УДК 517.98

©2015 р. А.В. Загороднюк, І.В. Чернега

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА $\ell_1(A)$

Вивчається алгебра симетричних аналітичних функцій обмеженого типу з $\ell_1(A)$ в A, де A — деяка комутативна банахова алгебра. Описано алгебраїчну базу такої алгебри та A-значні гомоморфізми.

We study the algebra of symmetric analytic functions of bounded type from $\ell_1(A)$ into A, where A is a commutative Banach algebra. Some algebraic bases and A-valued homomorphisms of $\ell_1(A)$ are described.

Вступ. Як відомо, між максимальними ідеалами і комплексними гомоморфізмами (характерами) комутативної банахової алгебри з одиницею існує взаємнооднозначна відповідність, яка задається перетворенням Гельфанда. Саме тому ми можемо трактувати елементи вихідної алгебри як функції на просторі максимальних ідеалів. Довільна рівномірна напівпроста банахова алгебра допускає реалізацію у вигляді замкненої підалгебри алгебри неперервних функцій на компактному гаусдорфовому топологічному просторі, утвореному її максимальними ідеалами. Тому питання щодо опису структури спектру алгебр аналітичних функцій часто виникає в задачах і є важливим напрямком в теорії аналітичних відображень на банахових просторах.

Дослідження максимальних ідеалів алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі є новим напрямком, який почав активно розвиватися наприкінці двадцятого століття. Одними з перших, хто розпочав дослідження в цій тематиці, є Р. Арон, Т. Корн, Б. Коль, Т. Гамелін [3, 4, 5].

Вивчення симетричних функцій на банахових просторах почалось з роботи А.С. Немировського та С.М. Семенова [11], де було розглянуто симетричні поліноми на просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$. В статті [10] М. Гонзалесом, Р. Гонзало та Х. Харамілло ці результати узагальнено на ширший клас дійсних банахових просторів, наділених певною симетричною структурою. Зокрема, в цій роботі доведено, що, подібно до скінченновимірного випадку, поліноми

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

утворюють *алгебраїчну базу* в алгебрі всіх симетричних поліномів на просторі ℓ_1. Іншими словами, для кожного симетричного полінома P степеня n, $n \geq 1$ існує поліном $q \in \mathbb{C}^n$ такий, що $P(x) = q(F_1(x), \ldots, F_n(x))$.

Простір всіх симетричних поліномів з ℓ_1 в $\mathbb{C}^n$ будемо позначати $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Поповнення простору $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах збігається з алгеброю $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ цілих симетричних аналітичних функцій на просторі ℓ_1, які є обмеженими на обмежених множинах.

Спектр алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ цілих симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p досліджувався в [6, 7, 8]. В роботі [2] Р. Аленкар, Р. Арон, П. Галіндо і А. Загороднюк, використовуючи результати, отримані в [10], дослідили спектр алгебри симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі простору ℓ_p.

В даній роботі ми вивчаємо алгебру всіх A-значних симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$, де A — деяка комутативна банахова алгебра, та досліджуємо її спектр. Так, у розділі 1 вводяться означення симетричних поліномів на просторі $\ell_1(A)$ та наводиться приклад, який показує, що ці два означення не є еквівалентними. У розділі 2 вводиться поняття симетричної аналітичної функції обмеженого типу на $\ell_1(A)$. Використовуючи напрацьовані в роботах [7, 8] методи, досліджуються гомоморфізми алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1(A))$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$.

1. Симетричні поліноми на $\ell_1(A)$. Нехай A — комутативна банахова алгебра, $a_k \in A$, $k = 1, 2, \dots$. Вважаємо, що елемент $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \ell_1(A) := \ell_1 \otimes_\pi A$, якщо $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$. Також визначимо норму елемента $\bar{a}$ як

$$\|\bar{a}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|.$$

Означення 1. *Відображення $\overline{P} : \ell_1(A) \to A$ називаєтся симетричним поліномом, якщо існує $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^n)$ — симетричний поліном на просторі $\mathbb{C}^n$, такий що $\overline{P}$ ми отримуємо, підставивши $(a_1, \dots, a_n)$ в $P(t_1, \dots, t_n)$, де $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$.*

Іншими словами, якщо $P(t) = \sum c_{k_1 \dots k_n} t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$ — поліном степеня m, то $\overline{P}(\bar{a}) = \sum c_{k_1 \dots k_n} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$, де $k_1 + \dots + k_n \le m$.

