УДК 517.51

©2015 р. М.В. Працьовитий, І.В. Замрій

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ЦИФРУ 1 Q_3 – ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЛА

Робота присвячена вивченню класу неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у трисимвольному Q_3 – зображенні числа, що є узагальненням класичного трійкового зображення: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k(x) \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n(x) \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$. А саме: функціям виду

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \text{ де } \alpha_n, \gamma_n \in A_3,$$

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

і при цьому $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, але $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$.

Встановлено, що множина таких функцій є зліченною, а її представники мають не більше двох нескінченних рівнів, причому жодного континуального. Доведено, що сім'ї функцій, які мають один або два нескінченні рівні є зліченними.

Для окремих функцій, графіки яких мають нетривіальну групу «симетрій», знайдено «аналітичне задання», описано структурні, структурно-подібні, варіаційні та інтегральні властивості.

In the paper we consider the class of continuous on $[0,1]$ functions preserving digit 1 in three-symbol Q_3-representation of a number. This representation generalizes the classical ternary representation: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k(x) \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, where $\alpha_n(x) \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$. Namely we study functions of the form

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \text{ where } \alpha_n, \gamma_n \in A_3,$$

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

and $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ but $\gamma_n = 1$ if and only if $\alpha_n = 1$.

We prove that the set of such functions is countable, and any function does not have continuum level sets and has at most two countable level sets. Families of functions having one or two infinite level sets are countable.

For some functions such that their graphs have non-trivial group of «symmetries», «analytic definition» is found and structural, structural similar, variational and integral properties are described.

1. Вступ

В останній час у конструктивній теорії неперервних функцій зі складними локальними властивостями [4, 5, 14, 20, 21, 23, 24] широко використовуться різні системи зображення дійсних чисел як зі скінченним [6], так і з нескінченним алфавітом [1, 11]. Для їх теоретичного аналізу застосовуються як класичні (традиційні [17]) засоби так і засоби метричної та ймовірнісної теорії чисел [15, 18], ергодичної теорії [8, 12], а також теорії фракталів (фрактальної геометрії [11] та фрактального аналізу [5, 20, 29]). При цьому плідними є ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності [28] тощо.

У даній роботі ми звертаємо увагу на неперервні функції, що «зберігають цифру 1» у трисимвольному самоподібному кодуванні (зображенні) числа, значна частина яких має «сингулярні» властивості.

Інтерес до об'єктів, що розглядаються виник на основі загального інтересу до функцій зі «складною» локальною структурою та неоднорідною поведінкою, зокрема сингулярних функцій [1, 2, 3, 7, 9, 10](неперервних функцій, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю), функцій, що зберігають частоти цифр та середнє значення цифри [16] у тих чи інших зображеннях та ін.

Розглядаються визначені на $[0;1]$ неперервні функції, які тісно пов'язані з трійковим зображенням чисел

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \ldots \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

і означуються в термінах його узагальнення — Q_3 – зображення [20, 29]. Останнє визначається трійкою додатних чисел (q_0, q_1, q_2) таких, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, і розкладом числа

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$ і $\alpha_n = \alpha_n(x)$ – елементи трисимвольного алфавіту $A_3 = \{0, 1, 2\}$.

Зазначимо, що при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ Q_3 – зображення є класичним трійковим.

Зауважимо, що всі числа за виключенням зліченної множини мають єдине Q_3 – зображення. Два зображення мають лише числа виду

$$\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](2)},$$

де у круглих дужках позначається період у Q_3– зображенні числа, які називаються Q_3–раціональними. Решту чисел, тобто ті, що мають єдине Q_3 – зображення, називають Q_3 – ірраціональними.

Означення 1. *Якщо у Q_3 – зображенні (зокрема класичному трійковому) аргумента $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і значення функції $y = f(x) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ цифра 1 знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$, то казатимемо, що функція f зберігає цифру 1.*

Тривіальним прикладом функції, що задовольняє це означення є функція $f(x) = x$. Іншим прикладом такої функції є інверсор — неперервна функція I з неоднорідними диференціальними властивостями [13, 22, 25], яка означується рівністю

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Вона тісно пов'язана з функцією розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими цифрами Q_3 – зображення [13], а саме: $I(x) = 1 - F_\xi(x)$, де $F_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^{Q_3}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, Q_3-цифри $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ якої утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2 з ймовірностями q_2, q_1, q_0 відповідно [19, 26, 27].

Твердження [2]. *Інверсор I має наступні властивості:*

(1) він є коректно визначеною неперервною монотонною функцією, причому сингулярною, якщо $q_0 \neq q_2$;

(2) його графік $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ є самоафінною множиною, а саме:

$$\Gamma_I = \bigcup_{i=0}^{2} \phi_i(\Gamma_I) \equiv \phi(\Gamma_I),$$

де ϕ_i — афінне перетворення, таке що

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = -q_{[2-i]}y + \beta_{[3-i]}, \ \ i \in A_3; \end{cases}$$

(3) має місце рівність:

$$\int_0^1 I(x)\,dx = \frac{2q_0q_1 + q_0^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

Лема 1. *Множина всіх функцій, які зберігають цифру 1 є континуальною.* **Доведення.** Для однозначного коректного означення функції вимагається довизначити кожну з цифр γ_1, γ_2, ..., γ_n, ... Q_3-зображення значення функції. При цьому для кожної цифри існує принаймні 2 альтернативи. Тому взаємно однозначна відповідність між множиною таких функцій і [0;1] легко встановлюється через класичне двійкове зображення чисел.

2. Клас неперервних функцій, що зберігають цифру 1

Далі розглядаються неперервні на відрізку $[0;1]$ функції f, визначені рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},$$

де цифра γ_n Q_3 – зображення числа y задовольняє умови:

1) $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$;

2) якщо цифра γ_n відмінна від 1, то вона залежить від перших n цифр Q_3 – зображення аргумента x, тобто

$$\gamma_n = \gamma_n(x) = \phi_n(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)), n \in N.$$

Множину неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій, які задовольняють умови 1), 2) позначатимемо P.

Далі нам буде корисним поняття циліндра — множини чисел (відрізка) з фіксованими першими цифрами Q_3 – зображення числа. Нагадаємо його означення.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ – впорядкований набір чисел з алфавіту A_3. Циліндром рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається множина $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають наступне Q_3 – зображення

$$x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+m}\ldots},\ \alpha_{k+i} \in A_3.$$

Циліндри мають властивості:

1)$\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k0} \bigcup \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k1} \bigcup \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k2}$;

2)$[0,1] = \bigcup\limits_{i_1=0}^{2} \bigcup\limits_{i_2=0}^{2} \ldots \bigcup\limits_{i_n=0}^{2} \Delta^{Q_3}_{i_1i_2\ldots i_n}$;

3)$max\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_ki} = min\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k[i+1]}$;

4)$|\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{c_i} \to 0\ (k \to \infty)$;

5) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k} = x \equiv \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k\ldots}$ для довільної послідовності (c_k), $c_k \in A_3$.

Введемо позначення: $\square^{d_1\ldots d_m}_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m} \times \Delta^{Q_3}_{d_1\ldots d_m}$;

$$\Gamma^f_{c_1\ldots c_m} \equiv \{(x, y) : x \in \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}, y = f(x)\}.$$

Лема 2. *Якщо $f \in P$ і при цьому цифра γ_n залежить лише від значення $\alpha_n(x)$, тобто є функцією n - ої цифри числа x, то f є або тотожним перетворенням відрізка $[0;1]$ або інверсором I.*

Доведення. Оскільки $\Gamma^f_1 \in \square^1_1$, то, враховуючи неперервність f, можемо стверджувати, що

$$\begin{cases} \Gamma^f_0 \in \square^0_0, \\ \Gamma^f_2 \in \square^2_2, \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} \Gamma^f_0 \in \square^2_0, \\ \Gamma^f_2 \in \square^0_2, \end{cases}$$

тобто $\gamma_n = \alpha_n$ або $\gamma_n = 2 - \alpha_n$.

