УДК 515.12

©2015 р. Олена Карлова

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО СЛАБКІ РЕТРАКТИ ДАРБУ

Доводиться, що довільна зв'язна континуальна підмножина F зв'язного простору X, яка є прообразом нуля при деякому відображенні Дарбу простору X у відрізок $[0,1]$, є ретрактом Дарбу цього простору. Показано також, що кожна зв'язна підмножина метризовного сепарабельного простору, доповнення до якої не має ізольованих точок, є слабким ретрактом Дарбу цього простору.

We prove that any connected subset F of a connected space X with $|F| = \mathfrak{c}$ is a Darboux retract of X if there exists a Darboux function $f : X \to [0,1]$ such that $F = f^{-1}(0)$. We also show that any connected subset E of a metrizable separable space X is a weak Darboux retract of X if the complement $X \setminus E$ has no isolated points.

1. Вступ

Сукупність усіх відображень між топологічними просторами X і Y, які мають властивість P, ми позначаємо через $P(X,Y)$. Символом C ми позначаємо властивість неперервності.

Підмножину E топологічного простору X назвемо *P-ретрактом* простору X, якщо існує відображення $r \in P(X,E)$, таке, що $r(x) = x$ для всіх $x \in E$. При цьому відображення r називається *P-ретракцією* простору X на E.

Зауважимо, що у випадку, коли відображення r неперервне, то E називається просто *ретрактом* простору X.

Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y має *(слабку) властивість Дарбу*, якщо образ довільної зв'язної (і відкритої) підмножини простору X є зв'язною множиною в Y.

Клас усіх відображень з X в Y, які мають (слабку) властивість Дарбу ми позначаємо через $\mathrm{D}(X,Y)$ ($w\mathrm{D}(X,Y)$).

Ретракти топологічних просторів з властивостями типу Дарбу вивчались у працях [3–9]. Слід зазначити, що у всіх згаданих роботах, крім [8], розглядалися підмножини метризовних сепарабельних просторів. Так, у [9] автори довели, що довільний зв'язний компакт у метризовному сепарабельному просторі є ретрактом Дарбу цього простору. Ми узагальнюємо результати з [9] і [8] на випадок, коли підмножина топологічного простору не обов'язково функціонально замкнена в цьому просторі. Крім того, ми вводимо поняття *слабкого ретракту Дарбу* і доводимо, що кожна зв'язна підмножина метризовного сепарабельного простору, доповнення до якої не має ізольованих точок, є слабким ретрактом Дарбу.

2. Ретракти Дарбу

Нехай X – топологічний простір. Множина $A \subseteq X$ називається *P-нулем простору X*, якщо існує відображення $f \in P(X,[0,1])$, таке, що

$$A = f^{-1}(0).$$

Твердження 1. *Якщо зв'язна підмножина A топологічного простору X є D-нулем в X, то вона замкнена в X.*

Доведення. Нехай $f : X \to [0,1]$ – така функція Дарбу, що $A = f^{-1}(0)$. Припустимо, що існує $x \in \overline{A} \setminus A$ і зазначимо, що множина $C = A \cup \{x\}$ зв'язна. Тоді, з одного боку, множина $f(C)$ зв'язна, а з іншого боку виконується рівність $f(C) = \{0\} \sqcup \{f(x)\}$, звідки випливає суперечність.

Зрозуміло, що довільна функціонально замкнена підмножина (тобто, множина, яка є C-нулем) топологічного простору є і D-нулем цього простору. Твердження 2 показує, що ця умова не є необхідною. Перед формулюванням цього твердження нагадаємо, що *подвійним колом Александро-*

ва (див. [1, с. 205]) називається множина $X \subseteq \mathbb{R}^2$, яка є об'єднанням двох концентричних кіл $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ і $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ з топологією τ, що вводиться наступним чином. Позначимо через π відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0, 0)$, а через V_n – відкриту дугу довжини $1/n$ кола C_1 з серединою в точці p. Покладемо $\mathcal{B}(p) = \{V_n \cup \pi(V_n \setminus \{p\}) : n \in \mathbb{N}\}$ при $p \in C_1$ і $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$ при $p \in C_2$. Тоді топологія τ на множині X породжується сім'єю околів $(\mathcal{B}(p))_{p \in X}$. Множину X з топологією τ ми будемо позначати символом $\mathbb{A}$. Добре відомо, що подвійне коло Александрова є неметризовним компактним гаусдорфовим простором, який не є досконало нормальним.

