УДК 517.956.4

©2015 р. В. С. Ільків, З. М. Нитребич, П. Я. Пукач

Національний університет „Львівська політехніка“, Львів

ЗАДАЧА З ІНТЕГРО-КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ У ПРОСТОРАХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

У шарі $[0,T]\times\mathbb{R}^p$ досліджено задачу з інтегро-крайовими умовами за часовою координатою $t\in[0,T]$ для узагальненої системи рівнянь Ляме динамічної теорії пружності у класі майже періодичних за просторовими змінними $x_1,\dots,x_p$ функцій. Знайдено критерій єдиності та необхідні, необхідні і достатні, а також достатні умови існування розв'язку цієї задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

In the strip $[0,T]\times\mathbb{R}^p$, we investigate a problem with integral-boundary conditions in time coordinate $t\in[0,T]$ for generalized system of Lamé equations of dynamic elasticity theory, in the class of almost periodical functions in spatial variables $x_1,\dots,x_p$. We found a uniqueness criterion, and necessary, necessary and sufficient, and sufficient existence conditions for the solution of this problem. To solve the problem of small denominators arising while constructing a solution of the problem, we use the metrical approach.

Вступ. Багато фізичних, біологічних та ін. процесів моделюються задачами з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Такими умовами, зокрема, є інтегральні умови, які можна трактувати як вимірювання середніх значень розв'язку (локальні умови трактуються як вимірювання в окремих точках).

Вивченню задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними присвячено велику кількість робіт (див., наприклад, [1–10] і бібліографію там).

Ці задачі, взагалі, є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність у відповідних просторах функцій пов'язана з оцінками знизу малих знаменників складної нелінійної структури [11, 12].

Задача знаходження майже періодичних за просторовими координатами розв'язків системи рівнянь динамічної теорії пружності [13, с. 175] із умовами за часовою змінною, що є лінійними комбінаціями інтегральних умов типу моментів та локальних крайових умов на часовому інтервалі $[0,T]$ вивчалася у роботі [14]. Задачу Коші для цієї системи розглянуто у роботах [15, 16].

У цій роботі вивчається задача з інтегро-крайовими умовами за часовою змінною на $[0,T]$ для узагальненої системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій.

Постановку задачі зроблено у першому пункті роботи, зведення її до задачі для звичайного диференціального рівняння з параметром — у другому пункті, дослідження останньої задачі — у третьому пункті. У четвертому пункті проводиться побудова та оцінювання розв'язку вихідної задачі. Шостий пункт присвячений формулюванню і доведенню теорем про умови розв'язності задачі у шкалах просторів майже періодичних функцій; при цьому використовуються допоміжні леми, а також оцінки та співвідношення з п'ятого пункту. Завершується робота пунктом висновків.

1. Постановка задачі.

У цьому пункті введено область, у якій розглядаєтся задача, систему рівнянь з частинними похідними (систему Ляме) та інтегро-крайові умови, простори майже періодичних функцій і означення розв'язку.

В області $Q=[0,T]\times\mathbb{R}^p$, $p\in\mathbb{N}$, $T>0$, змінних $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_p)$ розглядається задача про знаходження майже періодичного (за векторною змінною x) зі спектром

$$M=\{\mu_k=(\mu_{k1},\dots,\mu_{kp})\in\mathbb{R}^p\colon k\in\mathbb{Z}^p\}$$

розв'язку системи рівнянь з частинними похідними

$$\sigma\partial_t^2 u=\mu^*\partial_x\partial_x^\dagger u+(\lambda^*+\mu^*)\partial_x^\dagger\partial_x u, \qquad (1)$$

який задовольняє інтегро-крайові умови на відрізку $[0,T]$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u(0,x)+\beta_1\int_0^T\frac{t^{r_1}}{r_1!}u(t,x)\,dt=\varphi_1(x),\\ &\alpha_2 u(T,x)+\beta_2\int_0^T\frac{t^{r_2}}{r_2!}u(t,x)\,dt=\varphi_2(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

де $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $\partial_x=\big(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\big)$, $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$, параметри системи σ, λ^*, μ^* — додатні числа, векторні параметри

$$\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2),\quad \vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$$

умов (2) є комплексними, а векторний параметр $\vec{r}=(r_1,r_2)$ — цілочисловий, зокрема $\|\vec{\alpha}\|>0$, $\|\vec{\beta}\|>0$, $r_1\geq 0$, $r_2\geq 0$, † — операція транспонування, $\|\cdot\|$ — евклідова норма.

Задані функції φ_1 і φ_2 та шуканий розв'язок u — вектори розміру p.

У частинному випадку $p=3$ система (1) називається системою Ляме [13, 14], що описує напружений стан ізотропного однорідного пружного тіла у переміщеннях, де σ — густина середовища, λ^*, μ^* — коефіцієнти Ляме, t — час, x — просторова точка.

Якщо $\vec{\beta}=0$, то функції φ_1 і φ_2 в умовах (2) можна вважати вимірюванням функції $u=u(t,\cdot)$ у крайніх точках відрізка $[0,T]$, для протилежного випадку вимірювання в окремих точках доповнюється інтегральними вимірюваннями моментів порядків r_1 та r_2 функції u на всьому відрізку $[0,T]$.

Якщо $\vec{\alpha}=0$, то точкові вимірювання не проводяться.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді функцію змінної t зі значеннями у шкалі $\{\mathbf{H}_M^q\}_{q\in\mathbb{R}}$ гільбертових просторів $\mathbf{H}_M^q$ майже періодичних зі спектром M функцій [14], отриманих поповненням множини $\mathbf{H}_M$ тригонометричних векторних многочленів

$$\begin{aligned} v(x)&=\sum v_k\exp\left(i\mu_k,x\right)\equiv\\ &\equiv\sum v_k\exp\left(i\mu_{k1}x_1+\ldots+i\mu_{kp}x_p\right), \end{aligned}$$

за нормою

$$\|v;\mathbf{H}_M^\alpha\|=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\|v_k\|^2\big(1+\|\mu_k\|^2\big)^\alpha\Big)^{1/2},$$

де $\mu_k=(\mu_{k1},\ldots,\mu_{kp})\in M$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма. На спектр M майже періодичних функцій зі шкали просторів $\mathbf{H}_M^\alpha$ накладаємо умову неповторюваності ($\mu_{\tilde{k}}\neq\mu_{\tilde{\tilde{k}}}$ у разі $\tilde{k}\neq\tilde{\tilde{k}}$) елементів спектру і умову зростання

$$d_1\|k\|^{\theta_1}\leq\|\mu_k\|\leq d_2\|k\|^{\theta_2} \qquad (3)$$

з дійсними параметрами $\vec{d}=(d_1,d_2)$ і $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$, де $0<d_1\leq d_2$, $0<\theta_1\leq\theta_2$ (звідси маємо $\mu_0=0$).

Позначимо $\mathbf{H}_M^{2,\alpha}$ простір таких функцій $u=u(t,x)$, що $\partial_t^j u\in\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}_M^{\alpha-j})$, і вважаємо, що

$$\|u;\mathbf{H}_M^{2,\alpha}\|^2=\sum_{j=0}^{2}\|\partial_t^j u;\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}_M^{\alpha-j})\|^2.$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1), (2) *вважаємо функцію* $u\in\mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}'_M)$, *де простір* $\mathbf{H}'_M$ *спряжений до простору* $\mathbf{H}_M$, *яка на* $[0,T]$ *задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2) *у просторі* $\mathbf{H}'_M$ *та належить до простору* $\mathbf{H}_M^{2,q}$, $q\in\mathbb{R}$.

З означення випливає, що включення

$$\{\varphi_1,\varphi_2\}\subset\mathbf{H}_M^q \qquad (4)$$

є *необхідною умовою* існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$.

2. Зведення до звичайних диференціальних рівнянь. Якщо u — розв'язок задачі (1), (2), то

$$u\equiv u_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(\mu_k,x)} \qquad (5)$$

і $u_k\in\mathbf{C}^2[0,T]$ для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ та є розв'язком такої задачі:

$$\sigma u_k''+\mu^*\|\mu_k\|^2u_k+(\lambda^*+\mu^*)\mu_k^\dagger\mu_k u_k=0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_k(0)+\beta_1\int_0^T\frac{t^{r_1}}{r_1!}u_k(t)\,dt=\varphi_{1k},\\ &\alpha_2 u_k(T)+\beta_2\int_0^T\frac{t^{r_2}}{r_2!}u_k(t)\,dt=\varphi_{2k}, \end{aligned} \qquad (7)$$

де $' = d/dt$, φ_{1k}, φ_{2k} — коефіцієнти Фур'є, зокрема $\varphi_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{jk}e^{i(\mu_k,x)}$, $j=1,2$.

Перетворимо рівняння (6). Нехай матриця перестановок P_k визначена рівністю

$$P_k\mu_k^\dagger = (0,\nu_k)^\dagger,$$

де вектор $\nu_k = (\nu_{k1},\dots,\nu_{kp_k})$, $1\le p_k\le p$, складено з ненульових елементів вектора μ_k, упорядкованих за зростанням, а саме

$$|\nu_{k1}|\le|\nu_{k2}|\le\dots\le|\nu_{kp_k}|,$$

а P_0 — одинична матриця I_p порядку p.

Очевидно, що $\|\mu_0\|=0$, $\mu_0^\dagger\mu_0=0$,

$$P_k\mu_k^\dagger\mu_kP_k^\dagger = \begin{cases}\begin{pmatrix}0&0\\0&\nu_k^\dagger\nu_k\end{pmatrix}, & \text{якщо } p_k<p,\\ \nu_k^\dagger\nu_k\ , & \text{якщо } p_k=p,\end{cases}$$

та $\|\mu_k\|=\|\nu_k\|>0$ для $k\ne0$, тому отримуємо рівняння $(P_0u_0)''=0$ для $k=0$, а для $k\ne0$ рівняння

$$(P_ku_k)''+\gamma_0^2\|\mu_k\|^2P_ku_k+ \\ +(\gamma_1^2-\gamma_0^2)\|\mu_k\|^2\begin{pmatrix}0&0\\0&\nu_k^\dagger\nu_k\end{pmatrix}P_ku_k=0,$$

де $0<\gamma_0^2=\mu^*/\sigma<\gamma_1^2=(\lambda^*+2\mu^*)/\sigma$.

