}>0 \text{ при } t\in]a,\omega[, \tag{7}$$

$$\frac{y_0^0y_1^0(1-\sigma_1)J(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}>0 \text{ при } t\in[b,\omega[. \tag{8}$$

Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{|\exp\left(R\left(|\ln|y'(t)||\right)\right)\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\sim \sim\frac{|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0}{1-\sigma_1}(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t), \tag{9}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}.$$

Зауваження. *Якщо у рівнянні* (1) $p(t) = |\pi_\omega(t)|^{\sigma_1-2}\,|\ln|\pi_\omega(t)||^q\,L\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)$, $q<-\mu$, L *- довільна повільно змінна на нескінченності функція, то умова (3) задовольняється. Більше того, навіть для випадку степеневих* φ_0, φ_1 *та правильно змінної при* $t\uparrow\omega$ *функції* p *порядку* ρ *однією з необхідних умов існування у рівняння (1)* $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-розв'язків є рівність* $\rho=\sigma_1-2$.

Доведення теореми *Необхідність.* Нехай $y:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0;Y_1;0)$-розв'язок рівняння (1). З умов на функції φ_0 та R з урахуванням твердження 9 з [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116) випливає, що

$$\lim_{z\to\infty}\frac{zR'(z)}{R(z)}=\mu,\quad \lim_{z\to\infty}R'(z)=0,$$
$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}}\frac{z\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=\sigma_0. \tag{10}$$

Тоді з рівності

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}\right)'=$$

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}\times$$

$$\times\left(1-\sigma_1-\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{y(t)\widetilde{\varphi}_0'(y(t))}{\widetilde{\varphi}_0(y(t))}-R'((|\ln|y'(t)||)\mathrm{sign}\, y_1^0)\right)$$

на підставі (1), (2) та (3) у випадку, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau=+\infty$, маємо при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp\left(|\ln|y'(t)||^{\mu}\right)}= \tag{11}$$
$$=\alpha_0(1-\sigma_1)I(t)[1+o(1)].$$

У іншому випадку $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau<+\infty$, отримаємо або (11), або

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)\exp(-R(|\ln|y'(t)||))}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}}=c\neq 0. \tag{12}$$

Доведемо, що (12) не може мати місця. Оскільки $\sigma_1\neq 1$, то в силу першої з умов (2) та (10) функція $\frac{y'(t)}{|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}$ має або нульову або нескінченну границю при $t\uparrow\omega$. При виконанні умови (12) функція $\varphi_0(y(t))$ мала би відповідно нульову або нескінченну границю при $t\uparrow\omega$. Тому з використанням правила Лопіталя у формі Штольця, (10), (2) та (3) мали би

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{1}{\varphi_0(y(t))}\right]'}{\left[\dfrac{|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}{y'(t)}\right]'}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\times$$
$$\times\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R(|\ln|y'(t)||))}\times$$
$$\times\frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))}\times$$
$$\times\frac{1}{1-\sigma_1-\dfrac{y'(t)\widetilde{\varphi}_1'(y'(t))}{\widetilde{\varphi}_1(y'(t))}}=0.$$

Це співідношення протирічить (12). Отже, рівність (11) має має місце в обох випадках.

Зауважимо, що (11) може бути переписано при $t\uparrow\omega$ у вигляді

$$\frac{y'(t)\mathrm{sign}\, y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\times$$
$$\times|\exp(R(|\ln|y'(t)||))I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,[1+o(1)]. \tag{13}$$

Крім того, використовуючи рівняння (1), перепишемо (11) при $t\uparrow\omega$ у вигляді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\frac{p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)],$$

звідки, оскільки існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, яка в силу леми 10.6 з [6] дорівнює (-1), отримаємо умову (7) та другу з умов (6).

