УДК 517/955+929

©2015 р. С.С. Дрінь, Я.М. Дрінь

Національний університет "Києво-Могилянська Академія",
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ДИФУЗІЇ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТА

Для одного квазілінійного псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною за часовою змінною t порядку $\alpha \in (0,1)$, другою похідною за просторовою змінною x і з відхиленням аргумента методом кроків доводиться розв'язність задачі Коші.

We prove the solvability of the Cauchy problem for a quasilinear pseudodifferential equation with fractal derivative with respect to time t of order $\alpha \in (0,1)$, second derivative with respect to spatial argument x and deviation time variable using the step by step method.

Задачам для рівнянь з оператором дробового інтегрування та диференціювання присвячено ряд публікацій вітчизняних і зарубіжним математиків. Задачею Коші для рівняння з дробовими похідними за часовою змінною описується спеціальна дифузія, що називається дифузією дробового порядку або фрактальною дифузією. Така задача досить повно і глибоко проаналізована у працях А.Н. Кочубея, С.Д. Ейдельмана [1–3] і їх багатьох пізніших працях. У праці [4] вивчаються задачі з оператором дробового диференціювання для B-параболічного рівняння на поверхні із класу Діні, нелокальні задачі фрактальної дифузії.

В даній праці використовуючи результати праць [1–4] для одного квазілінійного псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною за часовою змінною t порядку $\alpha \in (0,1)$ і другою похідною за просторовою змінною x і з відхиленням аргумента методом кроків доводиться розв'язність задачі Коші.

Результати даної праці анонсовані в [5].

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу Коші

$$D_t^{\alpha} u(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t-h,x)), \quad t > h, x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{0 \le t \le h} = u_0(t,x), x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $D_t^{\alpha} u(t,x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dt} \int\limits_h^t \frac{u(\tau,x)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - (t-h)^{-\alpha} u_0(h,x) \right]$ – регуляризована дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$, $t > h$, $x \in \mathbb{R}$, h – число.

Методом кроків за допомогою перетворення Фур'є функції Міттаг-Леффлера знаходимо розв'язок задачі (1), (2). Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u(t,x)$ з такими властивостями:

1) $u \in C_x^2(\Pi)$, $\Pi = (0,T) \times \mathbb{R}$, $T >> h$;

2) фрактальний інтеграл

$$I_t^{1-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

належить до класу $C_{t,x}^{1,2}(\Pi)$;

3) функція $u(t,x)$ задовольняє рівняння (1) і умову (2) (див. [3, стор. 326]).

Функції f, u_0 є відомими і припускаємо спочатку, що вони належать класу $L_1(\mathbb{R})$.

2. Метод кроків. Нехай $h \le t \le 2h$, $x \in \mathbb{R}$. Методом кроків зводимо задачу (1), (2) до задачі Коші для рівняння без відхилення аргумента. Справді, при $h \le t \le 2h$ $u(t-h,x) = u_0(t,x)$. Тоді задача (1), (2) набуде вигляду

$$D_t^{\alpha} u(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u_0(t-h,x)), \tag{3}$$

$$t < t \le 2h, x \in \mathbb{R},$$

$$u(t,x)|_{t=h} = u_0(h,x), x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Оскільки функції f та u_0 належать до класу $L_1(\mathbb{R})$, то після застосування перетворення Фур'є із (3), (4) отримаємо задачу

$$D_t^\alpha \tilde{u}(t,\sigma) = -a^2\sigma^2\tilde{u}(t,\sigma) + \tilde{F}(t,\sigma,h), \qquad (5)$$

$$h < t < 2h, \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{u}(t,\sigma)|_{t=h} = \tilde{u}_0(h,\sigma), \sigma \in \mathbb{R}, \qquad (6)$$

де

$$\tilde{F}(t,\sigma,h) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-h)^{-\alpha}\tilde{u}_0(h,\sigma)+$$

$$+\tilde{f}(t,\sigma,h), \quad h < t < 2h, \sigma \in \mathbb{R},$$

$$F(u) \equiv \tilde{u}(t,\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-i\sigma x\}u(t,x)dx,$$

$$h < t < 2h, \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{f}(t,\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-i\sigma x\}f(t,x,u_0(t-h,x))dx,$$

$$h < t < 2h, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок задачі Коші (5), (6) шукаємо у вигляді

$$\tilde{u}(t,\sigma) \equiv I_t^{(\alpha)}v(t,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_h^t \frac{v(t,\sigma)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,$$

$$h < t < 2h, \sigma \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Підставивши (7) у (5), отримаємо інтегральне рівняння

$$v(t,\sigma) = \tilde{F}(t,\sigma,h)+$$

$$+\int\limits_h^t \frac{(-a^2\sigma^2)}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}v(t,\sigma)d\tau, \qquad (8)$$

$h < t < 2h$, $\sigma \in \mathbb{R}$, де функція $K_1(t,\sigma) \equiv \frac{-a^2\sigma^2}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}}$ є його ядром, за допомогою якого будуються повторні ядра і резольвента:

$$K_n(t,\sigma) = \frac{(-1)^n(a\sigma)^{2n}}{\Gamma(n\alpha)t^{1-n\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (9)$$

$$R(t,\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n}{\Gamma(n\alpha)}t^{n\alpha-1}. \qquad (10)$$

За означенням функція

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},$$

$$t > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

є функцією Міттаг-Леффлера, то резольвента (10) запишеться у вигляді

$$R(t,\sigma) = t^{-1}\gamma E_{\alpha,\alpha}(\gamma),$$

де $\gamma = -a^2\sigma^2t^\alpha$, $t > 0$.