Ранг симетричної матриці $\nu_k^\dagger\nu_k$, $k\ne0$, дорівнює одиниці, вона має порядок p_k, просту структуру і додатне власне значення $\|\mu_k\|^2$. Матрицю H_k її власних векторів таку, що

$$\nu_k^\dagger\nu_kH_k = H_k\,\mathrm{diag}(0,\dots,0,\|\mu_k\|^2)$$

і $1\le\det H_k\le p_k\le p$, задає формула

$$H_k=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&\frac{\nu_{k1}}{\nu_{kp_k}}\\ -\frac{\nu_{k1}}{\nu_{k2}}&1&\dots&0&\frac{\nu_{k2}}{\nu_{kp_k}}\\ 0&-\frac{\nu_{k2}}{\nu_{k3}}&\dots&0&\frac{\nu_{k3}}{\nu_{kp_k}}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\dots&1&\frac{\nu_{k,p_k-1}}{\nu_{kp_k}}\\ 0&0&\dots&-\frac{\nu_{k,p_k-1}}{\nu_{kp_k}}&1\end{pmatrix}.$$

Матриця H_k є добутком нижньотрикутної матриці, яка відрізняється від одиничної I_{p_k} елементами

$$-\frac{\nu_{k1}}{\nu_{k2}},-\frac{\nu_{k2}}{\nu_{kp_k}},\ \dots,-\frac{\nu_{k,p_k-1}}{\nu_{kp_k}}$$

піддіагоналі, і верхньотрикутної, яка відрізняється від одиничної останнім стовпцем

$$\Big(-\frac{\nu_{k1}^2}{\nu_{k1}\nu_{kp_k}},-\frac{\nu_{k1}^2+\nu_{k2}^2}{\nu_{k2}\nu_{kp_k}},\ \dots, \\ -\frac{\nu_{k1}^2+\dots+\nu_{k,p_k-1}^2}{\nu_{k,p_k-1}\nu_{kp_k}},\frac{\|\mu_k\|^2}{\nu_{kp_k}^2}\Big)^\dagger.$$

Тому H_k^{-1} є добутком (блочної) матриці

$$\begin{pmatrix}I_{p_k-1} & \Big(\sum_{\alpha=1}^j\frac{-\nu_{k\alpha}^2}{\nu_{kj}\|\mu_k\|}\Big)_{j=1,\dots,p_k-1}\\ 0 & \nu_{kp_k}/\|\mu_k\|\end{pmatrix}$$

і (блочної) матриці

$$\begin{pmatrix}\tilde H_k^{-1} & 0\\ \big(\nu_{kj}/\|\mu_k\|\big)_{j=1,\dots,p_k-1} & \nu_{kp_k}/\|\mu_k\|\end{pmatrix},$$

в якій $\tilde H_k^{-1}$ є нижньотрикутною матрицею порядку p_k-1 з ненульовими елементами $\nu_{k\beta}/\nu_{k\alpha}$, де $1\le\beta\le\alpha\le p_k-1$

Елементи матриці H_k^{-1} обмежені за модулем числом p_k, а матриці H_k — одиницею.

Вектор $v_k=(v_{k1},\dots,v_{kp})^\dagger$, $k\in\mathbb{Z}^p$, нових невідомих введемо за формулою

$$v_k=Q_ku_k, \tag{8}$$

де $Q_0=I_p$, $Q_k=\begin{pmatrix}I_{p-p_k}&0\\0&H_k^{-1}\end{pmatrix}P_k$ для $p_k<p$, і $Q_k=H_k^{-1}P_k$ для $p_k=p$, тоді для компонент вектора v_k отримуємо задачу

$$\begin{aligned}&v_{kj}''+\gamma_0^2\|\mu_k\|^2v_{kj}=0,\ j=1,\dots,p-1,\\ &v_{kp}''+\gamma_1^2\|\mu_k\|^2v_{kp}=0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1v_{kj}(0)+\beta_1\int_0^T\frac{t^{r_1}}{r_1!}v_{kj}(t)\,dt=\psi_{1k}^j,\\ \alpha_2v_{kj}(T)+\beta_2\int_0^T\frac{t^{r_2}}{r_2!}v_{kj}(t)\,dt=\psi_{2k}^j,\end{aligned} \tag{10}$$

причому $j=1,\dots,p$,

$$(\psi_{\beta k}^1,\dots,\psi_{\beta k}^p)^\dagger=\psi_{\beta k}=Q_k\varphi_{\beta k},\qquad \beta=1,2.$$

Отже, дослідження задачі (9), (10) звелося до побудови і дослідження розв'язку задачі

$$\begin{cases}v''+\gamma^2v=0,\\ \alpha_1v(0)+\beta_1\int_0^T\frac{t^{r_1}}{r_1!}v(t)\,dt=\psi_1,\\ \alpha_2v(T)+\beta_2\int_0^T\frac{t^{r_2}}{r_2!}v(t)\,dt=\psi_2\end{cases} \tag{11}$$

для довільних пар $\{\psi_1, \psi_2\} \subset \mathbb{C}$ і $\gamma \geq 0$, а також до вивчення його асимптотики для великих γ.

3. Дослідження задачі для звичайного диференціального рівняння. Виберемо фундаментальні системи розв'язків рівняння $v'' + \gamma^2 v = 0$, зокрема $\{1, t\}$ для $\gamma = 0$ і $\{e^{i\gamma t}, e^{-i\gamma t}\}$ для $\gamma \neq 0$. Тоді у позначеннях

$$\mathcal{I}_\pm(r) \equiv \mathcal{I}_\pm(r,\gamma) = \int_0^T \frac{t^r}{r!} e^{\pm i\gamma t}\, dt, \tag{12}$$

$$\mathcal{I}^{t,\pm}(r) = e^{i\gamma t}\mathcal{I}_-(r) \pm e^{-i\gamma t}\mathcal{I}_+(r) = = 2\int_0^T \frac{\tau^r}{r!} \begin{cases} \cos\gamma(t-\tau) \\ i\sin\gamma(t-\tau) \end{cases} d\tau, \tag{13}$$

$$\mathcal{I}^\pm(\vec{r}) = \mathcal{I}_+(r_1)\mathcal{I}_-(r_2) \pm \mathcal{I}_-(r_1)\mathcal{I}_+(r_2) = = \int_0^T \frac{t^{r_1}}{r_1!}\mathcal{I}^{t,\pm}(r_2)\, dt = \pm \int_0^T \frac{t^{r_2}}{r_2!}\mathcal{I}^{t,\pm}(r_1)\, dt, \tag{14}$$

де r, r_1, r_2 — невід'ємні цілі числа, отримуємо визначники $\Delta(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, задачі (11)

$$\Delta(0) = \alpha_1\alpha_2 T + + \alpha_1\beta_2 \frac{(r_2+1)T^{r_2+2}}{(r_2+2)!} + \alpha_2\beta_1 \frac{T^{r_1+2}}{(r_1+2)!} + + \beta_1\beta_2 \frac{(r_2-r_1)T^{r_1+r_2+3}}{(r_1+2)!(r_2+2)!}, \tag{15}$$

$$\Delta(\gamma) = = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1\mathcal{I}_+(r_1) & \alpha_1 + \beta_1\mathcal{I}_-(r_1) \\ \alpha_2 e^{i\gamma T} + \beta_2\mathcal{I}_+(r_2) & \alpha_2 e^{-i\gamma T} + \beta_2\mathcal{I}_-(r_2) \end{vmatrix} = = -2i\alpha_1\alpha_2 \sin\gamma T + \alpha_1\beta_2\mathcal{I}^{0,-}(r_2) - - \alpha_2\beta_1\mathcal{I}^{T,-}(r_1) + \beta_1\beta_2\mathcal{I}^-(\vec{r}), \tag{16}$$

які є білінійними формами аргументів α_1, β_1 та α_2, β_2 і цілими функціями щодо T та γ.

Розв'язок $v = v(t) = v_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}(t,\gamma)$ задачі (11) існує для довільних чисел $\psi_1 \in \mathbb{C}$ і $\psi_2 \in \mathbb{C}$ лише тоді, коли $\Delta(\gamma) \neq 0$; він єдиний і має вигляд

$$v(t) = \frac{g_1(t,\gamma)}{\Delta(\gamma)}\psi_1 + \frac{g_2(t,\gamma)}{\Delta(\gamma)}\psi_2, \tag{17}$$

де

$$g_1(t,\gamma) = 2i\alpha_2 \sin\gamma(t-T) + \beta_2\mathcal{I}^{t,-}(r_2), \tag{18}$$

$$g_2(t,\gamma) = -2i\alpha_1 \sin\gamma t \;-\; \beta_1\mathcal{I}^{t,-}(r_1) \tag{19}$$

при $\gamma \neq 0$ і

$$g_1(t,0) = \alpha_2(T-t) + + \beta_2 \frac{T^{r_2+2}}{(r_2+2)!}\Big(r_2 + 1 - (r_2+2)\frac{t}{T}\Big), \tag{20}$$

$$g_2(t,0) = \alpha_1 t - - \beta_1 \frac{T^{r_1+2}}{(r_1+2)!}\Big(r_1 + 1 - (r_1+2)\frac{t}{T}\Big), \tag{21}$$

зокрема для $\gamma > 0$

$$v_{\vec{\alpha},\vec{0}}(t) = \frac{\sin\gamma t}{\sin\gamma T}\frac{\psi_2}{\alpha_2} - \frac{\sin\gamma(t-T)}{\sin\gamma T}\frac{\psi_1}{\alpha_1}, \tag{22}$$

$$v_{\vec{0},\vec{\beta}}(t) = \frac{\mathcal{I}^{t,-}(r_2)}{\mathcal{I}^-(\vec{r})}\frac{\psi_1}{\beta_1} - \frac{\mathcal{I}^{t,-}(r_1)}{\mathcal{I}^-(\vec{r})}\frac{\psi_2}{\beta_2}. \tag{23}$$

Використовуючи для γ два значення

$$\gamma = \gamma_0\|\mu_k\| \quad \text{і} \quad \gamma = \gamma_1\|\mu_k\|, \qquad k \neq 0,$$

з рівності (17) для компонент розв'язку $v_{kj} = v_{kj}(t)$ задачі (9), (10) маємо формули

$$v_{kj}(t) = = \frac{g_1(t,\gamma_0\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_0\|\mu_k\|)}\psi_{1k}^j + \frac{g_2(t,\gamma_0\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_0\|\mu_k\|)}\psi_{2k}^j \tag{24}$$

для індексів $j = 1, \ldots, p-1$ і

$$v_{kp}(t) = = \frac{g_1(t,\gamma_1\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_1\|\mu_k\|)}\psi_{1k}^p + \frac{g_2(t,\gamma_1\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_1\|\mu_k\|)}\psi_{2k}^p. \tag{25}$$

