УДК 517.51

©2015 р. Ю.Б. Зелінський

Інститут математики НАН України, Київ

ЗАДАЧА ШТЕЙНГАУЗА-КОСИНСЬКОГО В КОМПЛЕКСНОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто узагальнення проблеми Штейнгауза на випадок багатовимірного комплексного простору. Показано, що коли розшарування Гопфа, яке задане на межі кулі, продовжити многозначним ациклічним відображенням, то існують три точки для яких образи мають спільну точку. Якщо це продовження нульвимірне, то точки з такими властивостями містять відкриту підмножину.

We consider a generalization of some problem of Steinhaus to higher-dimensional complex spaces. We show that for any continuous multi-valued acyclic map $\Phi : \mathbb{B}^{2n} \to \mathbb{C}$ on a ball $\mathbb{B}^{2n}, n \geq 2$, whose restiction to the boundary of the ball is a Hopf fibration, there is a point $y \in \mathbb{C}$ whose preimage $\Phi^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{B}^{2n} : y \in \Phi(x)\}$ contains at least three points. If the map Φ is zero-dimensional then the set $\{x \in \mathbb{B}^{2n} : |\Phi^{-1}(x)| \geq 3\}$ has non-empty interior in $\mathbb{B}^3$.

Класична задача Штейнгауза, що поставлена у 1953 році, формулюється так. Нехай для одиничного кола на площині кожна пара його антиподальних точок з'єднана всередині круга дугою. Очевидно, з теореми Жордана, що будь яка пара таких дуг перетинається. Нехай дуги неперервно залежать від своїх кінців. Чи існує точка в якій перетинається не менше трьох дуг?

Ця задача була позитивно розв'язана А. Косинським [1] навіть в загальнішій постановці для сфери в дійсному евклідовому просторі. Ряд задач, що природно пов'язані з цитованою задачею, розв'язані в роботах автора [2-10].

Означення 1. Множина E називається ациклічною, якщо усі приведені групи когомологій її дорівнюють нулю (усі когомології ми будемо розглядати з коефіцієнтами в групі цілих чисел) [11].

Розглянемо аналогічну до задачі Штейнгауза-Косинського задачу в комплексному евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$. Нехай $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ – одинична сфера. Кожна комплексна пряма через початок координат вирізає зі сфери коло. Розбиття сфери на такі кола задає розшарування Гопфа $h \colon S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ [12]. Припустимо, що для кожного кола всередині замкненої кулі B^{2n}, обмеженої цією сферою, існує ациклічний компакт, що містить це коло. Також припустимо, що ці компакти напівнеперервно зверху [12] залежать від кіл. Така сім'я компактів породжує напівнеперервне зверху многозначне ациклічне відображення $F \colon \mathbb{C}P^{n-1} \to B^{2n}$, яке кожному колу розшарування ставить у відповідність той компакт, що містить це коло.

Основний результат роботи – встановити аналогічні результати до розв'язку задачі Штейнгауза в (гіпер)комплексному випадку.

Якщо $F_1, F_2 \colon X \to Y$ – два многозначних відображення топологічних просторів, то будемо говорити, що F_2 є звуженням відображення F_1, якщо $F_1(x) \supset F_2(x)$ для всіх точок $x \in X$ (зокрема, якщо $A \supset B$ і $F_1 \colon A \to Y$, $F_2 \colon B \to Y$ – два відображення, то відображення F_2 – звуження відображення F_1 на B, якщо $F_1(x) \supset F_2(x)$ при $x \in B$ і $F_2(x) = \varnothing$ при $x \notin B$). Відображення F_1 будемо називати розширенням відображення F_2. Нехай $F \colon X \to Y$ – многозначне відображення. Через $\Gamma(F)$ позначимо графік цього відображення в $X \times Y$. Тоді відображення F можна представити як суперпозицію $F = qp^{-1}$, де p і q – однозначні відображення

– проекції графіка $\Gamma(F)$ на простори X і Y, відповідно.