Справді, припустивши, що

$$\gamma_n(0) = \gamma_n(2) = c \in \{0, 2\},$$

матимемо розриви у точках $x_1 = \Delta^{Q_3}_{1(0)}$ та $x_2 = \Delta^{Q_3}_{2(0)}$, оскільки в першому випадку:

$$\Gamma^f_{02} \in \square^{00}_{02},\ \text{а}\ \square^{00}_{02} \cap \square^1_1 = \varnothing,$$

$$\Gamma^f_{20} \in \square^{00}_{20},\ \text{а}\ \square^{00}_{20} \cap \square^1_1 = \varnothing,$$

а в другому:

$$\Gamma^f_{02} \in \square^{22}_{02},\ \text{а}\ \square^{22}_{02} \cap \square^1_1 = \varnothing,$$

$$\Gamma^f_{20} \in \square^{22}_{20},\ \text{а}\ \square^{22}_{20} \cap \square^1_1 = \varnothing,$$

що суперечить неперервності функції f.

Отже, $\gamma_n(0) \neq \gamma_n(2)$. А тому можливі два випадки $\gamma_n(0) = 0$ і $\gamma_n(0) = 2$ для довільного $n \in N$, тобто f — тотожне перетворення $[0;1]$ або інверсор.

А тепер задамось питанням: чи існують функції f з класу P, для яких має місце рівність $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, тобто γ_n є функцією цифр α_{n-1} і α_n, відмінні від $f(x) = I$ і $f(x) = x$?

Лема 3. *Окрім тотожнього перетворення та інверсора у сім'ї P не існує функції f, цифри γ_n значення $y = f(x)$ якої однозначно визначаються парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ і $\alpha_n(x)$ аргумента.* **Доведення.** Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує неперервна функція f, відмінна від тотожнього перетворення та інверсора, яка задовольняє вказані в лемі 3 умови і при цьому $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha_1)$, $\gamma_n = \varphi(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ для всіх $n \in N$, де φ – проста функція двох змінних, визначена на множині пар цифр: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$.

Оскільки $\gamma_1(1)=1$, то перша цифра γ_1 числа $y=f(x)$ однозначно довизначається одним з чотирьох способів:

$\gamma_1(0)=i$ та $\gamma_1(2)=j$, де $i,j\in\{0,2\}$.

Оскільки $\gamma_2=1\Leftrightarrow\alpha_2=1$, то з неперервності функції f маємо

$$\gamma_2=\varphi(0,1)=\varphi(1,1)=\varphi(2,1)=1.$$

Розглянемо всеможливі доозначення цифри γ_2.

1) Нехай $i=j$, $\gamma_1(0)=\gamma_1(2)$. Враховуючи неперервність функції f, маємо

$$\begin{cases}\varphi(1,i)=\varphi(1,2-i)=i,\\ \varphi(i,2-i)=\varphi(2-i,i)=2-i,\\ \varphi(i,i)\in\{i,2-i\}\ni\varphi(2-i,2-i).\end{cases}\tag{1}$$

Цифра $\gamma_3=\varphi(\alpha_2(x),\alpha_3(x))$ однозначно визначається рівностями (1). Розглянемо «суміжні» двовимірні циліндри 3-го рангу: $\square^{i1i}_{012}$ і $\square^{i[2-i][2-i]}_{020}$, $\square^{i1i}_{210}$ і $\square^{i[2-i][2-i]}_{202}$. Для них

$$\square^{i1i}_{012}\cap\square^{i[2-i][2-i]}_{020}=\varnothing,$$

$$\square^{i1i}_{210}\cap\square^{i[2-i][2-i]}_{202}=\varnothing,$$

тобто для всіх $i\in\{0,2\}$ функції мають розриви в точках $x=\Delta^{Q_3}_{02(0)}$ і $\Delta^{Q_3}_{21(0)}$, що суперечить неперервності функції.

Отже, для випадку $i=j$ не існує функції, у якої цифра γ_n однозначно визначається парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ і $\alpha_n(x)$.

2) Якщо $i\neq j$, тоді враховуючи неперервність функції, цифра γ_2 однозначно визначається системами рівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(i,j)=\varphi(1,j)=j,\\ \varphi(j,i)=\varphi(1,i)=i,\\ \varphi(i,i)\in\{i,j\}\ni\varphi(j,j),\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(i,j)=\varphi(1,j)=i,\\ \varphi(j,i)=\varphi(1,i)=j,\\ \varphi(i,i)\in\{i,j\}\ni\varphi(j,j).\end{cases}\end{array}\right.\tag{2}$$

Тоді цифра $\gamma_3=\varphi(\alpha_2(x),\alpha_3(x))$ однозначно визначається рівностями (2). Розглянемо «суміжні» двовимірні циліндри 3-го рангу: $\square^{ijk}_{022}$ і $\square^{1ik}_{100}$, $\square^{1jk}_{122}$ і $\square^{jik}_{200}$, де $k\in\{i,j\}$. Для них

$$\begin{cases}\square^{ijk}_{022}\cap\square^{1ik}_{100}\neq\varnothing,\\ \square^{1jk}_{122}\cap\square^{jik}_{200}\neq\varnothing\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\gamma_n=\alpha_n,\\ \gamma_n=2-\alpha_n.\end{array}\right.$$

Отже, при $i\neq j$ неперервними функціями, які задовольняють вказані умови є лише тотожне перетворення та інверсор. Для всіх інших випадків не існує неперервних функцій у яких цифра γ_n однозначно визначається парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ та $\alpha_n(x)$.

Теорема 1. *Множина P є зліченною.*

Доведення. Існує чотири варіанти однозначного довизначення першої цифри Q_3-зображення числа $y=f(x)$, а саме:

$$\gamma_1=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 2 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases}\quad \gamma_1=\begin{cases}2 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 0 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases}$$

$$\gamma_1=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 0 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases}\quad \gamma_1=\begin{cases}2 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 2 \text{ при } \alpha_1=2.\end{cases}$$

Визначивши однозначно цифру γ_1 існує лише чотири можливості для однозначного довизначення цифри γ_2. А це значення для двох пар $(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,2)$, оскільки для решти пар однозначний вибір цифри γ_2 диктується неперервністю.

Здійснивши однозначний вибір цифри γ_2, для однозначного визначення цифри γ_3 існує чотири варіанти. Вони дозволяють вільно вибрати значення для наборів $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(2,2,2)$, а для решти вони диктуються неперервністю і т.д. Таким чином, існує зліченна множина можливостей однозначного довизначення всіх цифр числа $y=f(x)$.

Перейдемо до вивчення окремих представників класу P, відмінних від тотожного перетворення та інверсора.

Найпростішим з них є функція:

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\in[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}=\dfrac{q_0}{q_0+q_2}],\\ I(x), \quad \text{якщо } x\in(\Delta^{Q_3}_{(1)}=\dfrac{q_0}{q_0+q_2};1],\end{cases}$$

яка при $q_0\neq q_2$ є нетривіальною сумішшю абсолютно неперервної та сингулярної монотонних функцій.

3. Функції з одним нескінченним рівнем

Розгляд розпочнемо з яскравого представника цього підкласу функцій.

Покладемо $\gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 \neq 1$ і

$$f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = f(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} = \frac{q_0(1-q_2)}{1-q_0q_2}.$$

Уточнимо довизначення решти цифр $\gamma_n = \phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ числа $y = f(x)$.