Через $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A), A)$ будемо позначати простір всіх симетричних поліномів (в сенсі означення 1) з $\ell_1(A)$ в A.

Нехай A — комутативна банахова алгебра. Позначимо через A^n алгебру, породжену елементами $a_1, \dots, a_n$ алгебри A, тобто, $A^n = \{(a_1, \dots, a_n)\}$.

Оскільки $\mathbb{C}^n$ природно вкладається в ℓ_1, то A^n вкладається в $\ell_1(A)$ як $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$. Тому ми можемо розглядати звуження поліномів з $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A), A)$ на A^n. Цей простір будемо позначати $\mathcal{P}_s^0(A^n, A)$.

Твердження 1. *Нехай A — комутативна банахова алгебра з одиницею e. Поліноми вигляду*

$$\overline{F}_k(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k,$$

де $a_i \in A$, утворюють алгебраїчну базу в просторі $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A), A)$ всіх симетричних поліномів з $\ell_1(A)$ в A.

Доведення. Розглянемо спочатку скінченовимірний випадок $\mathcal{P}_s^0(A^n, A)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$. Якщо $P(t) = q(F_1(t), \dots, F_n(t))$, то, згідно з означенням 1, маємо, що $\overline{P}(\bar{a}) = q(\overline{F}_1(\bar{a}), \dots, \overline{F}_n(\bar{a}))$. Тому $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ є твірними в $\mathcal{P}_s^0(A^n, A)$.

Нехай $\overline{q}_0(\overline{F}_1(\bar{a}), \dots, \overline{F}_n(\bar{a})) = 0$ для довільного $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ та деякого q_0, де $q_0(r) = \sum c_{k_1 \dots k_n} r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{C}^n$.

Візьмемо $t = (t_1, \dots, t_n)$. Тоді $te = (t_1 e, \dots, t_n e)$ та $\overline{F}_k(t_1 e, \dots, t_n e) = t_1^k e + \dots + t_n^k e = F_k(t) e$. Звідси маємо, що

$$\begin{gathered}\overline{q}_0(\overline{F}_1(te), \dots, \overline{F}_n(te)) = \\ = \overline{q}_0(F_1(t)e, \dots, F_n(t)e) = \\ = \sum c_{k_1 \dots k_n} F_1(t)^{k_1} \cdots F_n(t)^{k_n} e = \\ = q_0(F_1(t), \dots, F_n(t))e = 0,\end{gathered}$$

а це вірно тоді і тільки тоді, коли

$$q_0(F_1(t), \dots, F_n(t)) = 0$$

звідки випливає, що $q_0 \equiv 0$.

Перейдемо до загального випадку. Відомо [10], що поліноми

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$, утворюють алгебраїчну базу в алгебрі всіх симетричних поліномів на просторі ℓ_1. Повторюючи міркування [10, Теорема 1.1], ми отримуємо доведення твердження.

Означення 2. *Відображення $\overline{P} : \ell_1(A) \to A$ називається симетричним поліномом в широкому сенсі, якщо існує перестановка σ на множині $\{1, \dots, n\}$ така, що*

$$\overline{P}(a_1, \dots, a_n) = \overline{P}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Будемо позначати через $\mathcal{P}_s(\ell_1(A), A)$ простір всіх симетричних поліномів з $\ell_1(A)$ в A в сенсі означення 2.