4. Побудова розв'язку задачі (1), (2). З рівностей (24) і (25) для розв'язків v_{kj}, де $k \neq 0$, задачі (9), (10) за формулою (8) будуємо вектор u_k — розв'язок задачі (6), (7):

$$u_k(t) = Q_k^{-1}\sum_{j=1}^{2} \operatorname{diag}\Big(\frac{g_j(t,\gamma_0\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_0\|\mu_k\|)} I_{p-1}, \frac{g_j(t,\gamma_1\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_1\|\mu_k\|)}\Big)\psi_{jk} = \sum_{j,l=1}^{2} \frac{g_j(t,\gamma_l\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)}\Pi_k^l \varphi_{jk},$$

тут $\Pi_k^1 \equiv \Pi(\mu_k)$ — проектор на одновимірний підпростір, заданий вектором μ_k, тобто

$$\Pi_k^1 = \frac{\mu_k^\dagger \mu_k}{\|\mu_k\|^2}, \text{ а також } \Pi_k^0 = I_p - \Pi(\mu_k),$$

а за формулою (5) будуємо розв'язок задачі (1), (2):

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} e^{i(\mu_k,x)} \sum_{j,l=1}^{2} \frac{g_j(t,\gamma_l\|\mu_k\|)}{\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)}\Pi_k^l\varphi_{jk}, \quad (26)$$

де

$$g_1(t,\gamma_l\|\mu_k\|) = 2i\alpha_2\sin\gamma_l\|\mu_k\|(t-T)+ + \beta_2\mathcal{I}^{t,-}(r_2,\gamma_l\|\mu_k\|), \quad (27)$$

$$g_2(t,\gamma_l\|\mu_k\|) = -2i\alpha_1\sin\gamma_l\|\mu_k\|t- - \beta_1\mathcal{I}^{t,-}(r_1,\gamma_l\|\mu_k\|), \quad (28)$$

для довільного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ і $l = 0,1$, або

$$g_1(t,\gamma_l\|\mu_k\|) = 2i\alpha_2\sin\gamma_l\|\mu_k\|(t-T)+ + 2i\beta_2\int_0^T \frac{\tau^{r_2}}{r_2!}\sin\gamma_l\|\mu_k\|(t-\tau)\,d\tau, \quad (29)$$

$$g_2(t,\gamma_l\|\mu_k\|) = -2i\alpha_1\sin\gamma_l\|\mu_k\|t- - 2i\beta_1\int_0^T \frac{\tau^{r_1}}{r_1!}\sin\gamma_l\|\mu_k\|(t-\tau)\,d\tau. \quad (30)$$

Якщо $k = 0$, то відповідний доданок у сумі (26) зводиться до такого вигляду:

$$\big(g_1(t,0)\varphi_{10} + g_2(t,0)\varphi_{20}\big)/\Delta(0).$$

Для частинного випадку $\vec{\beta} = 0$, коли

$$\Delta(0) = \alpha_1\alpha_2 T \neq 0 \ \text{ і } \ \Delta(\gamma) = -2i\alpha_1\alpha_2\sin\gamma T,$$

отримуємо необхідну умову існування розв'язку

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\} \quad \sin\gamma_0\|\mu_k\|T\sin\gamma_1\|\mu_k\|T \neq 0,$$

за якої формула (26) має вигляд

$$u_{\vec{\alpha},\vec{0}} = \frac{T-t}{T}\frac{\varphi_{10}}{\alpha_1} + \frac{t}{T}\frac{\varphi_{20}}{\alpha_2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} e^{i(\mu_k,x)}\times \times\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\sin\gamma_l\|\mu_k\|(T-t)}{\alpha_1\sin\gamma_l\|\mu_k\|T}\Pi_k^l\varphi_{1k}+ + \sum_{l=1}^{2}\frac{\sin\gamma_l\|\mu_k\|t}{\alpha_2\sin\gamma_l\|\mu_k\|T}\Pi_k^l\varphi_{2k}\Big). \quad (31)$$

У випадку $\vec{\alpha} = 0$, коли

$$\Delta(0) = \beta_1\beta_2\frac{(r_2-r_1)T^{r_1+r_2+3}}{(r_1+2)!(r_2+2)!},$$
$$\Delta(\gamma) = \beta_1\beta_2\mathcal{I}^-(\vec{r},\gamma),$$

отримуємо необхідну умову існування розв'язку: $r_2 \neq r_1$ і $\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$

$$\mathcal{I}^-(\vec{r},\gamma_0\|\mu_k\|)\mathcal{I}^-(\vec{r},\gamma_1\|\mu_k\|) \neq 0,$$

за якої маємо формулу

$$u_{\vec{0},\vec{\beta}} = \frac{(r_2+1)(T-t)-t}{r_2-r_1}\frac{(r_1+2)!}{\beta_1T^{r_1+2}}\varphi_{10}- - \frac{(r_1+1)(T-t)-t}{r_2-r_1}\frac{(r_2+2)!}{\beta_2T^{r_2+2}}\varphi_{20}+ + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} e^{i(\mu_k,x)}\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\mathcal{I}^{t,-}(r_2,\gamma_l\|\mu_k\|)}{\beta_1\mathcal{I}^-(\vec{r},\gamma_l\|\mu_k\|)}\Pi_k^l\varphi_{1k}- - \sum_{l=1}^{2}\frac{\mathcal{I}^{t,-}(r_1,\gamma_l\|\mu_k\|)}{\beta_2\mathcal{I}^-(\vec{r},\gamma_l\|\mu_k\|)}\Pi_k^l\varphi_{2k}\Big). \quad (32)$$

У разі $\vec{\beta} = 0$ (задача Діріхле) формальний розв'язок задачі (1), (2) може бути записаний також у вигляді

$$u_{\vec{\alpha},\vec{0}} = \frac{T-t}{T}\frac{\varphi_{10}}{\alpha_1} + \frac{t}{T}\frac{\varphi_{20}}{\alpha_2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} e^{i(\mu_k,x)}\times \times\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\sin\gamma_l\|\mu_k\|(T-t)}{\alpha_1\sin(\gamma_l\|\mu_k\|T-m_{1k}\pi)}\Pi_k^l\varphi_{1k}+ + \sum_{l=1}^{2}\frac{\sin\gamma_l\|\mu_k\|t}{\alpha_2\sin(\gamma_l\|\mu_k\|T-m_{1k}\pi)}\Pi_k^l\varphi_{2k}\Big), \quad (33)$$

де m_{lk} — невід'ємні цілі числа і

$$\big|\gamma_l\|\mu_k\|T - m_{lk}\pi\big| \leq \frac{\pi}{2}, \quad l = 0,1. \quad (34)$$

Тут використано властивість: для довільного числа $y \in \mathbb{R}$ існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що

$$\sin\pi y = (-1)^m\sin\pi(y-m) \ \text{ і } \ |y-m| \leq \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, у формулі (16) для визначників $\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|T)$, де $l = 1,2$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, замість виразів $\sin(\gamma_l\|\mu_k\|T)$ можна використовувати відповідно $\sin(\gamma_l\|\mu_k\|T - m_{lk}\pi)$.

Норму розв'язку (26) дає формула

$$\|u;\mathbf{H}^{2,q}_M\|^2=\sum_{\alpha=0}^{2}\max_{0\le t\le T}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\bigl(1+\|\mu_k\|^2\bigr)^{q-\alpha}\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{2}\Bigl(\frac{|d^\alpha g_j(t,\gamma_l\|\mu_k\|)/dt^\alpha|^2}{|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)|^2}\|\Pi^l_k\varphi_{jk}\|^2\Bigr),$$

з якої отримуємо оцінку

$$\|u;\mathbf{H}^{2,q}_M\|^2\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,l=1}^{2}\bigl(1+\|\mu_k\|^2\bigr)^{q}\times$$
$$\times\sum_{\alpha=0}^{2}\frac{G_{j\alpha}(\gamma_l,\|\mu_k\|)}{\bigl(1+\|\mu_k\|^2\bigr)^{\alpha}}\frac{\|\Pi^l_k\varphi_{jk}\|^2}{|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)|^2},\quad(35)$$

де для $\alpha\in\{0,1,2\}$ і $\{j,l\}\subset\{1,2\}$ позначено

$$G_{j\alpha}(\gamma_l,\|\mu_k\|)=\max_{0\le t\le T}\Bigl|\frac{d^\alpha g_j(t,\gamma_l\|\mu_k\|)}{dt^\alpha}\Bigr|^2.$$

5. Допоміжні оцінки та співвідношення. Для встановлення умов існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) дамо необхідні оцінки і рекурентні співвідношення для величин $\mathcal{I}_\pm(r)$, $\mathcal{I}^{t,\pm}(r)$ та $\mathcal{I}^\pm(\vec{r})$.

Справджуються такі (порядків σ_0 і σ_1, σ_2) рекурентні співвідношення:

$$\mathcal{I}_\pm(r)=\Bigl(\frac{\pm i}{\gamma}\Bigr)^{\sigma}_{0}\mathcal{I}_\pm(r-\sigma_0)-$$
$$-e^{\pm i\gamma T}\sum_{\alpha=r-\sigma_0+1}^{r}\Bigl(\frac{\pm i}{\gamma}\Bigr)^{r-\alpha+1}\frac{T^\alpha}{\alpha!},\quad(36)$$

$$\mathcal{I}^{t,\pm}(r)=\Bigl(\frac{-i}{\gamma}\Bigr)^{\sigma}_{0}\mathcal{I}^{t,\pm(-1)^\sigma_0}(r-\sigma_0)-$$
$$-\sum_{\alpha=r-\sigma_0+1}^{r}\Bigl(\frac{-i}{\gamma}\Bigr)^{r-\alpha+1}\frac{T^\alpha}{\alpha!}\mathcal{I}^{t-T,\mp(-1)^{r-\alpha}}(-1),\quad(37)$$

$$\mathcal{I}^\pm(\vec{r})=(-1)^{\sigma_2}\Bigl(\frac{i}{\gamma}\Bigr)^{\sigma_1+\sigma_2}\times$$
$$\times\mathcal{I}^{\pm(-1)^{\sigma_1-\sigma_2}}(r_1-\sigma_1,r_2-\sigma_2)+$$
$$+\Bigl(\frac{-i}{\gamma}\Bigr)^{\sigma_2+1}\sum_{\alpha_1=r_1-\sigma_1+1}^{r_1}\Bigl(\frac{i}{\gamma}\Bigr)^{r_1-\alpha_1}\frac{T^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\times$$
$$\times\mathcal{I}^{T,\mp(-1)^{\sigma_2+r_1-\alpha_1}}(r_2-\sigma_2)\pm$$
$$\pm\Bigl(\frac{-i}{\gamma}\Bigr)^{\sigma_1+1}\sum_{\alpha_2=r_2-\sigma_2+1}^{r_2}\Bigl(\frac{i}{\gamma}\Bigr)^{r_2-\alpha_2}\frac{T^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\times$$
$$\times\mathcal{I}^{T,\mp(-1)^{\sigma_1+r_2-\alpha_2}}(r_1-\sigma_1)+$$
$$+\frac{1}{\gamma^2}\sum_{\substack{\alpha_1=r_1-\sigma_1+1\\ \alpha_2=r_2-\sigma_2+1}}^{r_1,r_2}\Bigl((-1)^{r_2-\alpha_2}\pm(-1)^{r_1-\alpha_1}\Bigr)\times$$
$$\times\Bigl(\frac{i}{\gamma}\Bigr)^{r_1+r_2-\alpha_1-\alpha_2}\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!}\quad(38)$$