Розв'язок інтегрального рівняння (8) набуває вигляду

$$v(t,\sigma) = \tilde{F}(t,\sigma,h)+\int\limits_h^t R(t-\tau,\sigma,h)\tilde{F}(\tau,\sigma,h)d\tau \equiv$$

$$\equiv \tilde{F}(t,\sigma,h) + (R*\tilde{F})(t,\sigma,h), \qquad (11)$$

$t > h$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Оскільки рівність

$$\frac{d}{dt}E_{\alpha,1}(-a^2\sigma^2t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha k(-a^2\sigma^2t^\alpha)^{k-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n}{\Gamma(n\alpha)}t^{n\alpha-1} \equiv R(t,\sigma)$$

є вірною після почленного диференціювання ряду для $E_{\alpha,1}(-a^2\sigma^2t^\alpha)$, то функцію $v(t,\sigma)$ можна записати у вигляді

$$v(t,\sigma) = \int\limits_h^t \frac{d}{dt}E_{\alpha,1}(-a^2\sigma^2(t-\tau)^\alpha)\tilde{F}(\tau,\sigma,h)d\tau+$$

$$+\tilde{F}(t,\sigma,h).$$

Подіявши на (11) оператором I_t^α отримаємо $\tilde{u}(t,\sigma)$. Справді,

$$I_t^\alpha(R*\tilde{F}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_h^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\times$$

$$\times\int\limits_h^\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n\tilde{F}(\beta,\sigma,h)}{\Gamma(n\alpha)(\tau-\beta)^{1-n-\alpha}}d\beta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_h^t \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n}{\Gamma(n\alpha)}\times$$

$$\times \int_{\beta}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{(\tau-\beta)^{1-n\alpha}} d\tau \Big) \tilde{F}(\beta,\sigma,h)d\beta.$$

У внутрішньому інтегралі по змінній τ проведемо заміну змінної τ на μ за формулою $t-\tau=\mu(t-\beta)$. Тоді

$$\int_{\beta}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\beta)^{1-n\alpha}} = \frac{1}{(t-\beta)^{1-n\alpha-\alpha}} \times$$

$$\times \int_{0}^{1} \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}(1-\mu)^{1-n\alpha}} = (t-\beta)^{(n+1)\alpha-1} \times$$

$$\times B(\alpha, n\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)} (t-\beta)^{(n+1)\alpha-1}.$$

Отже,

$$I_t^{\alpha}(R * \tilde{F}) = \int_{h}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n (t-\beta)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)(t-\beta)^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \tilde{F}(\beta,\sigma,h)d\beta.$$

Якщо додати сюди $I_t^{\alpha}\tilde{F}(t,\sigma,h)$ і врахувати, що $I_t^{\alpha} v(t,\sigma) \equiv \tilde{u}(t,\sigma)$, то отримаємо формулу

$$\tilde{u}(t,\sigma) = \int_{h}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n (t-\tau)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \Big] \tilde{F}(\tau,\sigma,h)d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{h}^{t} \frac{E_{\alpha,\alpha}(-a^2\sigma^2(t-\tau)^{\alpha})}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \tilde{F}(\tau,\sigma,h)d\tau, \quad (12)$$

$t > h$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Якщо врахувати, що

$$\tilde{F}(t,\sigma,h) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-h)^{-\alpha} \tilde{u}_0(h,\sigma) +$$

$$+ \tilde{f}(t,\sigma,h), t > h, \sigma \in \mathbb{R},$$

то із (12) отримаємо, що

$$\tilde{u}(t,\sigma) = \int_{h}^{t} \frac{E_{\alpha,\alpha}(-a^2\sigma^2(t-\tau)^{\alpha})}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-h)^{\alpha}} d\tau \times$$

$$\times \tilde{u}_0(h,\sigma) + \int_{h}^{t} \frac{E_{\alpha,\alpha}(-a^2\sigma^2(t-\tau)^{\alpha})}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \tilde{f}(\tau,\sigma,h)d\tau \equiv$$

$$\equiv Q_1(t,\sigma,\alpha,h)\tilde{u}_0(h,\sigma) +$$

$$+ \int_{h}^{t} Q_2(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma,h)d\tau. \quad (13)$$

Для функції $Q_1(t,\sigma,\alpha,h)$ із (13) виразивши $E_{\alpha,\alpha}(-a^2\sigma^2(t-\tau)^{\alpha})$ через ряд і помінявши порядок сумування та інтегрування, отримаємо, що

$$Q_1(t,\sigma,\alpha,h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times$$

$$\times \int_{h}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-h)^{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_{h}^{t} \frac{(t-\tau)^{n\alpha}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-h)^{\alpha}}.$$

