УДК 517.956.4

©2015 р. С.Д. Івасишен[1,3], Г.С. Пасічник[2,3]

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",
[2]Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
[3]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова другого порядку з коефіцієнтами сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів реалізовано започаткований С. Д. Ейдельманом підхід, який дозволяє отримати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків і повністю охарактеризувати відповідні класи розв'язків.

The approach initiated by S.D. Eidelman that allows to get accurate results about the correct solvability of the Cauchy problem and the integral representation of the solutions that enables to characterize the relevant classes of solutions completely is realized for the second order degenerate parabolic equation of Kolmogorov type with the constant coefficients in a group of its highest terms and with the growing coefficients in a group of its lowest terms.

Вступ

У працях з теорії параболічних за Петровським систем (наприклад, [1, 2]) С. Д. Ейдельман запропонував підхід, згідно з яким еволюція по часу t розв'язків задачі Коші характеризується їх належністю до сімейства банахових просторів (при кожному t до свого простору). Такий підхід дає можливість одержати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення розв'язків, визначених у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$, через їх граничні значення на гіперплощині $\{t = 0\}$ для параболічних рівнянь різної структури. Запропонований С. Д. Ейдельманом підхід далі розвивався і багатократно реалізовувався у працях першого автора та його учнів [3, 4]. У [4] цей підхід називається "підходом Е–І".

При реалізації підходу Е–І для досить широких класів U розв'язків параболічних рівнянь вирішуються такі питання: за яких умов існує і є єдиним розв'язок із класу U, якими є множини початкових значень (при $t = 0$) розв'язку і в якому сенсі розв'язок задовольняє початкову умову, за яких умов є правильним інтегральне зображення розв'язку через його початкові значення.

Зазначимо, що підхід Е–І реалізується для тих параболічних рівнянь, для яких відома детальна інформація про фундаментальний розв'язок задачі Коші (якщо розв'язки визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$) або матрицю Гріна крайової задачі (якщо розв'язки визначені в циліндричній області $(0,T\,] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$).

У цій статті наведемо найостанніші результати авторів стосовно реалізації підходу Е–І для одного виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів.

1. Про загальну схему підходу Е–І

Розглянемо параболічне, не уточнюючи в якому сенсі, рівняння

$$(\partial_t - A(t,x,\partial_x))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u\Big|_{t=0} = \varphi. \tag{2}$$

Нехай Φ – простір початкових даних таких, що для кожного $\varphi \in \Phi$ існує єдиний класичний розв'язок u рівняння (1), який належить до певного класу U та задовольняє початкову умову (2) у залежному від вибору Φ сенсі.

Якщо Φ – простір експоненціально зростаючих при $|x| \to +\infty$ функцій, а (1) – параболічне за Петровським рівняння [3], то відповідний простір U складається із функцій, які для кожного фіксованого $t \in (0,T]$ як функції x експоненціально зростають при $|x| \to +\infty$. Тип зростання при цьому, взагалі кажучи, залежить від t, тобто розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, як функція x при кожному фіксованому $t \in (0,T\,]$ належить до деякого банахового простору U_t. Це означає, що еволюція по часу розв'язків задачі (1), (2) може описуватися їх належністю до відповідних просторів U_t, $t \in (0,T\,]$. Простір U можна означити як простір класичних розв'язків рівняння (1), які мають такі властивості:

$$\forall\, t \in (0,T]: \quad u(t,\cdot) \in U_t; \qquad \sup_{t\in(0,T]} \|\, u(t,\cdot)\,\|_{U_t} < +\infty.$$

Так означений простір U збігається з множиною значень оператора Пуассона P, визначеного на просторі Φ формулами

$$(P\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\times$$
$$\times \begin{cases} \varphi(\xi)\,d\xi, \text{ якщо } \varphi - \text{функція}, \\ d\varphi(\xi), \text{ якщо } \varphi - \text{узагальнена міра}, \end{cases}$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де G – фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1). При цьому оператор $P:\ \Phi \to U$ є ізоморфізмом.

Наведемо загальні твердження з [3], які лежать в основі підходу Е–І у випадку підходящого вибору простору Φ і знаходження сімейства банахових просторів U_t, $t \in (0,T]$.

Метатеорема А. *Для будь-якого $\varphi \in \Phi$ існує єдиний класичний розв'язок u рівняння* (1) *із простору U, який задовольняє початкову умову* (2). *Цей розв'язок визначається формулою*

$$u = P\varphi, \tag{3}$$

а характер задоволення початкової умови (2) *залежить від вибору простору Φ.*

Метатеорема В. *Для будь-якого класичного розв'язку u рівняння* (1) *із простору U існує єдиний елемент $\varphi \in \Phi$ такий, що виконується (у відповідному сенсі) початкова умова* (2). *При цьому є правильним зображення* (3).