(якщо $\sigma_0=0$, то суму $\sum_{\alpha=r-\sigma_0+1}^{r}$ замінюємо нулем; аналогічно для порядків σ_1 та σ_2), причому $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathcal{I}_\pm(-1)=1$,

$$\mathcal{I}^{t,+}(-1)=2\cos\gamma t,\quad\mathcal{I}^{t,-}(-1)=2i\sin\gamma t,$$

у формулах (36)–(38) вважаємо $t\in[0,T]$,

$$\sigma_0{=}0,1,\dots,r{+}1,\quad\sigma_j{=}0,1,\dots,r_j{+}1,\ j{=}1,2.$$

Також справджуються при $t\in[0,T]$ оцінки

$$\bigl|\mathcal{I}_\pm(r)\bigr|\le\frac{2}{\gamma}\frac{T^r}{r!},\qquad r\ge0,\quad(39)$$

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{T^r}{r!}\le\bigl|\mathcal{I}_\pm(r)\bigr|\le\frac{3}{2\gamma}\frac{T^r}{r!},\ \gamma{\ge}\frac{4r}{T},\ r{\ge}1,\quad(40)$$

$$|\mathcal{I}^{t,\pm}(r)|\le\frac{4}{\gamma}\frac{T^r}{r!},\qquad r\ge0,\quad(41)$$

$$|\mathcal{I}^{t,\pm}(r)|\le\frac{3}{\gamma}\frac{T^r}{r!},\ \gamma\ge\frac{4r}{T},\ r\ge1,\quad(42)$$

$$|\mathcal{I}^\pm(\vec{r})|\le\frac{8}{\gamma^2}\frac{T^{r_1+r_2}}{r_1!r_2!},\quad r_1\ge0,\ r_2\ge0.\quad(43)$$

Рекурентне співвідношення (36) отримується інтегруванням частинами у формулі (12), рекурентне співвідношення (37) — підстановкою (36) у формулу (13), рекурентне співвідношення (38) — підстановкою (36) (при $\sigma_0=\sigma_1$ для $\mathcal{I}_\pm(r_1)$ і при $\sigma_0=\sigma_2$ для $\mathcal{I}_\pm(r_2)$) у формулу (14); нерівності (39) і (40) дістаємо з оцінки

$$\bigl|\mathcal{I}_\pm(r-1)\bigr|\le\int_0^T\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,dt=\frac{T^r}{r!},\quad r\ge1,$$

та формули (36) для $\sigma_0 = 1$ і $\sigma_0 = 2$:

$$\mathcal{I}_{\pm}(r) = \pm\frac{i}{\gamma}\Big(\mathcal{I}_{\pm}(r-1) - e^{\pm i\gamma T}\frac{T^r}{r!}\Big) =$$
$$= -\frac{1}{\gamma^2}\Big(\mathcal{I}_{\pm}(r-2) - e^{\pm i\gamma T}\Big(\frac{T^{r-1}}{(r-1)!} \mp i\gamma\frac{T^r}{r!}\Big)\Big);$$

нерівності (41) і (42) дістаємо з формули (37) для $\sigma_0 = 1$ і $\sigma_0 = 2$:

$$\mathcal{I}^{t,\pm}(r) = \frac{-i}{\gamma}\Big(\mathcal{I}^{t,\mp}(r-1) - \frac{T^r}{r!}\mathcal{I}^{t-T,\mp}(-1)\Big) =$$
$$= -\frac{1}{\gamma^2}\Big(\mathcal{I}^{t,\pm}(r-2) -$$
$$-\frac{T^{r-1}}{(r-1)!}\mathcal{I}^{t-T,\pm}(-1) - i\gamma\frac{T^r}{r!}\mathcal{I}^{t-T,\mp}(-1)\Big);$$

нерівність (43) виводимо з формул (14), (39).

6. Умови однозначної розв'язності задачі.

6. Умови однозначної розв'язності задачі. Встановимо однозначну розв'язність задачі (1), (2) у двох випадках:

$$1^\circ)\ \ \alpha_1\alpha_2 \neq 0, \quad 2^\circ)\ \ \vec{\alpha} = 0 \quad (\beta_1\beta_2 \neq 0),$$

приймаючи таке означення розв'язності.

Означення 2. *Задачу* (1), (2) *називаємо однозначно розв'язною у шкалі просторів* $\{\mathbf{H}_M^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, *якщо існують такі дійсні числа* q *і* q', *що для пари довільних функцій* φ_1 *та* φ_2 *з простору* $\mathbf{H}_M^{q'}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}_M^{2,q}$.

Спочатку дамо необхідну та достатню умову однозначної розв'язності задачі (1), (2), а потім доведемо теореми про безумовну розв'язність.

Будемо вважати, що T належить відрізку $[T_0, T_1]$, де $0 < T_0 < T_1 < \infty$.

Використовуємо позначення

$$\Gamma_\gamma^\pm = d/dT \pm i\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$
$$\Pi_\tau\varphi = \sum_{\|\mu_k\|<\tau}\varphi_k e^{i(\mu_k,x)}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$
$$\zeta(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(1+\|\mu_k\|^2\big)^{\omega/2}, \quad \omega > \frac{p}{\theta_1},$$

де $\varphi = \varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(\mu_k,x)}$, і наступну лему [17] про міру множини точок відрізка, у яких квазімногочлен має малі значення.

Лема 1. *Нехай* f — *квазімногочлен і*

$$f(y) = \sum_{j=1}^m p_j(y)e^{\lambda_j y}, \quad \lambda_j \neq \lambda_q \quad (j \neq q),$$

де $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_m|$, p_j — *многочлен степеня* $n_j - 1$, $n_j \in \mathbb{N}$. *Якщо для деяких комплексних чисел* $a_1, \ldots, a_n$ *і* $\delta > 0$ *виконується умова*

$$\forall y \in [a,b] \subset \mathbb{R} \quad \Big|f^{(n)}(y) + \sum_{j=1}^n a_j f^{(n-j)}(y)\Big| \geq \delta,$$

то для довільного ε *з інтервалу*

$$\Big(0,\ \frac{\delta}{2n+2}\big(1 + \max_{1\leq j\leq n}|a_j|^{1/j}\big)^{-n}\Big)$$

справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\{y \in [a,b] \colon |f(y) < \varepsilon|\} \leq c(1+|\lambda_m|)\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

де c *може залежати лише від довжини проміжку* $[a,b]$ *і чисел* n *та* $n_1 + \cdots + n_m$.

Теорема 1. *Для однозначної розв'язності задачі* (1), (2) *необхідно і достатньо, щоб для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконувалась умова*

$$\big|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)\big| \geq C_{0l}(1+\|\mu_k\|^2)^{q_0/2}, \qquad (44)$$

де q_0 — *дійсне число,* $C_{0l} > 0$ *для* $l = 1, 2$.

Доведення. Необхідність. Доводимо методом від супротивного: нехай умова теореми не виконується, тоді існує така послідовність векторів $k_j^* \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, які не повторюються, і зростаюча послідовність натуральних чисел m_j, що для $l^* = 0$, або $l^* = 1$, виконується умова

$$\forall j\in\mathbb{N} \quad \big|\Delta(\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|)\big| \leq (1+\|\mu_{k_j^*}\|^2)^{-m_j/2}. \quad (45)$$

Оскільки спектр M не має скінченних точок скупчення, можемо вибрати підмножину J натуральних чисел j, для яких при $\alpha_2 \neq 0$ і деякому $\theta > p/\theta_1$ виконуються нерівності

$$\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\| \geq \max\Big(1, 4\frac{|\beta_2|}{|\alpha_2|}\frac{T^{r_2}}{r_2!}\Big),$$
$$\big(1+\|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{\theta/2} \geq \frac{8}{|\alpha_2|}.$$

Для квазімногочлена $g_1(\cdot, \gamma_l\|\mu_k\|)$ згідно з лемою 1 розглянемо для випадку $\alpha_2 \neq 0$ функції h_j, $j \in J$, такого вигляду:

$$h_j(t) = \Big(\frac{d}{dt} + i\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|\Big) g_1(t, \gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|).$$

З формул (13), (27) та (29) маємо

$$h_j(t) = 2i\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\| e^{i\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|t} \times$$
$$\times \big(\alpha_2 e^{-i\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|T} + \beta_2 \mathcal{I}_-(r_2)\big), \quad j \in J,$$

і $|h_j(t)| \geq |\alpha_2|\gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|$ для всіх $t \in [0,T]$. За лемою 1 міра множини чисел $t \in [0,T]$, для яких не виконується нерівність

$$|g_1(t, \gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\|)| \geq \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{-\theta/2} \qquad (46)$$

для фіксованого $j \in J$, не перевищує числа

$$\frac{2c}{|\alpha_2|}\big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{-\theta/2},$$

де $\theta > p/\theta_1$, c — стала з леми 1.

Зі збіжності ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \big(1+\|\mu_k\|^2\big)^{-\theta/2}$ і леми Бореля–Кантеллі [11] випливає, що для майже всіх точок $t \in [0,T]$ нерівність (46) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $j \in J$. Позначимо одну з таких точок t^*, а J^* — нескінченну підмножину $j \in J$, для якої виконуються нерівності (46) у точці t^* і $m_j \geq q' - q + \theta + 1$, де q, q' — довільні фіксовані дійсні числа.

Запишемо оцінку норми розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$ за таких умов:

функції φ_1, φ_2 належать до простору $\mathbf{H}_M^{q'}$, але функції

$$\sum_{j\in J^*} \Pi_{k_j^*}^l \varphi_{1k_j^*} e^{i(\mu_{k_j^*},x)}, \quad l = 0, 1,$$

не належать до простору $\mathbf{H}_M^{q'+1}$, якщо $l^* = 0$ і $l^* = 1$ відповідно.