З першої з умов (7) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція $L:\Delta_{Y_0}\to]0;+\infty[$, що $y'(t)=\frac{L(\pi_\omega(t))}{\pi_\omega(t)}$. Тому з урахуванням властивостей логарифмічної функції та функції R, зокрема, (10), маємо при $t\uparrow\omega$

$$R'(|\ln|y'(t)||)=R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)(1+o(1)). \tag{14}$$

Нехай

$$W(t):=\int\limits_{B_\omega}^{t}J'(\tau)\exp(R(|\ln|y'(\tau)||))\,d\tau,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega}J(t)=J_0.$$

Покажемо, що функція

$$\exp(R(|\ln|y(t(J^{-1}(z)))||)),$$

де J^{-1} — функція, обернена для J, є повільно змінною функцією при $z\to J_0$. Справді, на підставі умов (4) та (14) маємо

$$\lim_{z\to J_0}\frac{z\left(\exp(R(|\ln|y'(t(J^{-1}(z))||))\right)'}{\exp(R(|\ln|y(t(J^{-1}(z))||)}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J(t)R'(|\ln|y'(t)||)}{J'(t)\pi_\omega(t)\mathrm{sign}(\ln|y'(t)|)}=0.$$

Звідси з використанням теорем про інтегрування правильно змінних функцій (твердження 1 та 2 з [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116)) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{W(t)}{\exp\left(R(|\ln|y'(t)||)\right)J(t)}=1.$$

Тому з (13) випливає перше з асимптотичних зображень (9), звідки слідує (8) та (5). З першого з зображень (9) з урахуванням (13) отримаємо друге з зображень (9) та першу з умов (6).

Достатність. Нехай виконано умови (4) − −(8). Позначимо $\theta_0(z)=\varphi_0(z)|z|^{-\sigma_0}$.

Розглянемо функцію

$$f(s_1,s_2)=\theta_0(s_1)\exp\left(R(|\ln|s_2||)\right),$$

Для кожного $i\in\{0,1\}$ підберемо число $y_i^1\in\Delta_{Y_i}$ так, щоб при $z_i\in\Delta^1_{Y_i}$

$$\left|\frac{z_if'_{z_i}(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right|<\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{16},$$

$$\Delta^1_{Y_i}=\begin{cases}[y_i^1,Y_i[, & \text{если } \Delta_{Y_i}=[y_i^0,Y_i[\\ ]Y_i,y_i^1], & \text{если } \Delta_{Y_i}=]Y_i,y_i^0].\end{cases}$$

Це можна зробити застосувавши умови (10).

Розглянемо задану на множині $\Delta=\Delta^1_{Y_0}\times\Delta^1_{Y_1}$ функцію

$$F(s_1,s_2)=\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1,s_2)},\frac{s_1}{s_2}\right).$$

У [7] при доведенні достатності теореми 1 встановлено, що F взаємно однозначно відображає Δ на множину $F(\Delta)$. Таким чином, існує обернена функція $F^{-1}:F(\Delta)\to\Delta$. Оскільки якобіан функції F є відмінним від нуля на Δ функція F^{-1} є неперервно диференційовною на $F(\Delta)$.

Застосуємо до рівняння (1) перетворення

$$\begin{gathered}F(y(t),y'(t))=\\ \left(\frac{C_0[1+z_1(x)]}{|J(t)|^{\sigma_1-1}},\frac{C_1J'(t)}{J(t)}[1+z_2(x)]\right),\\ x=\beta\ln|I(t)|,\end{gathered}\tag{15}$$

де

$$C_1=\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1},\ C_0=|1-\sigma_1||C_1|^{\sigma_1-1},$$

$$\beta=\begin{cases}1 & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}I(t)=+\infty,\\ -1 & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}I(t)=0.\end{cases}$$

Перепишемо (15) у вигляді

$$\begin{cases}z_1'=\beta[1+z_1]H(x)\,[C_1Q_0(x,z_1,z_2)(1+z_2)+\\ +\dfrac{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{H(x)}\times\\ \times\dfrac{Q_1(x,z_1,z_2)|1+z_2(x)|^{\sigma_1-1}}{(1-\sigma_1)(1+z_1)}+\sigma_1-1\Big],\\ \\ z_2'=\beta[1+z_2]\Big(H(x)\left(\frac{1}{C_1}-1-z_2\right)+\\ +\dfrac{|1+z_2|^{\sigma_1-1}}{(1-\sigma_1)(1+z_1)}-\dfrac{I(t(x))J''(t(x))}{I'(t(x))J'(t(x))}\Big).\end{cases}\tag{16}$$