Отже, питання про правильність метатеорем А і В зводиться до вибору підходящих просторів Φ і знаходження відповідних сімейств банахових просторів U_t, $t \in (0,T]$.

Досить широкі сімейства просторів Φ і U_t, $t \in (0,T]$, описано в монографії [2] для параболічних за Петровським систем та в [3, 4] для $\overrightarrow{2b}$-параболічних у сенсі Ейдельмана систем, деяких класів параболічних рівнянь з виродженнями та особливостями (параболічних за Петровським рівнянь з оператором Бесселя, параболічних за Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі слабким виродженням на початковій гіперплощині, деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами), класів вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова та деяких параболічних крайових задач.

2. Реалізація підходу Е–І для одного виродженого рівняння

Наведемо означення просторів Φ і U_t, $t \in (0,T]$, для одного ультрапараболічного рівняння типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів.

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$; $n := n_1+n_2+n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1},\ldots,x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1,x_2,x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11},...,x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)},...,x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)},...,x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21},...,x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)},...,x_{2n_2})$.

У шарі $\Pi_{(0,T]}$ скінченної товщини $T > 0$

розглядатимемо рівняння

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$
$$- \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (4)$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1,...,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta > 0 \ \ \forall\,\sigma_1 := (\sigma_{11},...,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} :$$
$$\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

Нехай $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – ФРЗК для рівняння (4). Для нього справджуються, зокрема, оцінки [5]

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3}G(t,x;\tau,\xi)| \leq$$
$$\leq C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (5)$$

де k_l і m_l – довільні мультиіндекси розмірності n_l, $l \in \{1,2,3\}$, $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b > 0$;

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{ -c\,\Big(\frac{|e^{bt}X_1(t)-\xi_1|^2}{p_1(t)} +$$
$$+\sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)}\Big)\Big\},$$
$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1,$$
$$X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1',$$

де для $t > 0$

$$\alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b \neq 0,\\ t, & b = 0,\end{cases}$$

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{2bt}-1}{2b} & b \neq 0,\\ t, & b = 0,\end{cases},$$

$$p_2(t) := \begin{cases} 12\,\Big(\dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)}\Big), & b \neq 0,\\ t^3, & b = 0,\end{cases}$$

$$p_3(t) :=$$
$$= \begin{cases} 720\,\Big(\dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2(e^{bt}+1)}{2b^3(e^{bt}-1)}\Big), & b \neq 0,\\ t^5, & b = 0.\end{cases}$$

Щоб означити простори необхідні функцій та узагальнених мір, уведемо такі набори визначених для $t \in [0,T]$ функцій:

$$\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)),$$
$$k_1(t,a_1) := \frac{c_0a_1e^{2bt}}{c_0 - a_1p_1(t)},$$
$$k_l(t,a_l) := \frac{c_0a_l}{c_0 - a_lp_l(t)}, \quad l \in \{2,3\};$$
$$\vec{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$
$$\vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t),\ldots,s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1,2,3\},$$
$$s_{1j}(t) := k_1(t,a_1) + 2\theta(n_2-j)(\alpha_b(t))^2\times$$
$$\times k_2(t,a_2) + 4\Big(\frac{\alpha_b(t)-t}{b}\Big)^2\theta(n_3-j)k_3(t,a_3),$$
$$j \in \{1,\ldots,n_1\},$$
$$s_{2j}(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2\theta(n_3-j)k_3(t,a_3),$$
$$j \in \{1,\ldots,n_2\},$$
$$s_{3j}(t) := 4k_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_3\},$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (5), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T) < c_0/a_l$, $l \in \{1,2,3\}$, $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$, а також вагові функції

$$\Phi_\nu(t,x) := \exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}k_l(t,a_l)|X_l(t)|^2\Big\},$$

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}s_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\Big\},$$

$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\quad \nu\in\mathbb{R}.$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}:=\|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}:=\|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$t\in[0,T],\quad p\in[1,\infty].$$

Використовуватимемо такі простори: $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ – простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $L_p^{\vec{a}}:=L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$; $M^{\vec{a}}$ – простір узагальнених борелівських мір $\mu:\mathfrak{B}\longrightarrow\mathbb{C}$ таких, що

$$\|\mu\|^{\vec{a}}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi_{-1}(0,x)\;d|\mu|(x)<+\infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелівських множин простору $\mathbb{R}^n$ і $|\mu|$ – повна варіація μ; $L_1^{-\vec{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$; $C_0^{-\vec{s}(T)}$ – простір непрервних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ таких, що

$$|\psi(x)|\Psi_1(T,x)\underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

ФРЗК G породжує інтеграли Пуассона відповідно функції φ та узагальненої міри μ за формулами

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\;\;(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{6}$$

та

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi),\;\;(t,x)\in\Pi_{(0,T]}.\tag{7}$$

Наведемо теореми про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші для рівняння (4).