З формули (35), припущення (45) і оцінки (46) виводимо

$$\|u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \geq \|u(t^*,\cdot); \mathbf{H}_M^q\|^2 \geq$$
$$\geq \sum_{j\in J^*} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{m_j+q-\theta} \|\Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*}\|^2 \geq$$
$$\geq \sum_{j\in J^*} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{q'+1} \|\Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*}\|^2 = \infty$$

для $l^* = 0$ та

$$\|u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \geq \|u(t^*,\cdot); \mathbf{H}_M^q\|^2 \geq$$
$$\geq \sum_{j\in J^*} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{q'+1} \|\Pi_{k_j^*}^1 \varphi_{1k_j^*}\|^2 = \infty$$

для $l^* = 1$.

Необхідність доведено для $\alpha_2 \neq 0$.

Якщо ж $\alpha_2 = 0$, то при $\alpha_1 \neq 0$, аналогічно встановлюємо необхідність умов теореми, розглядаючи квазіполіном $g_2(t, \gamma_l\|\mu_k\|)$ і вибираючи функцію $\varphi_2 \in \mathbf{H}_M^{q'} \setminus \mathbf{H}_M^{q'+1}$.

Нарешті, якщо $\vec{\alpha} = 0$, то $\beta_1\beta_2 \neq 0$ і $r_1 \neq r_2$, оскільки розв'язок задачі (1), (2) неєдиний у разі $r_1 = r_2$. Тому залишається перевірити випадок $0 \leq r_1 < r_2$.

Для цього використовуємо множину

$$J_1 = \Big\{j \in \mathbb{N}\colon \gamma_{l^*}\|\mu_{k_j^*}\| \geq \frac{4r_2}{T},\ m_j \geq q' - q + 2\Big\},$$

де q, q' — довільні фіксовані дійсні числа, $l^* = 0$, або $l^* = 1$, і нерівність

$$\|u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \geq \|u(T,\cdot); \mathbf{H}_M^q\|^2 \geq$$
$$\geq |\beta_2|^2 \sum_{j\in J_1} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^q \times$$
$$\times \frac{\big|\mathcal{I}^{T,-}(r_2, \gamma_0\|\mu_{k_j^*}\|)\big|^2}{|\Delta(\gamma_0\|\mu_{k_j^*}\|)|^2} \|\Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*}\|^2.$$

За формулою (37) для $\sigma_0 = 1$ і нерівністю (41) за умови $\gamma_l\|\mu_k\| \geq 4r_2/T$ отримуємо оцінку

$$\big|\mathcal{I}^{T,-}(r_2, \gamma_l\|\mu_k\|)\big| \geq \frac{1}{\gamma_l\|\mu_k\|}\frac{T^{r_2}}{r_2!}, \quad r_2 \geq 1,$$

з якої випливає

$$\|u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \geq \Big(\frac{|\beta_2|}{\gamma_0}\frac{T^{r_2}}{r_2!}\Big)^2 \times$$
$$\times \sum_{j\in J_1} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{m_j+q-1} \|\Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*}\|^2 \geq$$
$$\geq \Big(\frac{|\beta_2|}{\gamma_0}\frac{T^{r_2}}{r_2!}\Big)^2 \sum_{j\in J_1} \big(1 + \|\mu_{k_j^*}\|^2\big)^{q'+1} \times$$
$$\times \|\Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*}\|^2 = \infty,$$

тобто розв'язок не належить до простору $\mathbf{H}_M^{2,q}$, якщо функція $\sum_{j\in J_1} \Pi_{k_j^*}^0 \varphi_{1k_j^*} e^{i(\mu_{k_j^*},x)}$ не належить до простору $\mathbf{H}_M^{q'+1}$.

Аналогічний результат є також і для випадку $l^* = 1$.

Достатність. З умови (44) випливає існування для $k \in \mathbb{Z}^p$ і довільних правих частин єдиного розв'язку задачі (6), (7).

З правила диференціювання

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}\begin{bmatrix}\mathcal{I}^{t,\pm}(r)\\ \mathcal{I}^{t-T,\pm}(r)\end{bmatrix} = (i\gamma)^{\alpha}\begin{bmatrix}\mathcal{I}^{t,\pm(-1)^{\alpha}}(r)\\ \mathcal{I}^{t-T,\pm(-1)^{\alpha}}(r)\end{bmatrix}$$

та формул (27) і (28) запишемо

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}\begin{bmatrix}g_1(t,\gamma_l\|\mu_k\|)\\ g_2(t,\gamma_l\|\mu_k\|)\end{bmatrix} = (i\gamma_l\|\mu_k\|)^{\alpha}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\alpha_2\mathcal{I}^{t-T,(-1)^{\alpha+1}}(-1)+\beta_2\mathcal{I}^{t,(-1)^{\alpha+1}}(r_2)\\ -\alpha_1\mathcal{I}^{t,(-1)^{\alpha+1}}(-1)-\beta_1\mathcal{I}^{t,(-1)^{\alpha+1}}(r_1)\end{bmatrix}.$$

Враховуючи формули (18)–(21) та оцінку (41) для $k\in\mathbb{Z}^p$, $l=0,1$, $\alpha=0,1,2$ маємо

$$\left|\frac{d^{\alpha}g_j(t,\gamma_l\|\mu_k\|)}{dt^{\alpha}}\right| \le c_{1j}\gamma_l^{\alpha}\big(1+\|\mu_k\|^2\big)^{\alpha/2}, \quad (47)$$

причому

$$c_{1,\omega(j)} = \max\Big(2|\alpha_j| + \frac{4|\beta_j|}{\gamma_0 d_1}\frac{T^{r_j}}{r_j!},$$
$$|\alpha_j|T + |\beta_j|\frac{T^{r_j+2}}{(r_j+1)!}\Big),$$

де $\omega(1)=2$, а $\omega(2)=1$.

Тому, підставляючи останню нерівність у (35), для довільних елементів φ_1 і φ_2 з простору $\mathbf{H}_M^{q-q_0}$ встановлюємо оцінку

$$\|u;\mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le \sum_{j=1}^{2}\frac{C_{1j}^2}{\min\limits_{l=0,1}C_{0l}^2}\|\varphi_j;\mathbf{H}_M^{q-q_0}\|^2 < \infty,$$

де $C_{1j} = c_{1j}\sqrt{1+\gamma_1^2+\gamma_l^4}$.

Отже, за умови (44) задача (1), (2) однозначно розв'язна у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$, а її розв'язок неперервно залежить від правих частин задачі з простору $\mathbf{H}_M^{q-q_0}$.

З формул (35), (47) маємо оцінку

$$\|u;\mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha=0}^{2}\frac{c_{1j}^2\gamma_l^{2\alpha}}{|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)|^2}\times$$
$$\times(1+\|\mu_k\|^2)^q\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_{jk}\|^2, \quad (48)$$

яка потребує лише дослідженння квазіполіномів $\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|) = \Delta_{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{r},T}(\gamma_l\|\mu_k\|)$ за змінною T на відрізку $[T_0,T_1]$, де $0<T_0<T_1$.

У разі $T=T_0=0$ задача (1), (2) очевидно не має єдиного розв'язку

$$\big(\det\Delta_{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{r},0}(\gamma_l\|\mu_k\|) = \det\Delta_{\vec{\alpha},\vec{0},\vec{0},0}(\gamma_l\|\mu_k\|)=0\big).$$

У залежності від векторів $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{r}$ встановимо оцінку (44) з деякими сталими C_0 і q_0. Спостерігаємо виникнення проблеми малих знаменників при деяких значеннях $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{r}$ і її відсутність для інших значень, зокрема, з оцінок (41)–(43) випливає, що

$$\Delta(\gamma) + 2i\alpha_1\alpha_2\sin\gamma T \underset{\gamma\to\infty}{\to} 0,$$

а, отже, $\Delta(\gamma_j) \underset{\gamma_j\to\infty}{\to} 0$ на підпослідовностях γ_j, для яких $\sin\gamma_j T \underset{\gamma_j\to\infty}{\to} 0$.

Доцільно розбити дослідження знаменників $\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|))$ за значенням вектора $\vec{\alpha}$ (розглядатимемо випадки $\alpha_1\alpha_2\ne 0$ і $\vec{\alpha}=0$).

Лема 2. *Нехай $\alpha_1\alpha_2 \ne 0$, тоді для довільного числа $\varepsilon_{lk} \in \Big(0,\dfrac{|\alpha_1\alpha_2|\gamma_0}{4(\gamma_0+\gamma_1)}\Big)$, де $l\in\{0,1\}$, вектор $k\in\mathbb{Z}^p$ задовольняє умову $\|\mu_k\|\ge\tau_1$, а число $\tau_1>0$ задає формула*

$$\tau_1 = \gamma_0^{-1}\max\Big(1,6\frac{|\beta_2|}{|\alpha_2|}\frac{T_1^{r_2}}{r_2!} + 4\frac{|\beta_1|}{|\alpha_1|}\frac{T_1^{r_1}}{r_1!} +$$
$$+\frac{4}{r_1}\frac{|\beta_1\beta_2|}{|\alpha_1\alpha_2|}\frac{T_1^{r_1+r_2+1}}{r_1!r_2!}\Big),$$

міра множини

$$\{T\in[T_0,T_1]\colon |\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)| < \varepsilon_{lk}\}$$

не перевищує числа $\dfrac{c}{|\alpha_1\alpha_2|}\dfrac{\gamma_0+\gamma_1}{\gamma_0}\varepsilon_{lk}$.