1. Якщо зображення числа починається цифрою 1, то для всіх $n > m$, де $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1$, але $\alpha_{m+1} \neq 1$,

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha_n, \text{ якщо } \alpha_{m+1} = 0, \\ 2-\alpha_n, \text{ якщо } \alpha_{m+1} = 2, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Якщо зображення числа починається цифрою 0 і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, але $\alpha_{m+1} \neq 0$, то при $\alpha_{m+1} = 2$ та всіх $j \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{m+j} = \begin{cases} \alpha_{m+j}, \text{ коли } m\text{– непарне}, \\ 2-\alpha_{m+j}, \text{ коли } m\text{– парне}, \end{cases}$$

разом з цим

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{2k-1} = 0, \\ \gamma_2 = \gamma_4 = \ldots = \gamma_{2k-2} = 2, \end{cases}$$

де $2k-1 \leq m < 2k+1$.

Якщо ж $\alpha_{m+1} = 1 = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1} \neq 1$, то $\gamma_{m+r+j} =$

$$= \begin{cases} \alpha_{m+r+j} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k+1, \end{array}\right. \\ 2-\alpha_{m+r+j} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k+1, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k. \end{array}\right. \end{cases}$$

3. Якщо зображення числа починається цифрою 2 і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 2$, але $\alpha_{m+1} \neq 2$, то при $\alpha_{m+1} = 0$ та всіх $j \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{m+j} = \begin{cases} \alpha_{m+j}, \text{ коли } m\text{– парне}, \\ 2-\alpha_{m+j}, \text{ коли } m\text{– непарне}. \end{cases}$$

Якщо ж $\alpha_{m+1} = 1 = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1} \neq 1$, то $\gamma_{m+r+j} =$

$$= \begin{cases} \alpha_{m+r+j} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k+1, \end{array}\right. \\ 2-\alpha_{m+r+j} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k+1, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k. \end{array}\right. \end{cases}$$

Покладемо $i, j \in \{0, 2\}$. Безпосередньо з означення функції f випливають наступні співвідношення:

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n} j\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} +$$

$$+ q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{n+2}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{n+3}\right]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n} j\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$

$$+ q_0^{n+1} q_2^n \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+2}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+3}\right]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1} j\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}2(0)} + \quad (3)$$

$$+ q_0^{n+1} q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+3}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+4}\right]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k} j\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)} +$$

$$+ q_0^{n+1} q_1^k q_2^n \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_2}\right]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k} j\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2(0)} +$$

$$+ q_0^{n+1} q_1^k q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_2}\right]\ldots}.$$

Теорема 2. *Функція f є:*

1) *коректно визначеною;*

2) *неперервною в кожній точці з $[0;1]$;*

3) *лінійною на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+2}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+2}0}$, де $i \in \{0, 2\}$, $n \geq 0$, $n, k \in N$;*

4) *набуває свого глобального максимуму в точці $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$ та мінімуму у точках $x = \Delta^{Q_3}_{0(1)}$ й $x = \Delta^{Q_3}_{2(1)}$, причому $f(\Delta^{Q_3}_{(1)}) = \frac{q_0}{1-q_1}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{0(1)}) = f(\Delta^{Q_3}_{2(1)}) = \frac{q_0^2}{1-q_1}$, локальних максимумів у точках виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+2}(1)}$*

та $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+2}(1)}$, *локальних мінімумів у точках* $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}$ і $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}$, *де* $0 \le m \in N$. *Причому*

$$f(x^*) = (q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^m q_2^m)}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^{m+1}}{1-q_1},$$

$$f(x_*) = (q_0+q_1)\frac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^{m}}{1-q_1}.$$

Доведення. 1) Очевидно, що в Q_3 – ірраціональних точках функція є коректно визначеною. Перевіримо в Q_3 – раціональних точках, тобто точках виду

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}, \text{ де } \alpha_n \neq 0.$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 1$, то згідно з означенням

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\alpha_n(0)}) = \left\{\begin{matrix} \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}0(2)}, \\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}1(0)} \end{matrix}\right\} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\alpha_{n-1}(2)}).$$

2. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ і $(n-1)$ – парне, то

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}1(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}0(2)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}0(2)}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}2(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}0(2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}1(0)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1(2)}).$$

Якщо ж $(n-1)$ – непарне, то отримуємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}1(2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}2(0)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}0(2)}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}2(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}2(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}1(2)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1(2)}).$$

Випадок 2 вичерпано.

3. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 2$ і $(n-1)$ – парне, то

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}1(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}1(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}0(2)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}0(2)}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}2(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}0(2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{n-1}1(0)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}1(2)}).$$

Якщо $(n-1)$ – непарне, то

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}1(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}1(2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}2(0)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}0(2)}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}2(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}2(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{n-1}1(2)} = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}1(2)}).$$

Отже, функція f є коректно визначеною в Q_3 – раціональних точках.

2) Нехай $x_0 \in [0;1]$ є Q_3– ірраціональною точкою. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$ існує такий номер $k = k(x)$, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i = \overline{1, k-1}$ і $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$.

Оскільки умова $x \to x_0$ рівносильна умові $k \to \infty$, то

$$|f(x) - f(x_0)| =$$

$$= |\Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_{k-1}(x)\gamma_k(x)\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x_0)\ldots\gamma_{k-1}(x_0)\gamma_k(x_0)\ldots}| =$$

$$= \left| \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x)} - \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x_0)} \right| \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{k-1} q_{\gamma_j} \le (\max\{q_0, q_1, q_2\})^{k-1} \to 0\,(k \to \infty).$$

Отже, функція f є неперервною в Q_3- ірраціональних точках.

Нехай x_0 є Q_3- раціональною точкою, тоді для доведення неперервності функції f зліва треба використати Q_3- зображення точки, що містить період (2), тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}$, а справа — Q_3- зображення точки, що містить період (0), застосувавши аналогічні міркування, що і для Q_3- ірраціональних точок.

3) Із співвідношень (3), що випливають безпосередньо з означення, розлянемо ті у яких у зображенні аргумента x та значення функції $y = f(x)$ починаючи з деякого місця $n \in N$ всі цифри зберігаються, тобто $\alpha_i(x) = \gamma_i(y)$ для всіх $n < i \in N$.

Розглянемо перше з них, а саме

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}0\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} +$$

$$+q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}.$$

При $x \in \left[q_0; \dfrac{q_0}{1-q_1}\right]$, маємо

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} + q_1^n q_0 f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} + q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots},$$

тобто $f(x) = x$. Отже, при $x \in \left[q_0; \dfrac{q_0}{1-q_1}\right]$ функція f — лінійна.

Розглянемо наступну рівність

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots020}_{2n+1}2(0)} + q_0^{n+1} q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}.$$

Якщо $n = 0$, то випливає, що число $x \in [q_0(q_0+q_1); q_0]$ і має місце $f(x) = x$, тобто функція f є лінійною. Якщо $n > 0$, то функція f є лінійною, коли x належить циліндру $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2}$.

Оскільки $i \in \{0, 2\}$, то із співвідношень

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^n \Delta^{Q_3}_{\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^{n+1} q_2^n \Delta^{Q_3}_{\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}$$

випливає, що функція f — лінійна коли x належить відповідній циліндричній множині, а саме $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0}$.

4) Розглянемо числа $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}$ та $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha'_{n+1}\alpha'_{n+2}\ldots}$, де $\alpha_i \neq \alpha'_i$ для всіх $i > n$, причому $x > x_0$.

1. Нехай $\alpha_1 = 1$, тобто $x \in [q_0; q_0 + q_1]$.