Твердження 2. *В просторі $\mathbb{A}$ довільна замкнена зв'язна підмножина є* D*-нулем цього простору.*

Доведення. Нехай $F \subseteq \mathbb{A}$ – замкнена зв'язна множина. Тоді $F \subseteq C_1$ або F – одноточкова підмножина C_2. Справді, якщо $F \cap C_2 \neq \emptyset$, то $F = \{p\} \sqcup (F \setminus \{p\})$, де p – довільна точка з $C_2 \cap F$. Оскільки одноточкова множина $\{p\}$ відкрито-замкнена в $\mathbb{A}$, а множина F зв'язна, то $F = \{p\}$.

У випадку $F \subseteq C_1$ ми, використовуючи замкненість множини F у метризовному просторі C_1, виберемо таку неперервну функцію $\varphi : C_1 \to [0, 1]$, що $F = \varphi^{-1}(0)$ і для всіх $p \in \mathbb{A}$ покладемо

$$f(p) = \begin{cases} \varphi(p), & p \in C_1, \\ 1, & p \in C_2. \end{cases}$$

Тоді з вищедоведеного випливає, що функція $f : \mathbb{A} \to [0, 1]$ має властивість Дарбу. Крім того, $F = f^{-1}(0)$.

У випадку $F = \{p\} \subseteq C_2$ покладемо $f = 1 - \chi_F$ і зауважимо, що функція $f : \mathbb{A} \to [0, 1]$ неперервна, адже множина F відкрито-замкнена.

Таким чином, множина F є D-нулем простору $\mathbb{A}$.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний простір і $F \subset X$ – зв'язний* D*-нуль простору X, такий, що*

(i) $|F| = \mathfrak{c}$;

(ii) *F є власною підмножиною деякої компоненти зв'язності K простору X.*

Тоді F – ретракт Дарбу простору X.

Доведення. Нехай $F = \{x_s : s \in S\}$, де $|S| = \mathfrak{c}$, і $f : X \to [0, 1]$ – така функція Дарбу, що $F = f^{-1}(0)$. Розглянемо розбиття $(Y_s : s \in S)$ проміжку $(0, 1]$ на континуум всюди щільних множин Y_s і позначимо $X_s = f^{-1}(Y_s)$ при $s \in S$. Зауважимо, що $X_s \neq \emptyset$ для кожного $s \in S$. Справді, якщо якась з множин X_s порожня, то $f(K) \subseteq [0, 1] \setminus Y_s$. Оскільки $F \subset K$ і функція f має властивість Дарбу, то $\operatorname{int} f(K) \neq \emptyset$. З щільності множини Y_s випливає, що $Y_s \cap f(K) \neq \emptyset$, суперечність.

Визначимо ретракцію $r : X \to F$ наступним чином:

$$r(x) = \begin{cases} x, & x \in F, \\ x_s, & x \in X_s. \end{cases}$$

Покажемо, що r має властивість Дарбу. Нехай $C \subseteq X$ – довільна зв'язна множина. Якщо $C \subseteq F$, то $r(C) = C$. Нехай $C \setminus F \neq \emptyset$. Якщо $f(C) = \{y\}$ при $y \neq 0$, то існує єдине $s \in S$, таке, що $y \in Y_s$. У цьому випадку $C \subseteq X_s$ і множина $r(C)$ одноточкова. Якщо ж $\operatorname{int} f(C) \neq \emptyset$, то $f(C) \cap Y_s \neq \emptyset$ для всіх $s \in S$. У цьому випадку $r(C) = F$. Таким чином, множина $r(C)$ зв'язна.