Доведення. Нехай $h(T,\gamma) = \Gamma_\gamma^+\Delta(\gamma)$, тоді

$$h(T,\gamma) = 2i\alpha_1\alpha_2\gamma e^{i\gamma T} + \alpha_1\beta_2\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{0,-}(r_2) -$$
$$-\alpha_2\beta_1\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{T,-}(r_1) + \beta_1\beta_2\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{-}(\vec{r}),$$

де $\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{0,-}(r) = i\gamma\mathcal{I}^{0,-}(r) - \frac{T^r}{r!}\mathcal{I}^{T,-}(-1)$,

$$\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{T,-}(r) = 2\Big(e^{i\gamma T}\mathcal{I}_-(r-1) - \frac{T^r}{r!}\Big),$$
$$\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(\vec{r}) = \frac{T^{r_1}}{r_1!}\mathcal{I}^{T,-}(r_2)- \\ - \frac{T^{r_2}}{r_2!}\mathcal{I}^{T,-}(r_1) + i\gamma\mathcal{I}^-(\vec{r}),$$

З формул (41)–(43) маємо нерівності

$$|\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{0,-}(r)| \le 6\frac{T^r}{r!}, \quad |\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^{T,-}(r)| \le 4\frac{T^r}{r!},$$
$$|\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(\vec{r})| \le \frac{16}{\gamma}\frac{T^{r_1+r_2}}{r_1!r_2!},$$

тому для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ з властивістю $\|\mu_k\| \ge \tau_1$ на $[T_0, T_1]$ справджується оцінка

$$|h(T,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge |\alpha_1\alpha_2|\Big(2\gamma_l\|\mu_k\| - 6\frac{|\beta_2|}{|\alpha_2|}\frac{T^{r_2}}{r_2!} - \\ - 4\frac{|\beta_1|}{|\alpha_1|}\frac{T^{r_1}}{r_1!} - \frac{16}{\gamma_l d_1}\frac{|\beta_1\beta_2|}{|\alpha_1\alpha_2|}\frac{T^{r_1+r_2+1}}{r_1!r_2!}\Big) \ge \\ \ge |\alpha_1\alpha_2|(2\gamma_l\|\mu_k\| - \gamma_0\tau_1) \ge |\alpha_1\alpha_2|\gamma_l\|\mu_k\| > 0.$$

Тоді за лемою 1 для кожного

$$\varepsilon_{lk} \in \Big(0, \frac{|\alpha_1\alpha_2|\gamma_0}{4(\gamma_0+\gamma_1)}\Big) \subset \Big(0, \frac{|\alpha_1\alpha_2|\gamma_l\|\mu_k\|}{4(1+\gamma_1\|\mu_k\|)}\Big)$$

нерівність $|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)| < \varepsilon_{lk}$ виконується на підмножині відрізка $[T_0, T_1]$, міра якої не перевищує

$$\frac{c(1+\gamma_1\|\mu_k\|)}{|\alpha_1\alpha_2|\gamma_l\|\mu_k\|}\varepsilon_{lk} \le \frac{c}{|\alpha_1\alpha_2|}\frac{\gamma_0+\gamma_1}{\gamma_0}\varepsilon_{lk}.$$

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай $\alpha_1\alpha_2 \ne 0$, виконуються умови $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathbf{H}_M^{q_*+q}$ і $q_* > p/\theta_1$, тоді для майже всіх чисел $T \in [T_0, T_1]$, тобто для $T \in \mathcal{T}_0$, де $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0 = T_1 - T_0$, існує єдиний розв'язок и задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$; цей розв'язок є сумою*

$$u = \Pi_{\tau_1}u + (I - \Pi_{\tau_1})u,$$

де $\Pi_{\tau_1}u$ — майже періодичний многочлен, причому τ_1 — число з леми 2, і для довільного $\varepsilon \in \big(0, c\zeta(q_*)/2\big)$ існує множина $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_0$ з мірою $\operatorname{meas}\mathcal{T}_\varepsilon \ge T_1 - T_0 - \varepsilon$, причому для всіх $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ маємо нерівність

$$\|(I-\Pi_{\tau_1})u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le (1+\gamma_1^2+\gamma_1^4)\Big(\frac{2c\zeta(q_*)}{\varepsilon|\alpha_1\alpha_2|}\Big)^2\times \\ \times\Big(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\Big)^2\sum_{j=1}^{2}c_{1j}^2\|(I-\Pi_{\tau_1})\varphi_j; \mathbf{H}_M^{q_*+q}\|^2. \quad (49)$$

Доведення. З леми 2 випливає, що міра множини чисел $T \in [T_0, T_1]$, для яких при фіксованих $l \in \{0, 1\}$ і $k \in \mathbb{Z}^p$, де $\|\mu_k\| \ge \tau_1$, не виконується нерівність

$$|\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \\ \ge \frac{\varepsilon|\alpha_1\alpha_2|\gamma_0}{2c\zeta(q_*)(\gamma_0+\gamma_1)}(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2} \quad (50)$$

не перевищує числа $\varepsilon(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2}/2\zeta(q_*)$. Оскільки

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2} = \zeta(q_*) < \infty,$$

то за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх $T \in [T_0, T_1]$ оцінка (50) справджується для всіх векторів k з великою нормою $\|k\|$. Вилучимо з відрізка $[T_0, T_1]$ множину міри нуль чисел T, для яких $\Delta(\gamma_l\|\mu_k\|) = 0$ хоча б для одної пари (l, k) і позначимо отриману множину $\mathcal{T}_0$. Очевидно, $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0 = T_1 - T_0$, а для кожної точки $T \in \mathcal{T}_0$ справджується необхідна та достатня умова розв'язності (44) з $q_0 = -q_*$ і сталими

$$0 < C_{0l} \le \frac{\varepsilon|\alpha_1\alpha_2|\gamma_0}{2c\zeta(q_*)(\gamma_0+\gamma_1)}, \quad l = 0, 1;$$

тому перше твердження теореми випливає з доведення теореми 1.

Позначимо $\mathcal{T}_\varepsilon$ множину $\mathcal{T}_0$, з якої вилучено об'єднання міри не більше ε множин таких чисел $T \in [T_0, T_1]$, для яких не справджується (50) для фіксованих пар

$$(l, k) \in \{0, 1\} \times \{k \in \mathbb{Z}^p\colon \|\mu_k\| \ge \tau_1\},$$

тоді маємо нерівність $\operatorname{meas}\mathcal{T}_\varepsilon \ge T_1 - T_0 - \varepsilon$ і для $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ справджується оцінка (49).

Наслідок 1. *Якщо швидкість зміни частот θ_1 у спектрі M майже періодичних* *функцій прямує до $+\infty$, то $q_* \to 0$ і умова розв'язності $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathbf{H}_M^{q_*+q}$ теореми 2 послаблюється до необхідної умови (4) розв'язності задачі (1), (2).*

Перейдемо до вивчення випадку 2°) і використаємо оцінку

$$\|u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,l=1}^{2} \sum_{\alpha=0}^{2} \frac{\bigl(1+\|\mu_k\|^2\bigr)^{q-\alpha}}{|\mathcal{I}^-(\vec{r}, \gamma_l\|\mu_k\|)|^2} \times$$

$$\times \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^\alpha \mathcal{I}^{t,-}(r_{\omega(j)}, \gamma_l\|\mu_k\|)}{dt^\alpha} \right|^2 \|\Pi_k^l \varphi_{jk}\|^2 \le$$

$$\le 16 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,l=1}^{2} \Bigl(\frac{T^{\omega(j)}}{r_{\omega(j)}!}\Bigr)^2 \sum_{\alpha=0}^{2} \frac{\bigl(1+\|\mu_k\|^2\bigr)^{q-\alpha}}{|\mathcal{I}^-(\vec{r}, \gamma_l\|\mu_k\|)|^2} \times$$

$$\times \bigl(\gamma_l\|\mu_k\|\bigr)^{2\alpha-2} \|\Pi_k^l \varphi_{jk}\|^2, \quad (51)$$

яка випливає з формули (35).

Теорема 3. *Нехай $\vec{\alpha} = 0$, а функції $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathbf{H}_M^{q+2}$. Якщо виконуються умови $r_1 \ne r_2$ і $\min(r_1, r_2) \ge 2$, то існує множина $\mathcal{T}_0'$ з мірою $\operatorname{meas} \mathcal{T}_0' = T_1 - T_0$ така, що для всіх $T \in \mathcal{T}_0'$ існує единий розв'язок*

$$u = u_{\vec{0},\vec{\beta}} = \Pi_{\tau_2'} u + (I - \Pi_{\tau_2'}) u,$$

задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$, де $\Pi_{\tau_2'} u$ — майже періодичний многочлен,

$$\|(I - \Pi_{\tau_2'}) u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{2} \frac{C_{2j}'^{\,2}}{|\beta_j|^2} \|(I - \Pi_{\tau_2'}) \varphi_j; \mathbf{H}_M^{q+2}\|^2, \quad (52)$$

а $\tau_2' = \dfrac{4}{\gamma_0 T_0} \dfrac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|}(r_1 + r_2 - 1)$ *і*

$$C_{2j}' = \frac{4\gamma_1^2 \sqrt{1+\gamma_1^2+\gamma_1^4}}{|r_1 - r_2|} \, \frac{r_j!}{T_0^{r_j - 1}};$$

якщо ж $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \{(1, r), (r, 1)\}$, причому $r \ge 3$, то існує множина $\mathcal{T}_0''$ така, що міра $\operatorname{meas} \mathcal{T}_0'' = T_1 - T_0$ і для всіх $T \in \mathcal{T}_0''$ існує единий розв'язок

$$u = u_{\vec{0},\vec{\beta}} = \Pi_{\tau_2''} u + (I - \Pi_{\tau_2''}) u,$$

задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_M^{2,q}$, де $\Pi_{\tau_2''} u$ — майже періодичний многочлен,

$$\|(I - \Pi_{\tau_2''}) u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le$$
$$\le C_2''^{\,2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{|\beta_j|^2} \|(I - \Pi_{\tau_2''}) \varphi_j; \mathbf{H}_M^{q+2}\|^2, \quad (53)$$

а $\tau_2'' = \dfrac{4r}{\gamma_0 T_0} \dfrac{r+1}{r-2}$ *і*

$$C_2'' = \frac{4\gamma_1^2 \sqrt{1+\gamma_1^2+\gamma_1^4}}{r-2} \max\Bigl(1, \frac{r!}{T_0^{r-1}}\Bigr).$$

Доведення. Комбінуючи рекурентні формули (37), (38) для $\sigma_0 = 1$, маємо

$$\frac{\Delta(\gamma)}{\beta_1\beta_2} = \mathcal{I}^-(\vec{r}) = \frac{1}{\gamma^2}\Bigl(\mathcal{I}^-(r_1-1, r_2-1) -$$
$$- \frac{T^{r_1}}{r_1!}\mathcal{I}^{T,-}(r_2-1) + \frac{T^{r_2}}{r_2!}\mathcal{I}^{T,-}(r_1-1)\Bigr) =$$
$$= \frac{i}{\gamma^3}\Bigl(2\frac{r_1-r_2}{T}\frac{T^{r_1+r_2-1}}{r_1! r_2!} - i\gamma\mathcal{I}^-(r_1-1, r_2-1) +$$
$$+ \frac{T^{r_1}}{r_1!}\mathcal{I}^{T,+}(r_2-2) - \frac{T^{r_2}}{r_2!}\mathcal{I}^{T,+}(r_1-2)\Bigr). \quad (54)$$