Розглянемо різницю

$f(x) - f(x_0) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_n(x)\gamma_{n+1}(x)\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x_0)\ldots\gamma_n(x_0)\gamma'_{n+1}(x_0)\gamma'_{n+2}(x_0)\ldots}$. Тоді можливі випадки

$$\begin{cases} \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1, \alpha_{k+1} = 0, \\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1, \alpha_{k+1} = 2, k \in N. \end{cases}$$

Якщо $k < n$, то для всіх $k, j \in N$ маємо

$$\begin{cases} \gamma_{k+j} = \alpha_{k+j}, \gamma'_{k+j} = \alpha'_{k+j}, \\ \gamma_{k+j} = 2 - \alpha_{k+j}, \gamma'_{k+j} = 2 - \alpha'_{k+j}. \end{cases}$$

Оскільки $x > x_0$, тобто $\alpha_n(x) > \alpha'_n(x_0)$, то

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) > 0, & \text{якщо } x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0}, \\ f(x) - f(x_0) < 0, & \text{якщо } x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2}, \end{cases}$$

тобто $f(x)$ — зростає при $x \in \left[q_0; \frac{q_0}{1-q_1}\right]$, $f(x)$ — спадає при $x \in \left[\frac{q_0}{1-q_1}; q_0 + q_1\right]$, де $\Delta^{Q_3}_{(1)} = \dfrac{q_0}{1-q_1}$. Тому $f\left(\Delta^{Q_3}_{(1)}\right) = \dfrac{q_0}{1-q_1}$ — точка максимуму на відрізку $[q_0; q_0 + q_1]$.

Якщо $k > n$, то $\alpha_n = 1$ і $\alpha'_n = 0$. Тому $\gamma_n = 1, \ldots, \gamma_k = 1$, $\gamma_{k+j} = \alpha_{k+j}$ або $\gamma_{k+j} = 2 - \alpha_{k+j}$, а $\gamma'_n = 0$ і $\gamma'_{n+j} = \alpha'_{n+j}$. Очевидно, що функція $f(x)$ — зростає.

2. Якщо $\alpha_1 = 0$, то згідно з означенням можливо:

a) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0, \alpha_{k+1} = 2$;

b) $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = ... = \alpha_{k+r} = 1$, $\alpha_{k+r+1} = 0$;

c) $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = ... = \alpha_{k+r} = 1$, $\alpha_{k+r+1} = 2$, $k, r \in N$.

Якщо $k < n$, $k + r < n$ та $k, r, j \in N$, то

a) $\gamma_{k+j} = \alpha_{k+j}$ і $\gamma'_{k+j} = \alpha'_{k+j}$, якщо $k = 2m+1$ або $\gamma_{k+j} = 2-\alpha_{k+j}$, $\gamma'_{k+j} = 2-\alpha'_{k+j}$, якщо $k = 2m$;

b,c) $\gamma_{k+r+j} = 2 - \alpha_{k+r+j}$, $\gamma'_{k+r+j} = 2 - \alpha'_{k+r+j}$, якщо

$$\begin{cases} \alpha_{k+r+1} = 0 \text{ і } k = 2m+1, \\ \alpha_{k+r+1} = 2 \text{ і } k = 2m; \end{cases}$$

$\gamma_{k+r+j} = \alpha_{k+r+j}$, $\gamma'_{k+r+j} = \alpha'_{k+r+j}$, якщо $\begin{cases} \alpha_{k+r+1} = 2 \text{ і } k = 2m+1, \\ \alpha_{k+r+1} = 0 \text{ і } k = 2m. \end{cases}$

Тоді

$$f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}2}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}, \end{array} \right.$$

$$\text{і } f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}2}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}. \end{array} \right.$$

Очевидно, що функція $f(x)$ спадає при $x \in \left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}1(0)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}\right]$ або $\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}1(2)}\right]$, $f(x)$ — зростає при $x \in \left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}1(2)}\right]$ або $\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}1(0)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}\right]$. Тоді точки виду $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}$ є локальмими мінімумами, а точки виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}$ — локальними максимумами. Причому,

$$f(x_*) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots020}_{2m+1}(1)} =$$

$$= \beta_0 + \beta_2 q_0 + ... + \beta_0 q_0^m q_2^m + \beta_1 q_0^{m+1} q_2^m + ... =$$

$$= \beta_2 \frac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2} + \beta_1 \frac{q_0^{m+1}q_2^m}{1-q_1} =$$

$$= (q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^{m-1}q_2^{m-1})}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^m}{1-q_1};$$

$$f(x^*) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m+2}(1)} =$$

$$= \beta_2 \frac{q_0(1-q_0^m q_2^m)}{1-q_0q_2} + \beta_1 \frac{q_0^{m+1}q_2^{m+1}}{1-q_1} =$$

$$= (q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^m q_2^m)}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^{m+1}}{1-q_1}$$

й зокрема $f(\Delta^{Q_3}_{0(1)}) = \dfrac{q_0^2}{1-q_1}$ — глобальний мінімум.

Якщо $k + r > n$, то $0 \neq \alpha_{n+1} = 1$ і зважаючи на умову $x > x_0$ маємо $\alpha'_{n+1} = 0$. Тоді γ_i випливають із означення, а $\gamma'_{n+j} = \alpha'_{n+j}$ або $\gamma'_{n+j} = 2 - \alpha'_{n+j}$. Тоді, якщо n – непарне, то функція $f(x)$ спадає для всіх чисел x, якщо n – парне, то $f(x)$ — зростає для всіх x.

3. Нехай $\alpha_1 = 2$. То використовуючи означення й міркування аналогічні до випадку 2, маємо

$$f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}0}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}, \\ x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}, \end{array} \right.$$

$$\text{і } f(x)-f(x_0)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}0}, \\ x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}, \\ x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}. \end{array}\right.$$

Тобто функція $f(x)$ спадає, якщо число $x \in \left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}1(0)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}\right]$ або $\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}1(2)}\right]$, $f(x)$ — зростає при $x \in \left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}1(2)}\right]$ або $\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}1(0)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}(1)}\right]$. І точки виду $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}$ є локальмими мінімумами, а точки виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+2}(1)}$ — локальними максимумами, крім того функція в цих точках набуває значень, рівних значенням функції у відповідних до випадку 2 точках.

Якщо $k > n$, то доведення аналогічне до випадку 2.

Теорему доведено.

Функціональні співвідношення

Лема 4. *Для всіх* $x \in [0;1]$ *мають місце рівності:*

$$f(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f(x),$$

$$f(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_2 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f(x),$$

$$f(\beta_1 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_1 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_1 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^n q_1 f(x),$$

$$f(\beta_2 q_0^{2n+2} + q_0^{2n+2} q_2 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n +$$
$$+ \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + \beta_0 q_0^{n+1} q_2^{n+1} + q_0^{n+2} q_2^{n+1} f(x),$$

$$f(B + \beta_1 q_2^{2n} + q_2^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f(x),$$

$$f(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_0 q_2^{2n+1} + q_2^{2n+1} q_0 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f(x),$$

$$f(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_1 q_2^{2n+1} + q_2^{2n+1} q_1 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_1 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^n q_1 f(x),$$

$$f(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_2 q_2^{2n+1} + \beta_0 q_2^{2n+2} + q_2^{2n+2} q_0 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + \beta_0 q_0^{n+1} q_2^{n+1} +$$
$$+ q_0^{n+2} q_2^{n+1} f(x),$$

де відповідно $A = \dfrac{q_0(q_0+q_1)(1-(q_0q_2)^{n-1})}{1-q_0q_2}$ *і* $B = \dfrac{(q_0+q_1)(1-q_2^{2n-1})}{1-q_2}$.

Доведення. Із означення функції f, рівностей (3) та попередньої теореми 2 випливають наступні співвідношення:

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{02\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{01\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{002\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots}), \quad (4)$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{20\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{21\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220\alpha_1\alpha_2\ldots}) = A + q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{220\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

де $A = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} = \beta_0 + \beta_2 q_0 + \beta_0 q_0 q_2 + \beta_2 q_0^2 q_2 + \ldots + \beta_2 q_0^n q_2^{n-1} + \beta_0 q_0^n q_2^n + \ldots = \dfrac{q_0(q_0+q_1)(1-(q_0q_2)^{n-1})}{1-q_0q_2}$.

Нехай $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$.

Розглянемо перше співвідношення із системи (4). Очевидно, що

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots} = \beta_0 + \ldots + \beta_0 q_0^{2n-1} + \beta_1 q_0^{2n} +$$
$$+ q_0^{2n} q_1 \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots} = \beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x.$$

Тобто, $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = f(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x)$.