З теореми 3 безпосередньо випливає

Наслідок 1. *Нехай X – зв'язний простір і $F \subseteq X$ – континуальний зв'язний D-нуль простору X. Тоді F – ретракт Дарбу простору X.*

Зауважимо, що з теореми 3 випливає також, що кожна власна замкнена дуга C кола C_1 є ретрактом Дарбу простору $\mathbb{A}$. При цьому множина C не є функціонально замкненою в $\mathbb{A}$.

У твердженні 5 ми покажемо, що потужність множини F у наслідку 1 не можна збільшити.

3. Слабкі ретракти Дарбу

З означення негайно випливає, що кожна функція Дарбу має і слабку властивість

Дарбу. Обернене твердження не вірне, що ми проілюструємо в наступному прикладі.

Приклад 1. Розглянемо канторову множину C на відрізку $[0,1]$ і нехай $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність суміжних інтервалів $I_n = (a_n, b_n)$ до канторової множини. Нехай функція $f : [0,1] \to [0,1)$ діє за правилом

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a_n}{b_n-a_n}, & x \in [a_n, b_n), \\ \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n. \end{cases}$$

Тоді f має слабку властивість Дарбу і не має властивості Дарбу.

Доведення. Оскільки образ $\{\frac{1}{2}\} \cup [\frac{13}{20}, 1)$ множини $[\frac{11}{20}, \frac{2}{3}]$ при відображенні f не зв'язний, то f не є функцією Дарбу.

Тепер доведемо, що f має слабку властивість Дарбу. Нехай $U = (a,b) \subseteq [0,1]$, причому $a < b$. Тоді або $U \subseteq I_n$, або $U \supseteq I_n$ для деякого n. В першому випадку $f(U) = (f(a), f(b))$, а в другому $f(U) = [0,1)$. Отже, множина $f(U)$ зв'язна.

Нехай $\kappa > 1$ – деякий кардинал. Топологічний простір X називається *κ-розкладним*, якщо існує розбиття $(X_s : s \in S)$ цього простору на всюди щільні підпростори X_s, причому $|S| = \kappa$.

Теорема 4. *Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$ – зв'язна множина потужності κ, така, що простір $X \setminus E$ є κ-розкладним. Тоді E – слабкий ретракт Дарбу простору X.*

Доведення. Нехай $E = \{x_s : s \in S\}$, де $|S| = \kappa$. Крім того, нехай $(X_s : s \in S)$ – розбиття доповнення $X \setminus E$ на всюди щільні множини X_s. Побудуємо відображення $r : X \to E$ наступним чином:

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in E, \\ x_s, & \text{якщо } x \in X_s. \end{cases}$$

Доведемо, що відображення r має слабку властивість Дарбу. Для цього розглянемо відкриту зв'язну множину $U \subseteq X$. Якщо $U \subseteq E$, то $r(U) = U$. Нехай $U \setminus E \neq \emptyset$. Оскільки множина $U \setminus E$ відкрита в $X \setminus E$, а множина X_s щільна в $X \setminus E$, то

$$(U \setminus E) \cap X_s \neq \emptyset$$

для кожного $s \in S$. Тоді

$$r(U) = r(U \setminus E) \cup r(U \cap E) =$$
$$= (\bigcup_{s \in S} r((U \setminus E) \cap X_s)) \cup (U \cap E) =$$
$$= (\bigcup_{s \in S} \{x_s\}) \cup (U \cap E) = E \cup (U \cap E) = E.$$

Отже, в будь-якому з випадків множина $r(U)$ зв'язна.

Для топологічного простору X позначимо

$$\Delta(X) = \min\{|G| : G \in \tau^+(X)\},$$

де $\tau^+(X)$ – сукупність усіх відкритих непорожніх підмножин простору X. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *максимально розкладним*, якщо існує розбиття $(X_s : s \in S)$ цього простору на всюди щільні підпростори, де $|S| = \Delta(X)$. Зауважимо, що довільний метризовний простір без ізольованих точок є максимально розкладним [2].