Звідси за умови $\gamma \ge \dfrac{4}{T}\dfrac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|}(r_1 + r_2 - 1)$ отримуємо оцінку знизу

$$|\mathcal{I}^-(\vec{r})| \ge \frac{|r_1 - r_2|}{\gamma^3 T} \frac{T^{r_1+r_2}}{r_1! r_2!},$$

зокрема при $\|\mu_k\| \ge \tau_2'$ маємо

$$|\mathcal{I}^-(\vec{r}, \gamma_l\|\mu_k\|)| \ \ge\ \frac{|r_1 - r_2|}{\gamma_l^3 \|\mu_k\|^3} \frac{T^{r_1+r_2-1}}{r_1! r_2!}. \quad (55)$$

Вилучимо з відрізка $[T_0, T_1]$ точки T, які є коренями рівнянь $\mathcal{I}^-(\vec{r}, \gamma_l\|\mu_k\|) = 0$ у разі $\|\mu_k\| < \tau_2'$ та $l \in \{0, 1\}$, і позначимо отриману множину $\mathcal{T}_0'$. Очевидно, що $\operatorname{meas} \mathcal{T}_0' = T_1 - T_0$ і виконується умова однозначної розв'язності (44) для $q_0 = -3$ і

$$0 < C_{0l} \le |\beta_1\beta_2| \frac{|r_1 - r_2|}{\gamma_l^3 T_0} \frac{T_0^{r_1+r_2}}{r_1! r_2!}.$$

Із оцінок (41), (55) і формул (32), (51) отримуємо нерівність (52).

В іншому випадку за формулою (54) і оцінками (41), (43) за умови $\gamma \ge \dfrac{4r}{T}\dfrac{r-1}{r+2}$

записуємо

$$|\mathcal{I}^-(1,r)| = |\mathcal{I}^-(r,1)| \ge \frac{r-2}{\gamma^3}\frac{T^r}{r!},$$

зокрема при $\|\mu_k\| \ge \tau_2''$ маємо

$$|\mathcal{I}^-(1,r,\gamma_l\|\mu_k\|)| = |\mathcal{I}^-(r,1,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \ge \frac{r-2}{\gamma_l^3\|\mu_k\|^3}\frac{T^r}{r!}. \quad (56)$$

Вилучимо з відрізка $[T_0, T_1]$ точки T, які є коренями рівнянь

$$\mathcal{I}^-(1,r,\gamma_l\|\mu_k\|)\mathcal{I}^-(r,1,\gamma_l\|\mu_k\|) = 0$$

у разі $\|\mu_k\| < \tau_2''$ та $l \in \{0,1\}$, і позначимо отриману множину $\mathcal{T}_0''$. Очевидно, що $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0'' = T_1 - T_0$ і виконується умова однозначної розв'язності (44) для $q_0 = -3$ і

$$0 < C_{0l} \le |\beta_1\beta_2|\frac{r-2}{\gamma_l^3}\frac{T_0^r}{r!}.$$

Із оцінок (41), (56) і формул (32), (51) отримуємо нерівність (53).

Теорема 3 показує відсутність малих знаменників за умови вимірювання лише моментів шуканої функції, якщо порядок моментів великий.

Наступна теорема стосується моменту нульового порядку; у цьому разі знову проявляється проблема малих знаменників.

Теорема 4. *Нехай* $\vec{\alpha} = 0$ *і* $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \{(0,r),(r,0)\}$, *де* $r \ge 1$. *Якщо виконуються умови* $\{\varphi_1,\varphi_2\} \in \mathbf{H}_M^{1+q_*+q}$ *і* $q_* > p/\theta_1$, *тоді для майже всіх чисел* $T \in [T_0,T_1]$, *тобто для* $T \in \mathcal{T}_0$, *де* $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0 = T_1 - T_0$, *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}_M^{2,q}$; *цей розв'язок є сумою*

$$u = \Pi_{\tau_3}u + (I - \Pi_{\tau_3})u,$$

де $\Pi_{\tau_3}u$ — *майже періодичний многочлен з* $\tau_3 = \max\left(1, \frac{1}{\gamma_0}, \frac{12r}{\gamma_0 T_0}\right)$, *і для всякого числа* $\varepsilon \in \left(0, \frac{c}{2}\zeta(q_*)\frac{r!}{T_0^r}\right)$, *існує множина* $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_0$ *з мірою* $\operatorname{meas}\mathcal{T}_\varepsilon \ge T_1 - T_0 - \varepsilon$, *що для всіх* $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ *маємо нерівність*

$$\|(I-\Pi_{\tau_3})u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le \le C_3^2 \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{|\beta_j|^2}\|(I-\Pi_{\tau_3})\varphi_j; \mathbf{H}_M^{1+q_*+q}\|^2, \quad (57)$$

де

$$C_3 = \frac{16c}{\varepsilon}\zeta(q_*)(\gamma_0+\gamma_1)\times \times\sqrt{1+\gamma_1^2+\gamma_1^4}\max\left(\frac{T_1^r}{T_0^r}, \frac{r!}{T_0^r}\right).$$

Доведення. З формули (54) випливає, що

$$\frac{\Delta(\gamma)}{\beta_1\beta_2} = \mathcal{I}^-(0,r) = \frac{1}{\gamma^2}\Big(\mathcal{I}^{0,-}(r-1) - \mathcal{I}^{T,-}(r-1) + 2i\frac{T^r}{r!}\sin\gamma T\Big).$$

Для використання леми 1 запишемо

$$\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(0,r) = \gamma^{-2}\Gamma_\gamma^+\big(\mathcal{I}^{0,-}(r-1) - \mathcal{I}^{T,-}(r-1)\big) + \frac{2i}{\gamma^2}\frac{T^{r-1}}{(r-1)!}\sin\gamma T + \frac{2i}{\gamma}\frac{T^r}{r!}e^{i\gamma T}$$

і оцінку для $\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(0,r)$ за умови $\gamma \ge 12r/T_0$:

$$|\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(0,r)| \ge \frac{2}{\gamma}\frac{T^r}{r!}\Big(1 - \frac{6r}{\gamma T}\Big) \ge \frac{1}{\gamma}\frac{T_0^r}{r!},$$

зокрема для $\|\mu_k\| \ge \tau_3$ маємо

$$|\Gamma_\gamma^+\mathcal{I}^-(0,r,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \frac{1}{\gamma_l\|\mu_k\|}\frac{T_0^r}{r!}, \quad l = 0,1.$$

Міра множини чисел $T \in [T_0, T_1]$, для яких при фіксованих $l \in \{0,1\}$ і $k \in \mathbb{Z}^p$, де $\|\mu_k\| \ge \tau_3$, не виконується нерівність

$$|\mathcal{I}^-(0,r,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \frac{\varepsilon}{2c(\gamma_0+\gamma_1)\gamma_l}\times \times\frac{1}{\zeta(q_*)}\frac{T_0^r}{r!}(1+\|\mu_k\|^2)^{-1-q_*/2} \quad (58)$$

не перевищує числа $\varepsilon(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2}/2\zeta(q_*)$. Оскільки $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2} = \zeta(q_*) < \infty$, то за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх $T \in [T_0, T_1]$ оцінка (58) справджується для всіх векторів k з великою нормою $\|k\|$.

Вилучимо з відрізка $[T_0, T_1]$ множину міри нуль чисел T, для яких

$$\mathcal{I}^-(0,r,\gamma_l\|\mu_k\|) = 0$$

хоча б для однієї пари (l,k), і позначимо отриману множину $\mathcal{T}_0$. Очевидно, $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0 =$

$T_1 - T_0$, а для кожної точки $T \in \mathcal{T}_0$ справджується необхідна і достатня умова розв'язності (44) з $q_0 = -q_*$ і сталими

$$0 < C_{ol} \le \frac{\varepsilon|\beta_1\beta_2|}{2c(\gamma_0+\gamma_1)\gamma_l\zeta(q_*)}\frac{T_0^r}{r!};$$

тому перше твердження теореми випливає з доведення теореми 1.

Позначимо $\mathcal{T}_\varepsilon$ множину $\mathcal{T}_0$, з якої вилучено об'єднання міри ε множин таких чисел $T \in [T_0, T_1]$, для яких не справджується (58) для фіксованих пар

$$(l,k) \in \{0,1\} \times \{k \in \mathbb{Z}^p\colon \|\mu_k\| \ge \tau_3\},$$

тоді маємо нерівність $\operatorname{meas}\mathcal{T}_\varepsilon \ge T_1 - T_0 - \varepsilon$ і для $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ справджується оцінка (57).

Останній нерозглянутий випадок, а саме $\vec{r} \in \{(1,2),(2,1)\}$, зводиться до оцінювання однакових за модулем функцій $\mathcal{I}^-(1,2)$ та $\mathcal{I}^-(2,1)$ із урахуванням формули

$$|\mathcal{I}^-(1,2)| = -\frac{2i}{\gamma^3}S^2(T,\gamma), \quad \gamma>0,\ T>0, \quad (59)$$

де $S(T,\gamma) = T\cos\dfrac{\gamma T}{2} - \dfrac{2}{\gamma}\sin\dfrac{\gamma T}{2}$.

Лема 3. *Для довільного* $\varepsilon_{lk} \in \left(0, \dfrac{T_0}{16}\right)$, *де* $l \in \{0,1\}$, *вектор* $k \in \mathbb{Z}^p$ *задовольняє умову* $\|\mu_k\| \ge \tau_4$, *а число* $\tau_4 > 0$ *задає формула*

$$\tau_4 = \frac{2}{\gamma_0}\max\left(1, \frac{2}{T_0}\right),$$

міра множини

$$\{T \in [T_0,T_1]\colon \left|S(T,\gamma_l\|\mu_k\|)\right| < \varepsilon_{lk}\}$$

не перевищує числа $\dfrac{2c}{T_0}\dfrac{\gamma_0+\gamma_1}{\gamma_0}\varepsilon_{lk}$.