Приклад 1. *Нехай* $A = \ell_1$, $A^2 = (a, b)$, $a, b \in \ell_1$, *та* $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$, $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n$, *де* $e_n = (0, \ldots, 0, 1_n, 0, \ldots)$. *Визначимо поліном* $\overline{P}$ *як*

$$\overline{P}(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i e_i.$$

Покажемо, що $\overline{P} \in \mathcal{P}_s(A^2, A)$, *проте* $\overline{P} \notin \mathcal{P}_s^0(A^2, A)$.

Припустимо протилежне. Нехай $\overline{P} \in \mathcal{P}_s^0(A^2, A)$. *Візьмемо* $\varphi \in \mathcal{M}(A)$ *— довільний комплексний гомоморфізм алгебри* A. *Подіявши ним, ми отримуємо, що*

$$\varphi(\overline{P}(a, b)) = \overline{P}(\varphi(a), \varphi(b)).$$

Даний результат випливає як з теорії функціонального числення [9], так і безпосередньо з означення 1.

Коли $\ell_1 \ni a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ *відомо [1], що комплексні гомоморфізми мають вигляд:*

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,$$

де $|r| \le 1$. *Тому для* $\overline{P} \in \mathcal{P}_s(A^2, A)$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}(A)$

$$\varphi(\overline{P}(a, b)) = \overline{P}(\varphi(a), \varphi(b)) = \\ = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n\right). \qquad (2)$$

З іншого боку,

$$\varphi(\overline{P}(a, b)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i r^i. \qquad (3)$$

Порівнюючи (2) та (3) легко бачити, що у (2) коефіцієнти $a_n b_n$ *можуть бути при* r^{2n}, *тоді як у (3) тільки при* r^n. *Тому* $\overline{P} \in \mathcal{P}_s(A^2, A)$, *проте* $\overline{P} \notin \mathcal{P}_s^0(A^2, A)$.

2. Комплексні гомоморфізми простору симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$. Поповнимо простір $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A))$ відносно метрики, яка задається сім'єю норм

$$\|\overline{f}\|_r = \sup_{\|\bar{a}\| \le r} \|\overline{f}(\bar{a})\|,$$

де $r \in \mathbb{Q}_+$. Врезультаті поповнення отримаємо алгебру симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1(A)$, яку будемо позначати $\mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$.

З іншого боку, використовуючи теорію функціонального числення [9], кожній функції $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ поставимо у відповідність функцію $\overline{f}$ на просторі $\ell_1(A)$. Отриману таким чином алгебру всіх симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(A)$ позначимо $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1(A))$. Легко бачити, що алгебри $\mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$ та $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1(A))$ збігаються.

2.1. Гомоморфізми "значення в точці". Для довільного елемента $\bar{a} \in \ell_1(A)$ визначимо відображення $\Theta_{\bar{a}}$ з $\mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$ в A наступним чином:

$$\Theta_{\bar{a}}(\overline{f}) = \overline{f}(\bar{a}),$$

де $\overline{f} \in \mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$. Легко бачити, що $\Theta_{\bar{a}}$ є гомоморфізмом. Такі гомоморфізми будемо називати гомоморфізмами "значення в точці".

2.2. Гомоморфізми ψ_z. У роботі [7] побудовано сім'ю $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ елементів множини $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ таку, що $\psi_\lambda(F_p) = \lambda$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > p$. Нагадаємо конструкцію: для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглядається елемент $v_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{1/p}(e_1 + \cdots + e_n)$, для якого $F_p(v_n) = \lambda$ і $\lim_n F_j(v_n) = 0$, коли $j > p$ і послідовність $\{\delta_{v_n}\}$ має граничну точку ψ_λ у спектрі в топології поточкової збіжності. Покажемо, що подібну сім'ю елементів можна побудувати і для множини A-значних гомоморфізмів $\mathcal{M}_{bs}^A$ алгебри $\mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$.

Твердження 2. *Нехай* $h \in \mathcal{M}(A)$, $\bar{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$. *Тоді*

$$h(\overline{f}(\bar{a})) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(a_n) e_n\right),$$

де $\overline{f}(\bar{a}) \in A$.

