УДК 517.983

©2015 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КОМУТАНТ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

В просторі функцій, аналітичних у кругових областях, описано комутант різницевого оператора, пов'язаного з оператором Данкла.

The commutant of a difference operator associated with the Dunkl operator in the space of analytic functions in circular domains is described.

Через A_R, $0 < R \leq \infty$, позначимо простір усіх функцій, аналітичних у крузі $|z| < R$, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(A_R)$ – множину всіх операторів, які лінійно та неперервно діють у просторі A_R. Для довільного $k \in \mathbb{C}$ оператор Данкла, який визначається формулою

$$(\Lambda_k f)(z) = f'(z) + k\frac{f(z) - f(-z)}{z} \tag{1}$$

при $z \neq 0$, і $(\Lambda_k f)(0) = (2k+1)f'(0)$ лінійно та неперервно діє в кожному з просторів A_R, $0 < R \leq \infty$. Цей оператор визначений в працях [1], [2]. Оператор Данкла відіграє важливу роль в різних задачах математики та фізики (див., наприклад, бібліографію в [3]). Оператор Данкла та деякі його модифікації в просторах аналітичних функцій вивчалися в працях [4]-[13]. В них, зокрема, описано комутант оператора Данкла в просторах функцій, аналітичних у кругових областях. З результатів роботи [13] випливає, що у випадку, коли $k \neq -\frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$ оператор T з класу $\mathcal{L}(A_R)$ буде переставним з оператором Данкла Λ_k тоді і тільки тоді, коли

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Lambda_k^n,$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} = 0$ при $R < \infty$, або $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|c_n|} < \infty$ при $R = \infty$.

Розглянемо різницевий оператор P, який лінійно та неперервно діє в просторі A_R за правилом

$$(Pf)(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{z} \tag{2}$$

при $z \neq 0$ і $(Pf)(0) = 2f'(0)$. Оператор Данкла є певною лінійною комбінацією оператора диференціювання D та різницевого оператора P. Комутант оператора диференціювання в просторі A_R описано в [14]. У зв'язку з цим виникає задача про опис комутанта різницевого оператора P в просторі A_R. Розв'язанню цієї задачі присвячена дана стаття.

Припустимо, що оператора T з класу $\mathcal{L}(A_R)$ є переставним з оператором P, тобто виконується рівність

$$TP = PT. \tag{3}$$

Позначимо $T(z^n) = \varphi_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Подіявши рівністю (3) на z^n, отримуємо, що

$$(1 + (-1)^{n+1})\varphi_{n-1}(z) = \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(-z)}{z}. \tag{4}$$

Далі розглянемо два випадки:

1) Нехай $n = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді з (4) одержимо, що $\varphi_{2k}(z) = \varphi_{2k}(-z)$ при $|z| < R$. Функції $\varphi_{2k}(z)$, $k = 0, 1, \ldots$ є парними функціями з простору A_R. Розкладаючи $\varphi_{2k}(z)$ у степеневий ряд, одержимо, що

$$\varphi_{2k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} z^{2j} = g_{2k}(z^2),$$

де $g_{2k}(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} t^j$, k=0,1,…. Покажемо, що функції $g_{2k} \in A_{R^2}$ при $k = 0, 1, \ldots$. Відомо [15], що функція $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ належить до простору A_R тоді і тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g_n|} \le \frac{1}{R}$. Оскільки $\varphi_{2k}\in A_R$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\varphi_{2k}^{(n)}(0)}{(n)!}\right|} = \overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[2j]{\left|\frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!}\right|} \le \frac{1}{R}$$

при $k = 0, 1, \ldots$. Тому

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{\left|\frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!}\right|} =$$

$$= \overline{\lim_{j\to\infty}}\left(\sqrt[2j]{\left|\frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!}\right|}\right)^2 \le \frac{1}{R^2}$$

і функції $g_{2k}\in A_{R^2}$ при $k = 0, 1, \ldots$.

2) Нехай $n = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді (4) матиме вигляд

$$2\varphi_{2k}(z) = \frac{\varphi_{2k+1}(z) - \varphi_{2k+1}(-z)}{z}.$$

Отже,

$$\varphi_{2k+1}(z) - \varphi_{2k+1}(-z) = 2zg_{2k}(z^2) \qquad (5)$$

при $|z| < R$.