Якщо тепер через F_2 позначимо відображення h^{-1} – обернене до розшарування Гопфа $h\colon S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$, то відображення $F\colon \mathbb{C}P^{n-1} \to B^{2n}$, побудоване вище, буде розширенням відображення F_2.

Лема 1. *Відображення $F\colon \mathbb{C}P^{n-1} \to B^{2n}$ можна задати так щоб кожен ациклічний компакт (образ точки) перетинався зі сферою межі $S^{2n-1} = \partial B^{2n}$ лише по колу, яке він містить.*

Доведення. Перетворимо відображення F так, щоб виконувалась вимога леми. Це просто зробити, погрузивши кулю B^{2n} в кулю B_1^{2n} більшого радіуса концентрично і продовжуючи кожен компакт $F(x)$ кільцем, яке комплексна пряма, що вирізала коло $F_2(x)$, вирізає зі сферичного кільця $B_1^{2n} \backslash B^{2n}$. Далі для нового відображення $\mathbb{C}P^{n-1} \to B_1^{2n}$ залишимо вихідне позначення F.

Означення 2. Многозначне відображення $F\colon X \to Y$ назвемо нульвимірним, якщо розмірність [13] прообразу $F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\}$ кожної точки $y \in Y$ дорівнює нулю або він є порожньою множиною.

Теорема 1. *При накладених вище умовах $F(\mathbb{C}P^{n-1}) = B^{2n}$. Існує точка $y \in B^{2n}$ через яку проходить не менше трьох компактів. Якщо відображення F нульвимірне, то множина точок в кулі, через які проходить не менше ніж три компакти містить відкриту множину.*

Доведення. Покажемо рівність $F(\mathbb{C}P^{n-1}) = B^{2n}$. Розглянемо комутативну діаграму відображень

$$
\begin{array}{ccccc}
\Gamma(F_2) & \xrightarrow{i_2} & \Gamma(F) & \xrightarrow{p} & \mathbb{C}P^{n-1} \\
{\scriptstyle q_2}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & , \\
S^{n-1} & \xrightarrow{i} & F(\mathbb{C}P^{n-1}) & &
\end{array}
$$

де i і i_2 – відповідні вкладення графіків та образів многозначних відображень, а p, q і q_2 – проекції цих графіків, причому q_2 – гомеоморфізм як проекція однозначного відображення h. Цій діаграмі відповідає комутативна діаграма груп когомологій

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^{2n-1}(\Gamma(F_2)) & \xleftarrow{i_2^*} & \\
 & & {\scriptstyle q_2^*}\uparrow & & \\
H^{2n}(F(\mathbb{C}P^{n-1}), S^{2n-1}) & \xleftarrow{\delta} & H^{2n-1}(S^{2n-1}) & \xleftarrow{i^*} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\xleftarrow{i_2^*} & H^{2n-1}(\Gamma(F_2)) & \xleftarrow{p^*} & H^{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \\
 & {\scriptstyle q_2^*}\uparrow & & \\
\xleftarrow{i^*} & H^{2n-1}(F(\mathbb{C}P^{n-1}), & &
\end{array}
$$

де в нижньому рядку маємо точну когомологічну послідовність. Група $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ тривіальна з міркувань розмірності. Тепер в силу ациклічності відображення F гомоморфізм p^* є ізоморфізмом, тому група $H^{2n-1}(\Gamma(F)) = 0$ теж тривіальна. З комутативності діаграми випливає, що гомоморфізм $q_2^* i^*$ тривіальний, а, отже мусить бути тривіальним і гомоморфізм i^*, тому що, в силу гомеоморфності відображення q_2, гомоморфізм q_2^* є ізоморфізмом ненульової групи $H^{2n-1}(S^{2n-1})$. Скористаємося точністю нижнього рядка діаграми. З нього випливає не тривіальність групи $H^{2n}(F(\mathbb{C}P^{n-1}), S^{2n-1})$, а це еквівалентне тому, що образ відображення F покриває усю кулю B^{2n}. Більше того гомоморфізм δ буде ізоморфізмом.