А $f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \beta_1 + q_1 f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \beta_1 + q_1 f(x)$. Тому перше співвідношення із системи (4) можна переписати у вигляді:

$$f(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f(x).$$

Розглянувши друге співвідношення із системи (4), отримаємо $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02\alpha_1\alpha_2\ldots}) =$ $= f(\beta_0 + \ldots + \beta_0 q_0^{2n} + \beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1}\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) =$ $= f(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} x)$. Тоді

$$f(\Delta^{Q_3}_{02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \beta_0 + \beta_2 q_0 + q_0 q_2 f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

тобто

$$f(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_2 x) =$$
$$= A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f(x).$$

Решта співвідношень доводяться аналогічним способом, враховуючи що

$$B = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(0)} = \frac{(q_0+q_1)(1-q_2^{2n-1})}{1-q_2}.$$

Симетрії графіка функції

Лема 5. *Для всіх чисел x з відрізка $[0;1]$ має місце рівність*

$$f(x) = f(I(x)),$$

де $I(x) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$.

Доведення. Згідно з означенням функції f, $\gamma_1 = 1$ при $\alpha_1 = 1$ і $\gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 \neq 1$.

Нехай

$$f(\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma'_1\gamma'_2\ldots\gamma'_n\ldots}.$$

1. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1$, але $\alpha_{m+1} \neq 1$, то $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \ldots = \gamma'_m = 1$ і

$$\gamma'_n = \begin{cases} \alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 0, \\ 2-\alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 2,\ m < n, \end{cases}$$

тобто для цього випадку
$\gamma_1 = \gamma'_1, \ldots, \gamma_m = \gamma'_m, \gamma_{m+1} = \gamma'_{m+1}, \ldots$.

2. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, але $\alpha_{m+1} \neq 0$, то при

1) $\alpha_{m+1} = 2$ та m – парному

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}2\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots},$$

$$f(I(x)) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}) =$$
$$= \Delta^{Q_3}_{02\ldots020[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots};$$

2) $\alpha_{m+1} = 2$ та m – непарному

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}2\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots022\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots},$$

$$f(I(x)) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}) =$$
$$= \Delta^{Q_3}_{02\ldots022\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots};$$

3) $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_{m+r}$ та m – парному, то $\gamma'_1 = \gamma'_3 = \ldots = \gamma'_{m-1} = 0$, $\gamma'_2 = \ldots = \gamma'_m = 2$, $\gamma'_{m+1} = \ldots = \gamma'_{m+r} = 1$ і

$$\gamma'_n = \begin{cases} 2-\alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 0, \\ \alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 2, n > m+r, \end{cases}$$

або $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_{m+r}$ та m – непарному, то

$$\gamma'_n = \begin{cases} \alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 0, \\ 2-\alpha_n, \text{ якщо } 2-\alpha_{m+1} = 2, n > m+r. \end{cases}$$

Отже, відповідні цифри функцій $f(x)$ та $f(I(x))$ рівні.

Доведення у випадку 3 аналогічне доведенню, проведеному у випадку 2.

Таким чином, $f(x) = f(I(x))$.

Наслідок 1. *Якщо $q_0 = q_2$, то графік Γ^f функції f симетричний відносно прямої $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$.*

Теорема 3. *Функція f має*

1) *наступні симетрії графіка:*

$$\Gamma^{f,(1)} = \{(x;y) : x \in [0;\Delta^{Q_3}_{(1)}], y = f(x)\} \triangleq$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(1,00)} = \{(x;f(x)) : x \in [0;\Delta^{Q_3}_{00(1)}]\} \triangleq \ldots$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(1,0\ldots0)} = \{(x;f(x)) : x \in [0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\},$$

$$\Gamma^{f,(2)} = \{(x;y) : x \in (\Delta^{Q_3}_{(1)};1], y = f(x)\} \triangleq$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(2,22)} = \{(x;f(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{22(1)};1]\} \triangleq \ldots$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(2,2\ldots2)} = \{(x;f(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(1)};1]\};$$

2) *обмежену варіацію* V_f*, точніше:*

$$V_f = \frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

Доведення. 1) Із системи рівностей (4), а саме:

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$

$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots})$$

випливає, що існує таке афінне перетворення ψ, що є композицією стиску та паралельного перенесення, таке що

$$\psi\left(\Box^1_1\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1}.$$

Тоді $\Gamma^f_1 \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1}$.

З наступної рівності системи (4), а саме:

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$

$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{02\alpha_1\alpha_2\ldots})$$

випливає, що існує афінне перетворення ψ: $\psi\left(\Box^{02}_{02}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 02}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02}$ і $\Gamma^f_{02} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02}$.

З $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$ $+ q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{01\alpha_1\alpha_2\ldots})$ маємо $\psi\left(\Box^{01}_{01}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 01}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01}$ і відповідно — $\Gamma^f_{01} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01}$.

А з $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$ $+ q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{002\alpha_1\alpha_2\ldots})$ отримуємо: $\psi\left(\Box^{020}_{002}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 020}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002}$ і $\Gamma^f_{002} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002}$.

Очевидно, що множину точок

$$\Gamma^{f,(1)} = \{(x; f(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{(1)}]\}$$

можна подати у вигляді

$$\Gamma^{f,(1)} = \Gamma^f_{00} \bigcup \Gamma^f_{01} \bigcup \Gamma^f_{02} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma^f_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0},$$

а множину

$$\Gamma^{f,(1,0\ldots0)} = \{(x; f(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\}$$

відповідно

$$\Gamma^{f,(1,0\ldots0)} = \bigcup_{i=0}^{2} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}0i} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma^f_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}.$$

Тоді з афінної еквівалентності відповідних двовимірних циліндрів (і частин графіка функції f) випливає

$$\Gamma^{f,(1)} = \{(x; f(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{(1)}]\} \triangleq$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(1,00)} = \{(x; f(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{00(1)}]\} \triangleq \ldots$$
$$\triangleq \Gamma^{f,(1,0\ldots0)} = \{(x; f(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\}.$$

Із наступних чотирьох рівностей

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$
$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$
$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$
$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{20\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$
$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$
$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{21\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$
$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} +$$
$$+q_0^n q_2^n f(\Delta^{Q_3}_{220\alpha_1\alpha_2\ldots})$$

випливає

$$\psi\left(\Box^1_1\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1} \text{ і } \Gamma^f_1 \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1},$$

$$\psi\left(\Box^{02}_{20}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 02}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20} \text{ і } \Gamma^f_{20} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20},$$

$$\psi\left(\Box^{01}_{21}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 01}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21} \text{ і } \Gamma^f_{21} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21},$$

$$\psi\left(\Box^{020}_{220}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 020}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220} \text{ і } \Gamma^f_{220} \xrightarrow{\psi} \Gamma^f_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220}.$$

З афінної еквівалентності відповідних двовимірних циліндрів маємо

$$\Gamma^{f,(2)} = \{(x;y) : x \in (\Delta^{Q_3}_{(1)};1], y = f(x)\} \triangleq$$

$$\triangleq \Gamma^{f,(2,22)} = \{(x;f(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{22(1)};1]\} \triangleq \dots$$

$$\triangleq \Gamma^{f,(2,2\dots2)} = \{(x;f(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\dots2}_{2n}(1)};1]\}.$$

2) Зважаючи на лему 5 і пункт 1) теореми 3, очевидно, що варіація на множинах $\Gamma^{f,(1)}$ і $\Gamma^{f,(2)}$ набуватиме однакових значень, тобто $V_f = V_1 + V_2 = 2V_1$, де V_1 — це варіація на відрізку $\left[0;\dfrac{q_0}{1-q_1}\right]$, а V_2 — варіація на відрізку $\left[\dfrac{q_0}{1-q_1};1\right]$.