Запишемо функції $\varphi_{2k+1}(z)$ у вигляді

$$\varphi_{2k+1}(z) = \psi_{2k+1}(z) + \theta_{2k+1}(z),$$

де $\psi_{2k+1}(z)$ – парна, а $\theta_{2k+1}(z)$ – непарна функції з простору A_R, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді (5) набуде вигляду

$$\psi_{2k+1}(z) + \theta_{2k+1}(z) - \psi_{2k+1}(-z) - \theta_{2k+1}(-z) =$$

$$= 2zg_{2k}(z^2).$$

Звідси отримуємо, що $\theta_{2k+1}(z) = zg_{2k}(z^2)$ при $|z| < R$ і $\psi_{2k+1}(z)$ – довільні парні функції з простору A_R, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді за доведеним вище твердженням маємо, що $\psi_{2k+1}(z) = g_{2k+1}(z^2)$, де $g_{2k+1}(t)$ – деякі функції з простору A_{R^2}, $k = 0, 1, \ldots$. Таким чином, ми одержали, що

$$\varphi_{2k+1}(z) = g_{2k+1}(z^2) + zg_{2k}(z^2), \qquad (6)$$

і

$$\varphi_{2k}(z) = g_{2k}(z^2), \qquad (7)$$

де $k = 0, 1, \ldots$.

Нагадаємо канонічне зображення лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \longrightarrow A_{R_2}$ [15]. Для того, щоб оператор T лінійно і неперервно діяв з A_{R_1} в A_{R_2} необхідно і достатньо, щоб T зображався у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\varphi_n(z), \qquad (8)$$

де $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_{R_1}$, а $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору A_{R_2}, яка задовольняє умову

$$\forall r_2 < R_2\ \exists r_1 < R_1\ \exists C > 0\ \forall n = 0, 1, \ldots :$$

$$||\varphi_n||_{r_2} \le Cr_1^n. \qquad (9)$$

При цьому $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Умова (9) називається умовою неперервності лінійного оператора $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$.

Покажемо, що з умови неперервності для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ у просторі A_R випливає аналогічна умова для послідовності функцій $(g_n(z))_{n=0}^{\infty}$ з $R_1 = R$ та $R_2 = R^2$. Оскільки за допущенням T – лінійний неперервний оператор який діє в просторі A_R, то умова (9) виконується з $R_1 = R_2 = R$. Виберемо довільне додатнє $r_2 < R^2$. Позначимо $r_2' = \sqrt{r_2} < R$. Тоді для числа $r_2' = \sqrt{r_2}$ за умовою (9) при $R_1 = R_2 = R$ для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ існують число $r_1 < R$ і стала $C > 0$ такі такі, що

$$||\varphi_n||_{r_2'} \le Cr_1^n, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Зокрема,

$$||\varphi_{2k}||_{r_2'} \le Cr_1^{2k},\ ||\varphi_{2k+1}||_{r_2'} \le Cr_1^{2k+1},$$

$k = 0, 1, \ldots$. Тоді використовуючи (6) і (7), матимемо

$$||g_{2k}||_{r_2} = \max_{|t|\le r_2}|g_{2k}(t)| = \max_{|z^2|\le r_2}|g_{2k}(z^2)| =$$

$$= \max_{|z|\le\sqrt{r_2}}|\varphi_{2k}(z)| = ||\varphi_{2k}||_{\sqrt{r_2}} = ||\varphi_{2k}||_{r_2'} \le Cr_1^{2k}.$$

Таким чином,

$$||g_{2k}||_{r_2} \le Cr_1^{2k},\ k = 0, 1, \ldots \qquad (10)$$

Знову використовуючи (6) і (7), отримаємо

$$||g_{2k+1}||r_2 = \max_{|t|\le r_2}|g_{2k+1}(t)| =$$

$$\max_{|z^2|\le r_2}|g_{2k+1}(z^2)| = \max_{|z|\le\sqrt{r_2}}|\varphi_{2k+1}(z)-z\varphi_{2k}(z)| \le$$
$$\le \max_{|z|\le r_2'}|\varphi_{2k+1}(z)| + \max_{|z|\le r_2'}(|z||\varphi_{2k}(z)|) \le$$
$$\le Cr_1^{2k+1} + r_2' C r_1^{2k} = \left(C + C\frac{r_2'}{r_1}\right) r_1^{2k+1}.$$

Таким чином,

$$||g_{2k+1}||_{r_2} \le \left(C + C\frac{r_2'}{r_1}\right) r_1^{2k+1}. \qquad (11)$$

Якщо позначити $C' = C + C\frac{r_2'}{r_1}$, то з (10) і (11) випливає, що $||g_n||_{r_2} \le C' r_1^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Таким чином, послідовність функцій $(g_n(z))_{n=0}^{\infty}$ з простору A_{R^2} дійсно задовольняє умову неперервності (9) для $R_1 = R$ і $R_2 = R^2$. Тому за теоремою про канонічний вигляд лінійних неперервних операторів одержуємо, що існує лінійний неперервний оператор $A : A_R \longrightarrow A_{R^2}$ для якого

$$Az^n = g_n(z),\ n = 0, 1, \ldots.$$

При цьому для довільної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_R$, маємо $(Af)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n(z)$. Тоді для довільної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_R$ отримуємо

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}\varphi_{2k}(z) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}\varphi_{2k+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} g_{2k}(z^2) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}\left(g_{2k+1}(z^2) + z g_{2k}(z^2)\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n(z^2) + z\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} g_{2k}(z^2).$$