Оскільки

$$\int_{h}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-a}(\tau-h)^{1-b}} = \frac{B(a,b)}{(t-h)^{1-a-b}} =$$

$$= (t-h)^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

то при $a=\alpha$, $b=1-\alpha$ та при $a=n\alpha+\alpha$, $b=1-\alpha$ отримаємо, що перший і другий інтеграли відповідно дорівнюють $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ і $(t-h)^{n\alpha}\frac{\Gamma(n\alpha+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)}$. Тоді

$$Q_1(t,\sigma,\alpha,h) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2)^n (t-h)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(n\alpha+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a^2\sigma^2(t-h)^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)} =$$

$$= E_{\alpha,1}(-a^2\sigma^2(t-h)^{\alpha}), \quad (14)$$

$t > h$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Другий доданок у формулі (13) виражається за допомогою функції Міттаг-Леффлера $E_{\alpha,1}$ із (14) за формулою

$$Q_2(t,\sigma,\alpha,h) = D_t^{1-\alpha} E_{\alpha}(-a^2\sigma^2 t^{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_{h}^{t} \frac{E_{\alpha,1}(-a^2\sigma^2\tau^\alpha)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \qquad (15)$$

Отже, розв'язок задачі Коші (5), (6) набуває вигляду (13), де функції Q_1 і Q_2 визначені рівностями (14) і (15) відповідно.

В праці [2] доводиться, що функція $E_\alpha(-a^2\sigma^2t^2)$ має перетворення Фур'є, тому існують функції

$$G_i(t,x,\alpha,h) = F^{-1}_{\sigma\to x}[Q_i(t,\sigma,\alpha,h)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} Q_i(t,\sigma,\alpha,h) d\sigma, \qquad (16)$$

$i = 1, 2$, причому вірними є такі оцінки [2, леми 1, 2]:

$$|D_x^m G_1(t,x,\alpha,h)| \le$$

$$\le Ct^{-\frac{\alpha(1+m)}{2}} \exp\{-c\rho(t,x)\}, m \le 3, \qquad (17)$$

$$|D_t^\alpha G_1(t,x,\alpha,h)| \le$$

$$\le Ct^{-\frac{3}{2}\alpha} \exp\{-c\rho(t,x)\}, \qquad (18)$$

$$|D_x^m G_2(t,x,\alpha,h)| \le$$

$$\le Ct^{-\frac{\alpha(1+m)}{2}-1+\alpha} \exp\{-c\rho(t,x)\}, m \le 3, \quad (19)$$

$$|D_t^\alpha G_2(t,x,\alpha,h)| \le$$

$$\le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-1} \exp\{-c\rho(t,x)\}, \qquad (20)$$

де $\rho(t,x) = \left(|x|t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Із рівності (13) після застосування оберненого перетворення Фур'є і теореми про перетворення Фур'є добутку отримуємо формулу для розв'язку $u(t,x)$ задачі Коші (3), (4) у вигляді суми двох згорток

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t,x-\xi,\alpha,h)u_0(h,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{h}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(t-\tau,x-\xi,\alpha,h)f(\tau,\xi,h)d\xi, \qquad (21)$$

$h \le t \le 2h$, $x \in \mathbb{R}$.

Вектор-функція (G_1, G_2) називається функцією Гріна задачі Коші (3), (4), причому $G_2(t,x,\alpha,h) = D_t^{1-\alpha}G_1(t,x,\alpha,h)$ і для компонент $G_i(t,x,\alpha,h)$ вірними є оцінки (17) – (20).

Доводиться (аналогічно як в [4], стор. 189–191), що функція $u(t,x)$, визначена (21), задовольняє рівняння (3) і початкову умову (4).

3. Основні теореми. У п. 2 доведена така теорема.

Теорема 1. *Розв'язок задачі (3), (4) існує і визначається формулою (21).*

Наступним кроком є продовження розв'язку на інтервал $kh \le t < (k+1)h$, $x \in \mathbb{R}$, тобто побудова функцій $u_0(kh,\xi)$, $f(\tau,\xi,kh)$, $G_1(t,x-\xi,\alpha,kh)$, $G_2(t-\tau,x-\xi,\alpha,kh)$, таких, щоб на цьому інтервалі розв'язок відповідної задачі Коші записувався у вигляді (21) з побудованими компонентами. Отже, вірною є теорема.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1), (2) існує і зображається у вигляді суми згорток*

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t,x-\xi,\alpha,kh)u_0(kh,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{kh}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(t-\tau,x-\xi,\alpha,kh)f(\tau,\xi,kh)d\xi,$$

$kh \le t \le (k+1)h$, $x \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1990. – 26, № 4. – С. 485–492.

2. *Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Докл. НАН Украины. – 2003, № 12. – С. 11-16.

3. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p.

4. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: монографія. – Чернівці, 2010. – 248 с.

5. *Дрінь С.С., Дрінь Я.М.* Задача Коші для модельного рівняння фрактальної дифузії // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів", 19-22 лютого 2015 р. (Рівне, 2015). – С. 74.