Далі природно вважати відображення F нульвимірним, бо інакше прообраз деякої точки буде містити не вироджений континуум і твердження теореми буде очевидним. З нульвимірності F випливає нульвимірність проекції q.

Нехай точка $a \in B^{2n} \backslash S^{2n-1}$. Покажемо, що знайдеться точка $z \in q^{-1}(a)$ така, що для довільного околу $W(z)$, $a \in \operatorname{int} q(W(z))$. Якщо це не так, то для кожної точки $z_i \in q^{-1}(a)$ знайдеться окіл $W(z_i)$, такий що $a \in \partial q(W(z_i))$. Виберемо скінчений набір околів $W(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, які покривають компакт $q^{-1}(a)$. Нехай $u(a)$ такий окіл точки a, що прообраз $q^{-1}(u(a))$ лежить в об'єднанні $\bigcup\limits_{i=1}^{m} W(z_i)$. Розглянемо перетин $q^{-1}(u(a)) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{m} W(z_i)$. Не порушуючи загальності будемо вважати, що цей перетин співпадає з об'єднанням $\bigcup\limits_{i=1}^{m} W(z_i)$. Має місце співвідношення

$$H^{2n}\left(\bigcup_{i=1}^{m} W(z_i),\ \bigcup_{i=1}^{m} \partial W(z_i)\right) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{m} H^{2n}(W(z_i),\ \partial W(z_i)).$$

Тоді в комутативній діаграмі

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(u(a),\partial u(a)) = H^{2n}(B^{2n}, B^{2n}\backslash u(a)) & \xleftarrow{\ j\ } & H^{2n}(B^{2n}, S^{2n-1}) \\ \Big\downarrow q_1^* & & \Big\downarrow q^* \\ H^{2n}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} W(z_i), \bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial W(z_i)\right) & \longrightarrow & H^{2n}(\Gamma(F), \Gamma(F_2)) \end{array}$$

гомоморфізм j є ізоморфізмом згідно аксіомі про вирізання. Отже суперпозиція q^*j є також ізоморфізмом ненульових груп. Це протирічить тому, що за припущенням гомоморфізм q_1^* тривіальний, бо він тривіально відображає групу на кожен з доданків образу.

Для продовження доведення нам потрібне одне твердження зв'язане з точками взаємної однозначності.

Означення 3. Якщо $f : X \to Y$ однозначне відображення, то точки виду $x = f^{-1}f(x)$ називаються точками взаємної однозначності.

Лема 2[4]. Нехай $f : X \xrightarrow{\text{“on“}} Y$ – неперервне відображення компактних топологічних просторів, нульвимірне на $X\backslash X_0$ ($f(X_0) = Y_0, f(X\backslash X_0) = Y\backslash Y_0$, де $Y\backslash Y_0$ n-вимірний топологічний многовид), яке має щільну множину точок взаємної однозначності. Якщо $H^n(A, \partial A) \neq 0$ для кожної замкненої множини A, яка містить в собі відкриту підмножину X, то $f\Big|_{X\backslash X_0}$ – гомеоморфізм.

Продовжимо доведення теореми. Очевидно, що відображення q не є гомеоморфізмом (інакше когомологічні групи проективного простору, які співпадають з групами графіка $\Gamma(F)$ були б тривіальними). Тому згідно з лемою 2 куля B^{2n} містить деяку відкриту множину A кожна точка якої має не менше двох прообразів.

Введемо позначення

$$K_i = \{y | y \in A \text{ і } q^{-1}(y) \cap \Gamma(F)$$
$$\text{складається з } i \text{ точок}\}.$$

Покажемо, що розмірність $\dim K_2 \leq 2n-1$.

Оскільки A – $2n$-вимірний многовид, то досить показати, що в K_2 не входить ніяка відкрита множина.