Через K позначимо оператор композиції, який діє з простору A_{R^2} у простір A_R за правилом

$$(Kg)(z) = g(z^2).$$

Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n(z^2) = (KAf)(z)$$

і

$$z\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} g_{2k}(z^2) = \left(\frac{z}{2}KAPf\right)(z).$$

Таким чином, одержуємо, що $(Tf)(z) = (KAf)(z) + \frac{1}{2}(U_z KAPf)(z)$ при $|z| < R$, де U_z – оператор множення на z. Отже,

$$T = KA + \frac{1}{2}U_z KAP. \qquad (12)$$

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема. *Для того, щоб T належав до класу $\mathcal{L}(A_R)$ і був переставним з оператором P, необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді (12), де A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$.*

Доведення. Достатність. Нехай A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$. Тоді формулою (12) визначається оператор T, який належить множині $\mathcal{L}(A_R)$. Залишилося перевірити, що T переставний з P. Позначимо $g_n(z) = Az^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Оскільки

$$(PT)(z^{2n}) = (PKA + \frac{1}{2}PU_z KAP)(z^{2n}) = 0;$$

$$(PT)(z^{2n+1}) = (PKA + \frac{1}{2}PU_z KAP)(z^{2n+1}) =$$
$$= (PKA)(z^{2n+1}) + (PU_z KA)(z^{2n}) =$$
$$= (PU_z K g_{2n})(z) = P(z(g_{2n}(z^2)) = 2g_{2n}(z^2);$$
$$(TP)(z^{2n}) = (KAP + \frac{1}{2}U_z KAP^2)(z^{2n}) = 0;$$
$$(TP)(z^{2n+1}) = (KAP + \frac{1}{2}U_z KAP^2)(z^{2n+1}) =$$
$$= (2KA)(z^{2n}) + \left(\frac{1}{2}U_z KAP\right)(z^{2n}) =$$
$$= (2Kg_{2n})(z) = 2g_{2n}(z^2),$$

то виконується рівність $(PT)(z^n) = (TP)(z^n), n = 0, 1, \ldots$. Використовуючи лінійність та неперервність операторів P та T на просторі A_R звідси випливає, що оператори P та T є переставними в A_R. Теорема доведена.

Якщо A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$, то формулою $B = KA$ описується загальний вигляд операторів, які діють з простору A_R в $A_R^{(0)}$, де $A_R^{(0)}$ – підпростір простору A_R, який складається з усіх парних функцій простору A_R. Тому є правильним наступне твердження.

Наслідок. *Для того, щоб T належав до класу $\mathcal{L}(A_R)$ і був переставним з оператором P, необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$T = B + \frac{1}{2} U_z B P,$$

де B – довільний оператор з класу з класу $\mathcal{L}(A_R, A_R^{(0)})$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dunkl C.F.* Differential difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **311**. – P. 167–183.

2. *Dunkl C.F.* Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. – 1991. – **43**. – P. 1213–1227.

3. *Rösler M.* Dunkl operators: theory and applications. In: Koelink, E., Assche, W. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin. – 2003. – **1817**. – P. 93–135.

4. *Salem N. B., Kallel S.* Integro-differential-difference equations associated with the Dunkl operator and entire functions // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2004. – **45**. – №4. – P. 699–725.

5. *Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K.* Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. – 2005. – **106**. – №1-2. – P. 101–116.

6. *Salem N. B., Kallel S.* Analytic mean-periodic functions associated with the Dunkl operator in a disk // Complex Variables Theory and Application. – 2005. – **50**. – № 3. – P. 195–210.

7. *Ким В. Э., Напалков В. В.* Обобщение оператора Данкла на пространстве целых функций // Доклады РАН. – 2008. – **420**. – №2. – С. 166–167.

8. *Напалков В. В., Напалков В. В.,мл.* Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады РАН. – 2008. – **423**. – №3. – С. 300–302.

9. *Братищев А.В.* Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций // Вестник ДГТУ. – 2009. – **9**. – №2. – С. 196–207.

10. *Забирова К. Р., Напалков В. В.* Операторы свертки Данкла и их свойства // Доклады РАН. – 2013. – **449**. – №6. – С. 632–634.

11. *Карамов И.И., Напалков В. В.* Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. – 2014. – **6**. – №1. – С. 59–68.

12. *Лінчук Ю.С.* Про один клас діагональних операторів в просторах аналітичних функцій та його застосування // Доповіді НАН України. – 2014. – №3. – С.25–28.

13. *Лінчук Ю.С.* Узагальнений оператор Данкла-Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57** . – № 4. – С. 7–17.

14. *Нагнибида Н. И.* Об изоморфизмах аналитических пространств, перестановочных с оператором дифференцирования // Матем. сб. – 1967. – **72**. – № 2. – С. 250–260.

15. *Лінчук С.С., Лінчук Ю.С.* Оператори у просторах аналітичних функцій. Чернівці: Рута. – 2011. – 147 с.