де

$$\begin{gathered}(Y_0(x,z_1,z_2),Y_1(x,z_1,z_2))=\\ =F^{-1}\left(\frac{C_0[1+z_1]}{|J(t)|^{\sigma_1-1}},\frac{C_1J'(t)}{J(t)}[1+z_2(x)]\right),\\ Q_0(x,z_1,z_2)=\\ =\frac{Y_0(x,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial s_1}(Y_0(x,z_1,z_2),Y_1(x,z_1,z_2))}{F(Y_0(x,z_1,z_2),Y_1(x,z_1,z_2))},\\ Q_1(x,z_1,z_2)=\frac{R'(Y_1(x,z_1,z_2))}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)},\\ H(x)=\frac{I(t(x))J'(t(x))}{p(t(x))J(t(x))}.\end{gathered}$$

В силу (6) та (5) можна вибрати число $t_0\in[a,\omega[$ так, щоб для будь-яких $|\xi_j|\le\frac{1}{2}$, $j=1,2$ при $t\in[t_0,\omega[$

$$\left(C_0|J(t)|^{1-\sigma_1}[1+\xi_1],\frac{C_1J'(t)}{J(t)}[1+\xi_2]\right)\in F(\Delta).$$

Тепер розглянемо систему рівнянь (16) на множині

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\ \text{где } x_0=\beta\ln|J(t_2)|,$$

$$D=\{(z_1,z_2):|z_i|\le\frac{1}{2},i=1,2\}.$$

Оскільки за умовою теореми існує нескінченна чи скінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}$, то в силу леми 10.6 з [6] та виду функції J з урахуванням першої з умов (7) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}=0,\tag{17}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)}=-1, \tag{18}$$

$$\lim_{x\to\infty}H(x)=0. \tag{19}$$

Крім того, з урахуванням властивостей функції F^{-1} та выбору Δ як і в [7] отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}Y_i(x,z_1,z_2)=Y_i \quad (i=0,1)$$

рівномірно по $|z_j|<\frac{1}{2}$, $j=1,2$.

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}Q_0(x,z_1,z_2)=1-\sigma_0-\sigma_1 \tag{20}$$

рівномірно по $|z_j|<\frac{1}{2}$, $j=1,2$.

В силу першої з умов (7) та (4)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{H(x)}=0. \tag{21}$$

Введемо позначення:

$$F^{-1}(w_1,w_2)=(F_1^{-1}(w_1,w_2),F_2^{-1}(w_1,w_2))$$

$$P_i(w_1,w_2)=\frac{w_i\frac{\partial F_2^{-1}}{\partial w_i}(w_1,w_2)}{F_2^{-1}(w_1,w_2)},i=1,2.$$

З властивостей функції F випливає, що функції P_1, P_2 є обмеженими на $F(\Delta)$. Оскільки для будь-яких сталих ξ_1, ξ_2: $|\xi_j|<\frac{1}{2}$, $j=1,2$

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(Y_1(x(t),\xi_1,\xi_2)\right)'_t}{Y_1(x(t),\xi_1,\xi_2)}=$$

$$=P_1\left(C_0|J(t)|^{1-\sigma_1}[1+\xi_1],\frac{C_1J'(t)}{J(t)}[1+\xi_2]\right)\times$$

$$\times(1-\sigma_1)\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}+$$

$$+P_2\left(C_0|J(t)|^{1-\sigma_1}[1+\xi_1],\frac{C_1J'(t)}{J(t)}[1+\xi_2]\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)}-\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}\right),$$

з урахуванням (17) та (18) отримуємо, що функція $|Q_1|$ є обмеженою при $x\in[x_0,+\infty[$ рівномірно по $|z_j|<\frac{1}{2}$, $j=1,2$.

Перепишемо систему (16) у вигляді

$$\begin{cases} z_1'=H(x)\left(A_{12}z_2+\sum\limits_{j=1}^{2}R_j(x,z_1,z_2)\right), \\ z_2'=\sum\limits_{j=1}^{2}A_{2j}z_j+\sum\limits_{j=3}^{4}R_j(x,z_1,z_2), \end{cases} \tag{22}$$