Обчислимо V_1:

$$V_1 = K_{1max} - K_{1min} + K_{2max} - K_{1min} + q_0q_2V,$$

де K_{1max}, K_{1min} — це глобальні максимум та мінімум, а K_{2max} – локальний максимум на циліндрі $\Delta^{Q_3}_0$, тобто

$$K_{2max} = \Delta^{Q_3}_{02(1)} = q_0\left(1 - q_2 + \frac{q_0q_2}{1-q_1}\right).$$

Тоді $(1-q_0q_2)V_1 = \dfrac{q_0}{1-q_1}+$

$$+q_0\left(1-q_2+\frac{q_0q_2}{1-q_1}\right) - 2\frac{q_0^2}{1-q_1},$$

$$V_1 = q_0\frac{1+1-q_2-q_1+q_1q_2+q_0q_2-2q_0}{(1-q_0q_2)(1-q_1)},$$

$$V_1 = \frac{q_0}{1-q_0q_2}\cdot\frac{1-q_0+q_2(1-q_2)}{q_0+q_2}.$$

Таким чином

$$V_f = \frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

Інтегральні властивості функції

Теорема 4. *Для функції f має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x)dx = q_0^2I_0 + q_1^2I_1 + q_2q_0I_2 + q_0q_1,$$

де

$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right)+$$

$$+\frac{q_0^2q_1q_2 + q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1)}{1-q_0^3q_2};$$

$$I_1 = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_2 = \frac{q_1}{1-q_0q_2^3}\left(q_0(1-q_1) + q_1(I_{01}+q_2^2I_1)\right)+$$

$$+\frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_{01} = \frac{q_0 + q_1(1-q_1) + \frac{q_2}{2} + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}}{1-q_1^2}.$$

Доведення. Беручи до уваги твердження 1) з теореми 3, очевидно, що

$$\int_0^1 f(x)dx = q_0^2\int_0^{q_0} f(x)dx + q_1^2\int_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx +$$

$$+q_2q_0\int_{q_0+q_1}^1 f(x)dx + q_0q_1.$$

Для обчислення інтеграла скористаємось властивістю афінної еквівалентності частин графіка Γ^f функції f і розглянемо наступні множини точок:

$$\Gamma^f_1 = \{(x;y) : x \in [q_0;q_0+q_1], y = f(x)\},$$

$$\Gamma^f_0 = \{(x;y) : x \in [0;q_0], y = f(x)\},$$

$$\Gamma^f_{01} = \{(x;y) : x \in [q_0^2;q_0(q_0+q_1)], y = f(x)\},$$

$$\Gamma^f_2 = \{(x;y) : x \in [q_0+q_1;1], y = f(x)\}.$$

Обчислимо інтеграли на вказаних множинах точок, а саме:

$$\int_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx = q_1q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 + q_0q_2\frac{2q_0q_1+q_0^2}{1-2q_0q_1-q_1^2}+$$

$$+q_1^2\int_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx,$$

Позначимо $\int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx \equiv I_1$, тоді

$$I_1 = \frac{q_0}{1-q_1^2}\left(q_1 + \frac{1}{2}q_0 + \frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right),$$

$$I_1 = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right).$$

Нехай $I_{01} \equiv \int\limits_{q_0^2}^{q_0(q_0+q_1)} f(x)dx$, тоді

$$I_{01} = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) +$$
$$+q_0q_2\frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + \frac{1}{2}q_2^2 + q_1^2I_{01},$$
$$(1-q_1^2)I_{01} = q_0 + q_1(1-q_1) + 0,5q_2 +$$
$$+q_0^2q_2\frac{2q_1+q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$

$$I_{01} = \frac{q_0 + q_1(1-q_1) + \frac{q_2}{2} + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}}{1-q_1^2}.$$

Нехай $I_0 \equiv \int\limits_0^{q_0} f(x)dx$, тоді

$$I_0 = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) + 0,5q_2^2 +$$
$$+q_1^2I_{01} + q_0^2q_1q_2 + q_0^2q_2^2\frac{(2q_1+q_0)q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2} +$$
$$+q_0q_1^2q_2I_1 + q_0^3q_2I_0,$$
$$(1-q_0^3q_2)I_0 = q_0 + q_1(1-q_1) + \frac{1}{2}(1-q_0-q_1)^2 +$$
$$+q_1^2 + q_0^2q_1q_2 + q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1) + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$
$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right) +$$
$$+\frac{q_0^2q_1q_2 + q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1)}{1-q_0^3q_2}.$$

Позначимо $I_2 \equiv \int\limits_{q_0+q_1}^{1} f(x)dx$.

$$I_2 = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) + q_1^2I_{21} +$$
$$+\frac{q_2q_0^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + \frac{q_0^2q_2^2}{2} + q_0q_1q_2^2 + q_2^2q_1^2I_1 + q_0q_2^3I_2,$$
$$(1-q_0q_2^3)I_2 = q_0q_1(1-q_1) + q_1^2(I_{21}+q_2^2I_1) +$$
$$+q_0q_2^2(0,5q_0+q_1) + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$

$$I_2 = \frac{1}{1-q_0q_2^3}\big(q_0q_1(1-q_1) + q_1^2(I_{21}+q_2^2I_1) +$$
$$+q_0q_2(2q_1+q_0)\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right)\Big),$$

де очевидно, що $I_{01} \equiv I_{21}$, тоді

$$I_2 = \frac{q_1}{1-q_0q_2^3}\big(q_0(1-q_1) + q_1(I_{01}+q_2^2I_1)\big) +$$
$$+\frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right).$$

Тоді

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = q_0^2I_0 + q_1^2I_1 + q_2q_0I_2 + q_0q_1.$$

Що і треба було довести.

Наслідок 2. *При $q_0 = q_2$ для функції f має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{q_0(1-q_0)(1+q_0^4)}{1-q_0^4} +$$
$$+\frac{(1-q_0)^2}{1+q_0^2}\left(\frac{1}{1-q_0^2} + \frac{q_1^2(1+q_0)}{2(1+q_1)}\right).$$

Наслідок 3. *Якщо $q_0 = q_2 = \frac{1}{3}$, то для функції f має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{3}{10}.$$

Властивості множин рівнів функції

Означення 2. *Множиною рівня y_0 функції f називається множина*

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Лема 6. *Множина $f^{-1}(y_0)$ є:*
1) *зліченною, якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$;*
2) *скінченною, якщо $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{(02)}$.*

Доведення. Дійсно, використовуючи означення функції f очевидно, що

$$x_1 = \Delta^{Q_3}_{(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0,$$

$$x_2 = \Delta^{Q_3}_{0(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0,$$

$$x_3 = \Delta^{Q_3}_{00(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0, \ldots,$$

$$x_{k+1} = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0$$

і т.д..

Оскільки k довільне натуральне число, то очевидно, що множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ функції f є зліченною.

Для значень $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{(02)}$ твердження 2) є очевидним, оскільки $\Delta^{Q_3}_{(02)} = f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = f(\Delta^{Q_3}_{(2)})$, а для значення аргумента $\Delta^{Q_3}_{(0)} \neq x \neq \Delta^{Q_3}_{(2)}$ «стабілізація» визначення цифр відбувається за рахунок неперервності функції f.

Наслідок 4. *Множина $f^{-1}(y_0)$ є:*

a) порожньою, якщо

$$y_0 \in [0; \Delta^{Q_3}_{0(1)}) \cup (\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1];$$

b) одноточковою, якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(1)}$;

c) скінченною і складаєтьcя більше ніж з однієї точки, якщо

$$y_0 \in [\Delta^{Q_3}_{0(1)}; \Delta^{Q_3}_{(02)}) \cup (\Delta^{Q_3}_{(02)}; \Delta^{Q_3}_{(1)}).$$

Доведення. Випадки *a)*, *b)* і *c)* випливають з леми 6 та теореми 2 пункту 4).