Доведення. Маємо, що

$$h(\overline{F}_k(\bar{a})) = h\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k e_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h(a_n)^k e_n = \\ = F_k\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(a_n) e_n\right).$$

Оскільки кожен симетричний поліном $\overline{P}$ подається у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $\overline{F}_k$ і кожна функція $\overline{f} \in \mathcal{H}_{bs}^0(\ell_1(A))$ рівномірно наближається симетричними поліномами, то ми отримуємо доведення твердження.

Теорема 1. *Нехай A — напівпроста комутативна банахова алгебра з одиницею e і нехай $z \in A$. Визначимо*

$$\psi_z(\overline{F}_k) = \begin{cases} \overline{F}_k(z), & \text{якщо } k = 1 \\ 0, & \text{якщо } k > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Тоді ψ_z — неперервний.

Доведення. Візьмемо $z \in A$ і означимо ψ_z також як

$$\psi_z = \lim_{n\to\infty} v_{n,z} = \lim_{n\to\infty} \Theta_{\frac{ze_1+\cdots+ze_n}{n}}.$$

Згідно з твердженням 2 маємо, що

$$h \circ \Theta_{\bar{a}}(\overline{f}) := \delta_{\sum h(a_n)e_n}(f),$$

де $h \in \mathcal{M}(A)$. Тоді

$$h \circ \psi_z = \lim_{n\to\infty} \Theta_{\frac{h(z)e_1+\cdots+h(z)e_n}{n}} = \psi_{h(z)},$$

де $\psi_{h(z)} \in \mathcal{M}_{bs}^A$. Таким чином, ми отримали, що послідовність $\Theta_{\frac{ze_1+\cdots+ze_n}{n}}$ "слабко" збігається до ψ_z, тобто ψ_z є неперервним відносно комплексних гомоморфізмів. Покажемо, що ψ_z є неперервним.

Враховуючи (4) маємо, що $h(\overline{F}_k(z)) = h\circ\psi_z\circ\nu(F_k) = F_k(h(z))$, звідки $h\circ\psi_z\circ\nu(f) = \psi_{h(z)}(f)$ і композиція $h\circ\psi_z\circ\nu$ є неперервною на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. Оскільки це виконується для довільних $h \in \mathcal{M}(A)$ і оскільки A — напівпроста алгебра, то композиція $\psi_z\circ\nu$ є неперервною теж. Далі, оскільки $\overline{f}(e\otimes x) = f(x)$, то $\|f\|_r \le \|\overline{f}\|_r$ звідки і отримуємо, що ψ_z — неперервний.

2.3. Випадок бази $\{\overline{G}_n\}$. Нагадаємо, що окрім бази $\{F_n\}$ алгебра $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ має іншу природну базу, що задається послідовністю $\{G_n\}$:

$$G_n(x) = \sum_{k_1<\cdots<k_n}^{\infty} x_{k_1}\cdots x_{k_n},$$

де $G_0 = 1$.

Твердження 3. *Нехай A — комутативна банахова алгебра з одиницею e. Поліноми вигляду*

$$\overline{G}_n(\bar{a}) = \sum_{k_1<\cdots<k_n}^{\infty} a_{k_1}\cdots a_{k_n},$$

де $a_i \in A$, утворюють алгебраїчну базу в просторі $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A), A)$.

Доведення. Оскільки бази $\{F_n\}$ та $\{G_n\}$ взаємно виражаються одна через другу, а функції $\{\overline{F}_n\}$ є алгебраїчною базою простору $\mathcal{P}_s^0(\ell_1(A), A)$, то функції $\{\overline{G}_n\}$ теж є алгебраїчною базою цього простору.

Лема 1. $\|\overline{G}_n\| = 1/n!$

Доведення. Доводиться аналогічно, як у [7, Лема 3.1].