Припустимо, що в K_2 входить деяка відкрита множина u і нехай $y \in u$. Тоді $q^{-1}(y) \cap \Gamma(F)$ складається з двох точок x_1 і x_2. Виберемо для цих точок околи V_1 та V_2 відповідно, які не перетинаються. Образ принаймні одного з них, нехай V_1, згідно з показаним вище буде околом точки y. Тоді, якщо V_2 достатньо малий окіл, то $q(V_2) \subset q(V_1)$, а отже, $q|_{V_2}$ – гомеоморфізм, тому що усі точки із $q(V_2) \cap q(V_1)$ мають рівно два прообрази. З таких же міркувань буде гомеоморфізмом обмеження $q\Big|_{(q^{-1}q(V_2))\cap V_1}$. Не порушуючи загальності нехай $q(V_2) = q(V_1)$.

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccc} H^{2n}(\overline{A}, \overline{A}\backslash q(V_1)) & \xrightarrow{\ j\ } & H^{2n}(\overline{A}, \partial\overline{A}) & \longrightarrow & H^{2n}(\overline{A}\backslash q(V_1), \partial\overline{A}) \\ \Big\downarrow q_1^* & & \Big\downarrow g^* & & \\ H^{2n}(\Gamma(F), \Gamma(F)\backslash(V_1 \cup V_2)) & \xrightarrow{\ j_1^*\ } & H^{2n}(\Gamma(F), q^{-1}\partial A). & & \end{array}$$

В цій діаграмі група $H^{2n}(\overline{A}, \overline{A}\backslash q(V_1)) \approx H^{2n}(q(V_1), \partial q(V_1)) \approx \mathbb{Z}$, згідно з аксіомою про вирізання, а $H^{2n}(\Gamma(F), \Gamma(F)\backslash(V_1 \cup V_2)) \approx$

$\approx H^{2n}(V_1 \cup V_2, \partial V_1 \cup \partial V_2))$. Група $H^{2n}(\overline{A}, \partial\overline{A}) \approx \mathbb{Z}$, а $H^{2n}(\overline{A}\backslash q(V_1), \partial\overline{A}) = 0$, тому що $\overline{A}\backslash q(V_1)$ власна замкнена підмножина $\overline{A}$. Отже з точності послідовності в верхньому рядку гомоморфізм j є ізоморфізмом. Нехай η твірна групи $H^{2n}(q(V_1), \partial q(V_1))$, $q^*j(\eta) = \beta$, де β – твірна групи $H^{2n}(\Gamma(F), q^{-1}\partial A)$. В силу гомеоморфності обмежень q на околи V_1 і V_2 $H^{2n}(V_1, \partial V_1) \approx H^{2n}(V_2, \partial V_2) \approx H^{2n}(qV_1, \partial qV_1) \approx \mathbb{Z}$. Якщо μ_1, μ_2 – твірні груп $H^{2n}(V_1, \partial V_1)$, $H^{2n}(V_2, \partial V_2)$ відповідно, то гомоморфізм j_1 на компонентах має вид $j_1(\mu_1, 0) = \beta,\ j_1(0, \mu_2) = \beta$.

Гомоморфізми $q_1^* : H^{2n}(q(V_1), \partial q(V_1)) \to H^{2n}(V_i, \partial q(V_i)),\ \ i = 1, 2$ на твірних мають вид $q_1^*(\gamma) = \pm\mu_i$ в залежності від того, зберігає чи не зберігає відображення q орієнтацію на околах. Тоді результатом гомоморфізму $j_1^* q_1^*(\eta)$ може бути один з результатів $-2\beta, 0, 2\beta$. Жоден з цих результатів не співпадає з β, що повинно бути згідно комутативності діаграми. Маємо протиріччя.