Очевидно, що функція $f \in P_1 \subset P$, де P_1 — клас функцій, які задовольняють умову

$$3) \gamma_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \gamma_n(2-c_1, 2-c_2, \ldots, 2-c_n)$$

для довільного набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Клас функцій P_1 є зліченним, причому його підмножина функцій, які мають лише один нескінченний рівень теж зліченна.* **Доведення.** Вкажемо нескінченну підмножину функцій з класу P, для яких має місце рівність 3). Тобто це функції для яких має місце рівність $f(x) = f(I(x))$. Очевидно, що $\gamma_1 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$ і $\gamma_1(0) = \gamma_1(2) = i \in \{0, 2\}$. Тоді друга цифра може бути довизначена чотирма різними способами, а саме:

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1, \\ \phi_2(0,0) = \phi_2(2,2) = \left[\begin{array}{l} i, \\ 2-i, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \phi_2(0,2) = \phi_2(2,0) = i, \\ \phi_2(1,0) = \phi_2(1,2) = 2-i, \end{cases} \\ \begin{cases} \phi_2(0,2) = \phi_2(2,0) = 2-i, \\ \phi_2(1,0) = \phi_2(1,2) = i. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Як і при доведенні теореми 1 очевидно, що вибір цифри γ_3 диктується неперервністю функції f і є варіанти для вибору лише наборів $\phi_3(0,0,0)$ і $\phi_3(2,2,2)$, які в даному випадку рівні, тобто $\phi_3(0,0,0) = \phi_3(2,2,2) = i \in \{0, 2\}$. Тому цифру γ_3 можна однозначно довизначити 8 різними способами і т.д..

Тоді цифру γ_n можна довизначити 2^n способами, де $n \in N$, тому множина функцій з класу P_1 є зліченною.

Доведемо, що функції $f \in P_1$ мають не більше одного нескінченного рівня.

Зважаючи на вище сказане, розглянемо $\phi_n(0, \ldots, 0) = \phi_n(2, \ldots, 2) = i$, де $i \in \{0, 2\}$. Тоді можливі випадки:

а) якщо має місце $\phi_2(0,0) = \phi_3(0,0,0) = \ldots = \phi_n(0, \ldots, 0) = \ldots = i$, то f є «лінійно-інверсною» (а саме: при $i = 0$ на відрізку $[0, \Delta^{Q_3}_{(1)}]$ f є лінійною, а на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)}, 1]$ f є «інверсною»; при $i = 2$ навпаки), тобто множина $f^{-1}(y_0)$ складається не більш ніж з двох точок для всіх y_0;

б) якщо виконуються рівності $\phi_2(0,0) = \phi_3(0,0,0) = \ldots = \phi_{k-1}(0, \ldots, 0) = i$ і $\phi_k(0, \ldots, 0) = \ldots = \phi_{k+j}(0, \ldots, 0) = \ldots = = 2 - i$, то функція f є на двох відрізках лінійною і на двох — «інверсною». В цьому випадку множина $f^{-1}(y_0)$ складається не більш ніж з чотирьох точок для всіх y_0;

в) якщо на скінченній кількості місць у довільному порядку $\gamma_k(0, \ldots, 0) = i$, а всі решта цифр $\gamma_j(0, \ldots, 0) = 2 - i$, де $k \neq j$, $k, j \in N$, то очевидно, що довільний рівень функції f є скінченним;

г) нехай цифри γ_1, γ_2, ... , γ_{k-1} для наборів $(0, \ldots, 0)$ і $(2, \ldots, 2)$ визначені, а решта визначаються рівностями:

$$\phi_k(0, ..., 0) = \ldots = \phi_{k+2j}(0, ..., 0) = \ldots = i,$$

$\phi_{k+1}(0,\ldots,0) = \ldots = \phi_{k+2j+1}(0,\ldots,0) =$
$= \ldots = 2-i,\ j \in N$.

Тоді при $k=1$ та $i=0$ отримаємо вище досліджену функцію f, яка має один нескінченний рівень $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$. Якщо $k=1$ та $i=2$, то отримаємо функцію графік якої симетричний до графіка вище вивченої функції відносно прямої $y = \Delta^{Q_3}_{(1)}$, тобто один нескінченний рівень буде знаходитись у точці $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(20)}$.

Очевидно, що для $k>1$ функції також матимуть лише по одному нескінченному рівню у точках виду: $y_0 = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(02)}$ або $y_0 = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(20)}$, де $\gamma_t \in \{0,2\}$, $t = \overline{1,k-1}$.

А оскільки $k \in N$ та вибір перших наборів $\gamma_t(0,\ldots,0) = \gamma_t(2,\ldots,2) \in \{0,2\}$, де $t = \overline{1,k-1}$, довільний, то множина всіх функцій, які мають один нескінченний рівень є зліченною.

Зауважимо, що існують функції f з класу P, які не належать P_1 і мають один нескінченний рівень. Це функції, у яких для наборів $(0,0),\ldots,(0,\ldots,0)$ виконується випадок г), а для наборів $(2,2),\ldots,(2,\ldots,2)$ виконується один з випадків а)-в) або навпаки.

4. Функції з двома нескінченними рівнями

Розглянемо ще один цікавий підклас P_2 класу P функцій g з двома нескінченними рівнями.

Доозначимо цифри γ_n функції g наступним чином. Нехай $\{0,2\} \ni i$ — фіксований параметр. Покладемо:

1) $\gamma_1 = \alpha_1$, причому якщо $\alpha_1 = 1$, то $\gamma_{1+r} = \alpha_{1+r}$, $r \in N$;

2) якщо $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = i$ і $\alpha_{m+1} = 2-i$, то

$$\gamma_{m+1+r} = \begin{cases} \alpha_{m+1+r}, \text{ якщо } m - \text{непарне}, \\ 2-\alpha_{m+1+r}, \text{ якщо } m - \text{парне}; \end{cases}$$

3) якщо $\alpha_1 = ... = \alpha_m = i$, $\alpha_{m+1} = ... = \alpha_{m+k} = 1$ і $\alpha_{m+k+1} = 2-i$, то

$$\gamma_{m+k+1+r} = \begin{cases} \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t+1, \\ 2-\alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t; \end{cases}$$

якщо ж $\alpha_{m+k+1} = i$, то

$$\gamma_{m+k+1+r} = \begin{cases} 2-\alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t+1, \\ \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t, \end{cases}$$

де $m,k,r,t \in N$.

Лема 7. *Для так означеної функції g має місце рівність*

$$g(I(x)) = I(g(x)).$$

Доведення. Із означення функції g для $i,j \in \{0,2\}$ випливають наступні співвідношення:

$$g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{2m}i[2-\alpha_{2m+2}]\ldots[2-\alpha_{2m+2+n}]\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-i]}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots},$$

Перевіримо, чи виконується рівність $g(I(x)) = I(g(x))$ для всіх вище вказаних п'яти співвідношень:

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},$$

$$I(g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots})) =$$

$$= g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]...[2-i]}_{2m+1} i[2-\alpha_{2m+3}]...[2-\alpha_{2m+3+n}]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1} i[2-\alpha_{2m+3}]...[2-\alpha_{2m+3+n}]...},$$

$$I(g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}...\alpha_{2m+3+n}...})) =$$

$$= I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}...\alpha_{2m+3+n}...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1} i[2-\alpha_{2m+3}]...[2-\alpha_{2m+3+n}]...};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+2+n}...})) =$$

$$= g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]...[2-i]}_{2m} i[2-\alpha_{2m+2}]...[2-\alpha_{2m+2+n}]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i...[2-i]i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+2+n}...},$$

$$I(g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+2+n}...})) =$$

$$= I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]...i[2-i]}_{2m} i[2-\alpha_{2m+2}]...[2-\alpha_{2m+2+n}]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i...[2-i]i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+2+n}...};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i...i}_{2m+1}\underbrace{1...1}_{k} j\alpha_{r_1}...\alpha_{r_n}...})) =$$

$$= g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]...[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1...1}_{k}[2-j][2-\alpha_{r_1}]...[2-\alpha_{r_n}]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i...[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1..1}_{k} i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_1}]\right]...\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}]\right]...},$$

$$I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]..i}_{2m+1}\underbrace{1..1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]...\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i...[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1..1}_{k} i\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]...\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]...},$$