Нехай $\Phi \in \mathcal{M}_{bs}^A$. Позначимо через $\overline{\mathcal{G}}$ наступне відображення з $\mathcal{M}_{bs}^A$ в простір всіх степеневих рядів з коефіцієнтами з A :

$$\overline{\mathcal{G}}(\Phi)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Phi(\overline{G}_n) = \Phi\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \overline{G}_n\Big).$$

Твердження 4. *Множина $\{\overline{\mathcal{G}}(\Phi)\colon \Phi \in \mathcal{M}_{bs}^A\}$ складається з цілих функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}$ з коефіцієнтами з A і таких, що $\overline{\mathcal{G}}(\Phi)(0) = 1$.*

Доведення. Нагадаємо, що у роботі [6] для кожного елемента $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ було визначено радіус-функцію за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}} < \infty,$$

де φ_n є звуженням φ на підпростір n-однорідних поліномів. Тому для кожного елемента $\Phi \in \mathcal{M}_{bs}^A$ визначено

$$R(\phi\circ\Phi) = \limsup_{n\to\infty} \|\phi\circ\Phi_n\|^{\frac{1}{n}} < \infty,$$

де ϕ — лінійний функціонал алгебри A такий, що $\|\phi\| = 1$.

Використовуючи цей факт, ми маємо, що $\overline{\mathcal{G}}(\Phi)$ є цілою функцією експоненціального типу, оскільки

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!|\phi\circ\Phi_n(\overline{G}_n)|} \le$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|\phi\circ\Phi_n\|\|\overline{G}_n\|} =$$

$$= R(\phi\circ\Phi) < \infty.$$

Оскільки ця нерівність виконується для кожного ϕ, $\|\phi\| = 1$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|\Phi_n(\overline{G}_n)\|} < \infty.$$

Твердження 5. *Нехай ψ_z визначений, як у теоремі 1. Тоді $\overline{\mathcal{G}}(\psi_z)(t) = e^{zt}$, $z \in A$.*

Доведення. Оскільки

$$\overline{G}_k(v_{n,z}) = \left(\frac{z}{n}\right)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix},$$

то

$$\varphi(\overline{G}_k) = \lim_n \overline{G}_k(v_{n,z}) = \frac{z^k}{k!}.$$

Тоді маємо, що

$$\overline{\mathcal{G}}(\psi_z)(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (zt)^k \psi_z(\overline{G}_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(zt)^k}{k!} = e^{zt}.$$

У роботі [8] показано, що для випадку $A = \mathbb{C}$ множина Ω функцій експоненціального типу

$$\Omega = \{h(t) = \mathcal{G}(\varphi)(t), \varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)\}$$

є власною напівгрупою з одиницею відносно множення у множині всіх функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}$.

Позначимо

$$\overline{\Omega} = \{\overline{\mathcal{G}}(\Phi)(t), \Phi \in \mathcal{M}_{bs}^{A}\}.$$

Таким чином, якщо $H(t) \in \overline{\Omega}$, то $\varphi\circ H(t) \in \Omega$ для довільного $\varphi \in \mathcal{M}(A)$. Тому $\overline{\Omega}$ є власною напівгрупою з одиницею у множині всіх A-значних функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.

2. *Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – **35**. – P. 55-64.

3. *Aron R.M., Cole B.J. and Gamelin T.W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **415**. – P. 51-93.

4. *Aron R.M., Cole B.J. and Gamelin T.W.* Weak-star continuous analytic funtions // Can. J. Math. – 1995. – **47**. – P. 673-683.

5. *Carne T.K., Cole B. and Gamelin T.W.* A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**. – P. 639-659.

6. *Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**. – P. 125-142.

7. *Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395**. – P. 569-577.

8. *Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. – 2014. – **27**, N2. – P. 575-585.

9. *Dineen S., Harte R.E., Taylor C.* Spectra of tensor product elements III: Holomorphic properties // Math. Proc. Royal Irish Acad. – 2003. – **103A**. – P. 61-92.

10. *González M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59**, N2. – P. 681-697.

11. *Nemirovskii A.S. and Semenov S.M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik – 1973. – **21**. – P. 255-277.