Припустимо тепер, що $\dim[(A \backslash K_1) \backslash K_2] \leq 2n-1$. Тоді $\dim(A \backslash K_2) \leq 2n-1$ в силу вибору множини A. Отже множина K_2 всюди щільна в A. Виберемо ту точку $y \in A$, яка має рівно два прообрази x_1 і x_2. Нехай V_1 і V_2 околи цих точок, які не перетинаються. Як і вище можемо вважати, що $q(V_2) = q(V_1)$ і обмеження відображення q на ці околи є гомеоморфізмами. Тоді отримаємо, що усі точки з $W = q(V_2) = q(V_1)$ мають рівно два прообрази, а це як ми бачили вище неможливо. Отже $\dim[(A \backslash K_1) \backslash K_2] = 2n$. Теорема доведена.

В гіперкомплексному випадку аналогічну задачу можна розглянути в просторі $\mathbb{H}^n$. Нехай $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$ – одинична сфера. Кожна гіперкомплексна пряма через початок координат вирізає зі сфери тривимірну сферу (3-сферу). Розбиття сфери на такі 3-сфери задає розшарування $h\colon S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ [12]. Припустимо, що для кожної такої 3-сфери всередині замкненої кулі B^{4n}, обмеженої сферою S^{4n-1}, існує ациклічний компакт, що містить вирізану 3-сферу. Також припустимо, що компакти напівнеперервно зверху залежать від вирізаних 3-сфер. Така сім'я компактів породжує напівнеперервне зверху многозначне ациклічне відображення $F\colon \mathbb{H}P^{n-1} \to B^{4n}$, яке кожній 3-сфері ставить у відповідність той компакт, що містить цю 3-сферу.

Теорема 2. *При накладених вище умовах $F(\mathbb{H}P^{n-1}) = B^{4n}$. Існує точка $y \in B^{4n}$ через яку проходить не менше трьох компактів. Якщо відображення F нульвимірне, то множина точок в кулі, через які проходить не менше ніж три компакти містить відкриту множину.*

Доведення теореми аналогічне попередньому результату.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. A. Kosinski, *On a problem of Steinhaus*, Fund. Math., (1958), **46**, 47-59.
2. Ю.Б. Зелинский, *Применение теории пучков к исследованию непрерывных отображений* , Десятая матем. школа. Киев; Институт математики АН УССР, (1974), 290-307.
3. Ю.Б. Зелинский, *О некоторых проблемах Косинского*, Укр. матем. журнал, (1975), **27**, №4, 510-516.
4. Ю.Б. Зелинский, *Об n-допустимых многозначных отображениях*, Метрические вопр. теории функций и отображений, Вып.7, Киев; Наукова думка, (1975), 64-83.
5. А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці Інституту математики НАНУ, **73**, (2008), 308 с.
6. Yuri Zelinskii, *Ideas of Hugo Steinhaus in contemporary mathematics*, Lvov mathematical school in the period 1915-45 as seen today.- Warszawa: PAN. (2009), 107-114.
7. Ю.Б. Зелинский, *О кратности непрерывных отображений областей*, Укр. матем. журн., (2005), **57**, № 4, 554-558.
8. Ю.Б. Зелинский, *Об отображении проективного пространства в сферу*, Укр. матем. журн. (2010), **62**, № 7, 1037-1044.
9. Ю.Б. Зелинский, *Открытые вопросы отображения областей на многообразиях*, Збірник праць Інституту математики НАНУ, (2010), **7**, № 2, 242-248.
10. Yuri Zelinskii, *Continuous mappings between domains*, Bulletin de la societé des sci. et letters de Lódź, (2010), **60**, № 2, 10-14.
11. Э.Спеньер *Алгебраическая топология*, Москва: Мир, (1971), 680 с.
12. В.А. Рохлин, Д.Б. Фукс, *Начальний курс топологии*, Москва: Наука, (1977), 488 с.
13. К. Куратовский, *Топология*, В 2-х т., Москва: Мир, (1966), **1**, 596 с, **2**, 624 с.
14. П.С. Александров, Б.А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Москва: Наука, (1973), 576 с.