Доведення. Нехай $H(T,\gamma) = \Gamma^+_{\gamma/2}S(T,\gamma)$, тоді

$$h(T,\gamma) = \left(\frac{d}{dT} + i\frac{\gamma}{2}\right)S(T,\gamma) = \\ = i\frac{\gamma T}{2}e^{i\gamma T/2} - i\sin\frac{\gamma T}{2},$$

тому для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ з властивістю $\|\mu_k\| \ge \tau_4$ на $[T_0, T_1]$ справджується оцінка

$$|H(T,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \frac{\gamma T_0}{2} - 1 \ge \frac{\gamma T_0}{4} > 0.$$

Тоді за лемою 1 для кожного

$$\varepsilon_{lk} \in \left(0, \frac{T_0}{16}\right) \subset \left(0, \frac{\gamma_l\|\mu_k\|T_0}{16(1+\gamma_l\|\mu_k\|/2)}\right)$$

нерівність $|S(T,\gamma_l\|\mu_k\|)| < \varepsilon_{lk}$ виконується на підмножині відрізка $[T_0,T_1]$, міра якої не перевищує

$$\frac{4c(1+\gamma_1\|\mu_k\|/2)}{\gamma_l\|\mu_k\|T_0}\varepsilon_{lk} \le \frac{2c}{T_0}\frac{\gamma_0+\gamma_1}{\gamma_0}\varepsilon_{lk}.$$

Лему доведено.

Теорема 5. *Нехай вектор* $\vec{\alpha} = 0$, *а вектор* $\vec{r} \in \{(1,2),(2,1)\}$, *виконуються умови* $\{\varphi_1,\varphi_2\} \in \mathbf{H}_M^{2+2q_*+q}$ *і* $q_* > p/\theta_1$, *тоді для майже всіх чисел* $T \in [T_0,T_1]$, *тобто для* $T \in \mathcal{T}_0$, *де* $\operatorname{meas}\mathcal{T}_0 = T_1 - T_0$, *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}_M^{2,q}$; *цей розв'язок є сумою*

$$u = \Pi_{\tau_4}u + (I - \Pi_{\tau_4})u,$$

де $\Pi_{\tau_4}u$ — *майже періодичний многочлен, причому* τ_4 — *число з леми 3, і для довільного* $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{c\zeta(q_*)}{4}\Bigl(1+\dfrac{\gamma_1}{\gamma_0}\Bigr)\right)$ *існує множина* $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}_0$ *з мірою* $\operatorname{meas}\mathcal{T}_\varepsilon \ge T_1 - T_0 - \varepsilon$, *причому для всіх* $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ *маємо нерівність*

$$\|(I-\Pi_{\tau_4})u; \mathbf{H}_M^{2,q}\|^2 \le \\ \le C_4^2\sum_{j=1}^{2}\|(I-\Pi_{\tau_4})\varphi_j; \mathbf{H}_M^{2+2q_*+q}\|^2, \quad (60)$$

де $C_4 = \sqrt{1+\gamma_1^2+\gamma_1^4}\max\left(\dfrac{T_1^2}{2}, T_1\right)\left(\dfrac{c\zeta(q_*)\gamma_1}{\varepsilon T_0}\right)^2$.

Доведення. З леми 3 випливає, що міра множини чисел $T \in [T_0,T_1]$, для яких при фіксованих $l \in \{0,1\}$ і $k \in \mathbb{Z}^p$, де $\|\mu_k\| \ge \tau_1$, не виконується нерівність

$$|S(T,\gamma_l\|\mu_k\|)| \ge \\ \ge \frac{\varepsilon T_0\gamma_0}{4c\zeta(q_*)(\gamma_0+\gamma_1)}(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2} \quad (61)$$

не перевищує числа $\varepsilon(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2}/2\zeta(q_*)$. Оскільки

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+\|\mu_k\|^2)^{-q_*/2} = \zeta(q_*) < \infty,$$

то за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх $T \in [T_0, T_1]$ оцінка (61) справджується для всіх векторів k з великою нормою $\|k\|$. Вилучимо з відрізка $[T_0, T_1]$ множину міри нуль чисел T, для яких $S(T, \gamma_l \|\mu_k\|) = 0$ хоча б для одної пари (l, k) і позначимо отриману множину $\mathcal{T}_0$. Очевидно, $\operatorname{meas} \mathcal{T}_0 = T_1 - T_0$, а для кожної точки $T \in \mathcal{T}_0$ справджується необхідна і достатня умова розв'язності (44) з $q_0 = -2 - 2q_*$ і сталими

$$0 < C_{0l} \leq \frac{\varepsilon^2 \gamma_0^2}{8c^2 \zeta^2(q_*) \gamma_l^3 (\gamma_0 + \gamma_1)^2}, \quad l = 0, 1;$$

тому перше твердження теореми випливає з доведення теореми 1.

Позначимо $\mathcal{T}_\varepsilon$ множину $\mathcal{T}_0$, з якої вилучено об'єднання міри не більше ε множин таких чисел $T \in [T_0, T_1]$, для яких не справджується (61) для фіксованих пар

$$(l, k) \in \{0, 1\} \times \{k \in \mathbb{Z}^p \colon \|\mu_k\| \geq \tau_4\},$$

тоді маємо нерівність $\operatorname{meas} \mathcal{T}_\varepsilon \geq T_1 - T_0 - \varepsilon$ і для $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ справджується оцінка (60).

Теореми 3–5 дають класифікацію розв'язності задачі (1), (2) у випадку 2°) — чисто інегральних вимірювань моментів шуканого розв'язку.

Зокрема, теорема 3 встановлює, що для довільного $T \in [T_0, T_1]$ задача (1), (2) може мати лише скінченновимірне ядро, розмірність якого залежить від спектра M і регулюється лише числами τ_2' чи τ_2'', а для майже всіх T ядро задачі — тривіальне. Малих знаменників немає, гладкість правих частин зростає на дві одиниці у порівнянні з гладкістю у необхідній умові розв'язності (4).

Координати відповідних вузлів нижче поданої таблиці з осями r_1 та r_2 помічені цифрою 2 і означають компоненти вектора $\vec{r} = (r_1, r_2)$ порядків моментів в умовах (2).

У теоремі 4 і у теоремі 5 встановлено тривіальність ядра задачі для майже всіх $T \in [T_0, T_1]$ і збільшення гладкості правих частин на $1{+}q_*$ $(> 1{+}p/\theta_1)$ та $2{+}2q_* = 2(1{+}q_*)$ одиниць відповідно. Задача має малі знаменники, розв'язок, взагалі, не існує у шкалах розглядуваних просторів, для множини чисел T нульової міри може бути як скінченновимірне, так і нескінченновимірне ядро. Числа $1 + q_*$ і $2 + 2q_*$ помічають відповідні точки у таблиці. Діагональні точки позначені у таблиці знаком $*$ означають нескінченновимірне ядро в задачі для всіх $T \in [T_0, T_1]$.

5	$1{+}q_*$	2	2	2	2	$*$
4	$1{+}q_*$	2	2	2	$*$	2
3	$1{+}q_*$	2	2	$*$	2	2
2	$1{+}q_*$	$2{+}2q_*$	$*$	2	2	2
1	$1{+}q_*$	$*$	$2{+}2q_*$	2	2	2
0	$*$	$1{+}q_*$	$1{+}q_*$	$1{+}q_*$	$1{+}q_*$	$1{+}q_*$
r_2/r_1	0	1	2	3	4	5

Висновки. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме — задачі (1), (2) — у просторах майже періодичних функцій. Ця задача є некоректною за Адамаром і породжує проблему малих знаменників, характерних для інтегро-крайових умов (2). Для розв'язання проблеми малих знаменників використовуємо метричний підхід і методику оцінювання мір виняткових множин.

Визначено вплив параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ і показників θ_1, θ_2 на розв'язність задачі, зокрема ефективність використання комбінації крайових та інтегральних умов і відповідних просторів майже періодичних функцій. Показано, що у разі чисто інтегральних умов, малі знаменники присутні лише для моментів нульового і першого порядків.

Отримано підсилення і доповнення результатів роботи [14] (про коректну розв'язність задачі (1), (2) у частинному випадку $p = 3$ для дійсних $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ і $r_1 < r_2$).

Зокрема, для порівняння наведемо відповідні формули з роботи [14] для елементів $S(r_1, r_2)$ подібної до наведеної вище таблиці:

$$S(r_1, r_2) = \begin{cases} 51r_* + 22 + (153r_* + 51)/\theta_1, \\ 54r_* + 28 + (153r_* + 55)/\theta_1, \end{cases}$$

для випадків $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ та $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ відповідно, де $r_* = r_1 + r_2$.

У роботі зменшено наведені значення $S(r_1, r_2)$ до таких ($p = 3$, $r_1 \neq r_2$):

$$S(r_1, r_2) = 2 + 3/\theta_1, \quad \text{якщо} \quad \alpha_1 \alpha_2 \neq 0, \text{ і}$$

$$S(r_1,r_2)=\begin{cases}3+3/\theta_1, & r_1=0,\ \text{або}\ r_2=0,\\ 4+6/\theta_1, & r_1=1,\ r_2=2,\\ 4+6/\theta_1, & r_1=2,\ r_2=1,\\ 4, & \text{в інших випадках,}\end{cases}$$

якщо $\alpha_1=\alpha_2=0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Fardigola L. V. *Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition* // Ukr. Math. J. – 1990. – 42, No. 11. – P. 1388–1394.

2. Fardigola L. V. *An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations* // Sbornik Math. – 1995. – 53, No. 6. – P. 1671–1692.

3. Ільків В. С. *Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами* // Вісн. держ. ун-ту „Львів. політехніка“. Сер. Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 318–323.

4. Pul'kina L. S. *A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation* // Diff. Eq. – 2004. – 40, No. 7. – P. 947–953.

5. Медвідь О. М., Симотюк М. М. *Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 32–39.

6. Ільків В. С., Магеровська Т. В. *Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку* // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2008. – №625. – С. 12–19.

7. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. *On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations* // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – 5, No. 11. – P. 31–37.

8. Kuz' A. M., Ptashnyk B. I. *A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations* // Ukr. Math. J. – 2013. – 65, No. 2. – P. 277–293.

9. Каленюк П. І., Ільків В. С., Нитребич З. М., Когут І. В. *Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом* // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 5—11.

10. Симотюк М. М., Савка І. Я. *Початково-нелокальна задача для факторизованого рівняння із частинними похідними* // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 19-–25.

11. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними.* — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.

12. Ільків В. С., Пташник Б. Й. *Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників* // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, №12 – С. 1624-–1650.

13. Седбов Л. И. *Механика сплошной среды.* — М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.

14. Кузь А. М., Пташник Б. Й. *Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності* // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2013. – 56, № 4. – С. 40–53.

15. Нитребич З. М. *Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для неоднорідних рівнянь Ламе* // Доп. НАН України. – 1995. – №7. – С. 32–34.

16. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. Л. *Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними безмежного порядку.* – Львів, 1995. – 42 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики; № 1–95).

17. Бобик І. О., Симотюк М. М. *Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними* // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.