Наслідок 2. *Нехай X – метризовний сепарабельний простір і $E \subset X$ – зв'язна підмножина, доповнення до якої не має ізольованих точок. Тоді E – слабкий ретракт Дарбу простору X.*

Доведення. Зауважимо, що $|X| = |E| = \mathfrak{c}$. Крім того, $\Delta(X \setminus E) = \mathfrak{c}$. Залишилось застосувати теорему 4.

Нагадаємо, що елемент x зв'язного простору X називається *розбиваючою точкою*, якщо множина $X \setminus \{x\}$ не зв'язна. У протилежному випадку, точка x називається *нерозбиваючою*. Під *дугою* ми розуміємо зв'язний компактний гаусдорфовий простір, який має рівно дві нерозбиваючі точки. Сепарабельна дуга гомеоморфна відрізку $[0,1]$ (див., наприклад, [1, с. 549]). Несепарабельна дуга називається *довгою дугою*.

Твердження 5. *Існує зв'язний функціонально замкнений підпростір F гаусдорфового компактного зв'язного простору X, який не є слабким ретрактом Дарбу цього простору.*

Доведення. Нехай λ – довільний ординал потужності строго більшої, ніж $\mathfrak{c}$, і нехай F – це добуток $\lambda \times [0,1) \cup \{(\lambda, 0)\}$, наділений топологію, породженою лексикографічним порядком на множині F. Зауважимо, що F – це довга дуга. Розглянемо простір X, який є склейкою простору F з відрізком $I = [0,1]$, при якій ототожнюються точки $(0,0)$ з 0 та $(\lambda, 0)$ з 1. Так побудований простір X зв'язний, компактний і гаусдорфовий.

Нехай $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ – довільна неперервна функція, така, що $\{0,1\} = \varphi^{-1}(0)$. Тоді функція $f : X \to [0,1]$, яка діє за правилом $f(x) = \varphi(x)$ при $x \in I$ і $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus I$, неперервна і $F = f^{-1}(0)$. Отже, множина F функціонально замкнена в X.

Припустимо, що існує ретракція $r : X \to F$, яка має слабку властивість Дарбу. Тоді множина $F_0 = r((0,1))$ зв'язна. Припустимо, що $\inf F_0 = x = (\alpha, t) \neq (0,0)$ і візьмемо довільне $y = (\beta, s) \in F$, таке, що $(0,0) \neq (\beta, s) < (\alpha, t)$. Оскільки $G = (0,1) \cup [0, y)$ – відкрита зв'язна підмножина простору X, то $r(G)$ – теж зв'язна множина. Але $r(G) \subseteq F \setminus \{y\}$, суперечність. Отже, $\inf F_0 = (0,0)$. Аналогічно, $\sup F_0 = (\lambda, 0)$. Тоді $|r((0,1))| = |F_0| = \mathfrak{c}$, звідки випливає, що наше припущення не вірне. Таким чином, F не є слабким ретрактом Дарбу простору X.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир (1986) 790 с.

2. J.G. Ceder, *On maximally resolvable spaces*, Fund. Math. **55** (1964), 87–93.

3. J.L. Cornette, *Connectivity functions and images of Peano continuum*, Fund. Math. **75** (1966), 184–192.

4. J.L. Cornette, J.E. Girollo, *Connectivity retracts of finitely coherent Peano continua*, Fund. Math. **61** (1967), 177–182.

5. R.G. Gibson, F. Roush, *Concerning the extension of connectivity functions*, Topol. Proc. **10** (1985), 75–82.

6. G.R. Gordth, K.R. Kellum, *Strong Darboux retracts*, Top. Appl. **53** (1993), 1–5.

7. R. Pawlak, *Extensions of Darboux functions*, Real Anal. Exch. **15** (1989-1990), 511–547.

8. R. Pawlak, *On some characterization of Darboux retracts*, Topol. Proc. **17** (1992), 197–204.

9. F. Roush, R.G. Gibson, K.R. Kellum, *Darboux retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 491–494.