де

$$A_{12}=\beta(1-\sigma_1),$$

$$A_{21}=\frac{\beta}{1-\sigma_1},\quad A_{22}=-\beta,$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=\beta z_1z_2(1-\sigma_1),$$

$$R_2(x,z_1,z_2)=\beta[1+z_1][1+z_2]\times$$
$$\times(Q_0(x,z_1,z_2)-1+\sigma_0+\sigma_1)+$$
$$+\frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{\beta H(x)}\times$$
$$\times\frac{Q_1(x,z_1,z_2)|1+z_2(x)|^{\sigma_1-1}}{(1-\sigma_1)}$$

$$R_3(x,z_1,z_2)=$$
$$=\beta[1+z_2]H(x)\left(\frac{1}{C_1}-1-z_1\right)+$$
$$+\beta[1+z_2]\left(\frac{1}{1-\sigma_1}-\frac{I(t(x))J''(t(x))}{I'(t(x))J'(t(x))}\right),$$

$$R_4(x,z_1,z_2)=\beta\times$$
$$\times\left(\frac{|1+z_2|^{\sigma_1-1}}{(1-\sigma_1)(1+z_1)}-\frac{1-z_1+\sigma_1z_2}{1-\sigma_1}\right).$$

Враховуючи (19), (20) та (21) маємо

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to0}\frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0\ (i=1,4)$$

рівномірно по $x\in[x_0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}R_j(x,z_1,z_2)=0\ (j=2,3)$$

рівномірно по $z_1,z_2:\ (z_1,z_2)\in D$.

Застосуємо до (22) перетворення

$$z_2=w_2,\qquad z_1=w_1+\frac{1}{1-\sigma_1}h(x)w_2, \tag{23}$$

де w_1,w_2 — нові невідомі функції,

$$h(x)=\frac{\pi_\omega(t(x))J'(t(x))}{J(t(x))}. \tag{24}$$

Будемо мати з урахуванням (17) та (18)

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{H(x)} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{H(x)} = \lim_{x\to+\infty} \beta \times \\ \times \left(1 + \frac{\pi_\omega(t(x))J''(t(x))}{J'(t(x))} - h(x)\right) = 0. \tag{25}$$

В результаті перетворення (23) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1' = H(x)\left(\frac{h(x)}{(\sigma_1-1)H(x)}A_{21}w_1 + \right. \\ \left. + \left(A_{12} + \frac{h(x)A_{22}}{(\sigma_1-1)H(x)}\right)w_2\right) + \\ + H(x)N_1(x, w_1, w_2) \\ \\ w_2' = A_{21}(x)w_1 + (A_{22} + Ch(x)A_{21})w_2 + \\ + N_2(x, w_1, w_2), \end{cases} \tag{26}$$

де

$$N_1(x, w_1, w_2) = -\frac{h^2(x)}{(\sigma_1-1)^2H(x)}A_{21}w_2 + \\ + \frac{h(x)N_2(x, w_1, w_2)}{(\sigma_1-1)H(x)} + \\ + \sum_{j=1}^{2} R_j\left(x, w_1 + \frac{1}{1-\sigma_1}h(x)w_2, w_2\right),$$

$$N_2(x, w_1, w_2) = \\ = \sum_{j=3}^{4} R_j\left(x, w_1 + \frac{1}{1-\sigma_1}h(x)w_2, w_2\right).$$

Враховуючи (24) та (25), а також властивості функцій R_1, R_2, R_3, R_4 отримуємо, що для системи (26) виконано всі умови теореми 2.8 з [8], а отже ця система має хоча б один розв'зок $\{z_i^*\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, що прямує до нуля при $x \to +\infty$. Йому в силу (15) та (23) відповідає розв'язок y рівняння (1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (9). Отже, y є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком. Теорему доведено.

Висновки. У даній роботі отримано необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків у особливому випадку $\lambda_0 = 0$ для класів суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, які раніше не розглядалися.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кигурадзе И.Т., Чангурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.

2. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения – 2011. – **47**, Вып. 5. – С. 627-650.

3. *Maric V.* Regular Variation and Differential Equations — Springer, 2000. — 138 p.

4. *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. – 2010. – **15**, Вип. 18. – С. 7-21.

5. *Белозерова М.А.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих // Науковий вісник Чернівецького університету. - Чернівці : "Рута". – 2008. – Вип. 374. – С. 34-43.

6. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 — Киев, 1998. — 295 с.

7. *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. – 2015. – **20**, Вип. 1 (25) – С.7-19.

8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономних систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52-80.