Теорема 1. *Для довільної функції $\varphi\in L_p^{\vec{a}}$, $p\in[1,\infty]$, та узагальненої міри $\mu\in M^{\vec{a}}$ формули (6) та (7) визначають єдині розв'язки рівняння (4) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, які мають такі властивості: існує не залежна від φ і μ стала $C>0$ така, що справджуються відповідно нерівності*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}},\quad t\in(0,T],\tag{8}$$
$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C\|\mu\|^{\vec{a}},\quad t\in(0,T];\tag{9}$$

при $p\in[1,\infty)$ виконується співвідношення

$$\lim_{t\to0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}=0,\tag{10}$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to0+]{сл}\varphi$, і для функції (7) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to0+]{сл}\mu$, тобто справджуються співвідношення

$$\forall\,\psi\in L_1^{-\vec{s}(T)}:$$
$$\lim_{t\to0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx,\tag{11}$$
$$\forall\,\psi\in C_0^{-\vec{s}(T)}:$$
$$\lim_{t\to0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,u(t,x)\;dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\;d\mu(x).\tag{12}$$

Теорема 2. *Нехай $\varphi\in L_p^{\vec{a}}$, $p\in[1,\infty]$, і $\mu\in M^{\vec{a}}$. Тоді правильні такі твердження:*

1) розв'язок u рівняння (4), який задовольняє умови

$$\exists\,C>0\;\;\forall\,t\in(0,T]:\;\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C,\tag{13}$$

при $1\le p<\infty$ виконується співвідноненння (10) і при $p=\infty$ – співвідноненння (11), зображується у вигляді (6);

2) для розв'язку u рівняння (4), для якого виконується нерівність (13) з $p=1$ і співвідношення (12), правильне зображення (7).

Наступна теорема є в певному розумінні оберненою до попередніх теорем.

Теорема 3. *Нехай u – розв'язок рівняння (4) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, який задовольняє умову*

$$\begin{gathered}\exists\,C>0\;\;\exists\,p\in[1,\infty]\quad\forall\,t\in(0,T]:\\ \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C.\end{gathered}\tag{14}$$

Тоді при $1<p\le\infty$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^{\vec{a}}$, а при $p=1$ – єдина узагальнена міра

$\mu \in M^{\vec{a}}$ *такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді* (6) *і* (7).

Детальне доведення теорем 1 – 3 є в працях [6, 7]. Наведемо важливі наслідки з цих теорем.

1) Якщо $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in (1, \infty]$, і $\mu \in M^{\vec{a}}$, то розв'язки (6) і (7) при кожному фіксованому $t \in (0, T]$ належать відповідно до просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $L_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}$.

2) Простори $L_p^{\vec{a}}$, $p \in (1, \infty]$, і $M^{\vec{a}}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (4) тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (14) відповідно з $p \in (1, \infty]$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною і достатньою для зображення розв'язку у вигляді (6) і (7).

3) Задача про знаходження умов на визначені в області розв'язки рівняння, які гарантують існування граничних значень цих розв'язків на межі області, є важливою класичною задачею теорії аналітичних і гармонічних функцій. Тут ця задача розв'язана для розв'язків рівняння (4), які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$ і належать для кожного $t \in (0, T]$ до вагових просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$. Цим самим для рівняння (4) реалізовано підхід Е–І, який дав можливість отримати точні результати про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші, при цьому повністю охарактеризувати відповідні класи розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Фундаментальные матрицы решений общих параболических систем / С.Д. Эйдельман // Докл. АН СССР. – 1958. – **120**, №5. – С. 980–983.

2. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

3. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman , S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

4. *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу / Івасишен С.Д. // Мат. студії. – 2013. – **40**, №2. – С. 172–181.

5. *Івасишен С.Д.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, №2. – С. 126–153.

6. *Івасишен С.* Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / Степан Івасишен, Галина Пасічник // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. – 2014. – **11**. – С. 73–87.

7. *Івасишен С.Д.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, №2. – С. 205–229.