причому $j + (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2 - \alpha_{r_n}] - 2 + j + (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n} = 2(j + (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} - 1) = 0$, бо $j \in \{0, 2\}$, тобто

$$j + (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2 - \alpha_{r_n}] = 2 - j - (-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i...i}_{2m}\underbrace{1...1}_{k} j\alpha_{r_1}...\alpha_{r_n}...})) =$$

$$= g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]...[2-i]}_{2m}\underbrace{1...1}_{k}[2-j][2-\alpha_{r_1}]...[2-\alpha_{r_n}]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i..i}_{2m}\underbrace{1..1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_1}]\right]...\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}]\right]...},$$

$$I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]..[2-i]}_{2m}\underbrace{1..1}_{k} i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]...\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]...}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i..i}_{2m}\underbrace{1..1}_{k}[2-i]\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]...\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]...}.$$

Отже, для всіх чисел з відрізка $[0; 1]$ має місце рівність $g(I(x)) = I(g(x))$.

Наслідок 5. *Якщо* $q_0 = q_2$, *то графік функції* g *симетричний відносно точки* $(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$.

Наслідок 6. *Якщо* $q_0 = q_2 = \frac{1}{3}$, *то*

$$\int\limits_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Лема 8. *Множини рівнів* $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ *та* $y'_0 = \Delta^{Q_3}_{(20)}$ *функції* g *є нескінченними, а для решти значень* y *скінченними.* **Доведення.** Нехай $i \in \{0, 2\}$. Очевидно, що

$$x_1 = \Delta^{Q_3}_{(i[2-i])} \to \Delta^{Q_3}_{(i[2-i])} = y_0,$$

$$x_2 = \Delta^{Q_3}_{ii(i[2-i])} \to \Delta^{Q_3}_{(i[2-i])} = y_0, \ldots$$

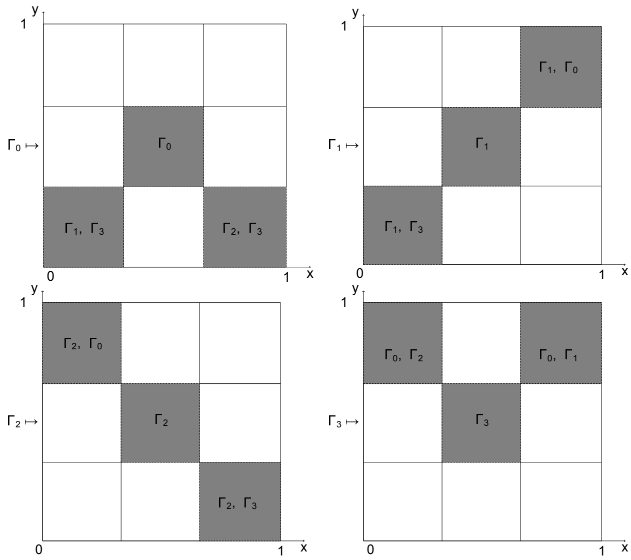
$$x_n = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2^{n-1}}(i[2-i])} \to \Delta^{Q_3}_{(i[2-i])} = y_0$$

і т.д..

Оскільки n довільне натуральне число, то множини рівнів $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $y'_0 = \Delta^{Q_3}_{(20)}$ функції g є нескінченними.

Виходячи з означення функції g множина $f^{-1}(y_0)$ при умові, якщо $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{(20)}$, є скінченною.

Теорема 6. *В класі P існує зліченна підмножина P_2 функцій, які мають два нескінченні рівні. Не існує функцій з класу P, які мають більше ніж два нескінченні рівні.* **Доведення.** Оскільки $\gamma_1 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$, то як зазначалось при доведенні теореми 1, γ_1 може бути довизначена 4 різними способами, а саме: можливі чотири випадки локальної структури графіка (малюнок 1):



Поведінка функції на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{02}$, $\Delta^{Q_3}_{20}$, $\Delta^{Q_3}_{10}$ і $\Delta^{Q_3}_{12}$ детермінована неперерністю функції та умовою 1). Тому «степінь свободи» для визначення γ_2 існує на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{00}$ і $\Delta^{Q_3}_{22}$. Аналогічно для цифри γ_3 — «степінь свободи» існує на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{000}$ і $\Delta^{Q_3}_{222}$ і т.д.

Використовуючи міркування, як і при доведенні теореми 5, можемо стверджувати, що у випадку, коли графік функції f містить фрагменти Γ_1, Γ_2 або скінченну кількість фрагментів Γ_0, Γ_3 («на n – кроці наближення до графіка функції»), то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною для всіх y_0. І лише у випадку, коли починаючи з деякого номера для наборів $(\underbrace{0,\ldots,0}_{k})$, $(\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1})$, ... і $(\underbrace{2,\ldots,2}_{t})$, $(\underbrace{2,\ldots,2}_{t+1})$, ... ($k \neq t$ або $k = t$ і існує номер $l < k$, $l < t$ такий що $\gamma_l(0,\ldots,0) \neq \gamma_l(2,\ldots,2)$) нескінченну кількість разів чергуються фрагменти Γ_0 і Γ_3, то графік функції має два нескінченні рівні.

Друга частина твердження є наслідком того, що нескінченний рівень можна отримати лише для значень $y_0 \equiv f(0)$ і $y_1 \equiv f(1)$, оскільки для інших значень x визначення цифр значення функції f детерміноване її неперервністю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M.* On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 15. — С. 35–55.

2. *Billingsley P.* The singular function on bold play // Am. Sci. — 1983. — 71. — P. 392-397.

3. *Kinney J. R.* Note on singular function of Minkowski. — Proc. Amer. Math. Soc., Volume 11, 1960, — pp. 788-794.

4. *Peter R. Massopust.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

5. *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. — №64. — P.3155 - 3169.

6. *Pratsovytyi M., Makarchuk O., Skrypnyk S.* Rational and algebraic Q_2-representation of real numbers // Šiauliai Math. Semin. — 2015. — Vol. 10 (18). — P. 199–211.

7. *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.

8. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995. — 320 p.

9. *Takacs L.* An increasing continuous singular function // The Amer. Math. Monthly. — 1978. — no. 85. — P. 35-37.

10. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. — 1981. — Vol. 88. — P. 47-49.

11. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування. — К. Наукова думка, 2013. — 288 с.

12. *Гельфонд А. О.* Об одном общем свойстве систем счисления, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, том 23, выпуск 6, 809-814.

13. *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3 – зображення дробової ча-

стини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. Том 18, № 1. — Інститут математики НАН України. — 2015 р. — С. 55-70.

14. *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2011. — №12. — P. 59-65.

15. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. — М.: Изд. иностр. лит., 1963. — 156 с.

16. *Климчук С. О., Макарчук О. П., Працьовитий М. В.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // Укр. мат. журн. — 2014. — №3. — С. 302-310.

17. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища школа, 1974. — 456 с.

18. *Постников А. Г.* Вероятностная теория чисел. — М.: Знание, 1974. — 62 с.

19. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. — 1996. — №5. — С. 32-37.

20. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

21. *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.

22. *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 156-167.

23. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. Мат. Жур. — 2013. — Т. 65, №3. — С. 405-417.

24. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины, 2011. - Том 23. - С. 180-191.

25. *Працьовитий М. В., Скрипник С. В.* Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 15. — С. 134-143.

26. *Працевитый Н. В.* Один класс случайных величин с сингулярным распределением // Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 78-90.

27. *Працевитый Н. В.* Распределения случайных величин с независимыми Q-символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 92-101.

28. *Синай Я. Г.* Автомодельные распределения вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. — 1976. — Т. 21, №1. — С. 63-80.

29. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.