УДК 517.53

©2015 р. О.Б. Скасків[1], О.Ю. Тарновецька[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
[2]Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут"

ПРО КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ, ПОДІБНИХ НА РЯДИ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Для додатного, збіжного для всіх $x \geq 0$ ряду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $a_n \geq 0$, $(n \geq 0)$, де $\tau(x)$ — додатна зростаюча функція, а (λ_n), (β_n) — невід'ємні послідовності, отримано умови достатні і необхідні для того, щоб $\int_0^{+\infty} e^{-x\rho} \ln \mu(x, F) dx < +\infty$, $\rho > 0$, де $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

We establish sufficient and necessary condition for $\int_0^{+\infty} e^{-x\rho} \ln \mu(x, F) dx < +\infty$, $\rho > 0$, for a positive functional series of the form $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$, $a_n \geq 0$, $(n \geq 0)$, convergent for $x \geq 0$, where $\tau(x)$ is positive increase, (λ_n), (β_n) are an positive sequences, $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$.

1. Вступ. Для невід'ємних послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ і невід'ємної неспадної на $[0; +\infty)$ функції $\tau(x)$ через $S(\lambda, \beta, \tau)$ позначимо клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \ a_n \geq 0 \ (n \geq 0).$$

Для $\rho \in (0, +\infty)$ через $S_\rho(\lambda, \beta, \tau)$ позначимо клас функцій $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, для яких

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\rho} \ln F(x) dx < +\infty,$$

а через $S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, \tau)$ позначимо клас функцій $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, для яких

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\rho} \ln \mu(x, F) dx < +\infty,$$

де $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$. Зрозуміло, що $S_\rho(\lambda, \beta, \tau) \subset S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, \tau)$. Нехай також $S_\rho(\lambda, \beta) := \cup_\tau S_\rho(\lambda, \beta, \tau)$, $S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta) := \cup_\tau S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, \tau)$, $S_\rho(\lambda) := \cup_\beta S_\rho(\lambda, \beta)$, $S_{\rho,\mu}(\lambda) := \cup_\beta S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta)$.

Для зростаючої до нескінченності послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ і функції $\tau(x) \equiv 0$ через $D(\lambda) := S(\lambda, \beta, 0)$, $D_\rho(\lambda) := S_\rho(\lambda, \beta, 0)$, $D_{\rho,\mu}(\lambda) := S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, 0)$ позначимо відповідні класи цілих рядів Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами. Зазначимо, що клас збіжності $D_\rho(\lambda)$ запровадив P.K. Kamthan [1].

З доведених в статті [2] тверджень про аналоги нерівності Валірона негайно випливає таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\theta_1 := \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty$ *або* $\theta_2 := \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n + \beta_n} < +\infty$ *і функція* $\tau(x)$ *така, що* $\tau(x) \leq x$ $(x > x_0)$, *то* $S_\rho(\lambda, \beta, \tau) = S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, \tau)$.

Справді, у статті [2] доведено, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists C(\varepsilon) < +\infty)(\forall x \geq x_0)$:

$$F(x) \leq C(\varepsilon)\mu(x + \theta + \varepsilon, F),$$

де θ дорівнює θ_1 чи θ_2 в залежності від того, яка з груп умов виконується. Далі зрозуміло.

Той факт, що $D_\rho(\lambda) = D_{\rho,\mu}(\lambda)$ у випадку, коли $\theta_1 < +\infty$, відзначено в [3]. У статті [4] доведено, що для довільної послідовності λ такої, що $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і $\theta_1 = +\infty$: $D_\rho(\lambda) \neq D_{\rho,\mu}(\lambda)$.

З щойно процитованої теореми з [4] елементарно випливають такі твердження.

Твердження 2. *i) Для будь-якої послідовності* λ *такої, що* $0 \leq \lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, $\theta_1 = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = +\infty$: $S_\rho(\lambda) \neq S_{\rho,\mu}(\lambda)$.

ii) Для довільних невід'ємних послідовностей λ, β *таких, що* $\lambda_n + \beta_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, $\theta_2 = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n + \beta_n} = +\infty$: $S_\rho(\lambda, \beta) \neq S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta)$.

Висловимо також таке припущення.

Припущення 1. *Умова* $\theta_1 < +\infty$ *є необхідною для того, щоб* $S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau) = S_\rho(\lambda,\beta,\tau)$ *для довільної неспадної невід'ємної функції* τ, *а умова* $\theta_2 < +\infty$ *є необхідною для того, щоб* $S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau) = S_\rho(\lambda,\beta,\tau)$ *для довільної неспадної невід'ємної функції* τ *такої, що* $\tau(x) \le x$ $(x \ge x_0)$.

Наступна теорема містить необхідні та достатні умови належності функції $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ до класу $S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau)$.

Теорема 3. *Нехай* $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$, $\rho > 0$ *і існує неспадна послідовність* $(\varkappa_n)$ *така, що* $0 \le \varkappa_n \to +\infty$ $(0 \le n \to +\infty)$ *і* $\mu(x,F) = a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$ *для всіх* $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$, $n \ge n_0$. *Для того, щоб* $F \in S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau)$ *достатньо, щоб*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_n}\big(\lambda_n(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)+ +\beta_n(\tau(\varkappa_{n+1})-\tau(\varkappa_n))\big) < +\infty \qquad (1)$$

і необхідно, щоб

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_{n+1}}\big(\lambda_n(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)+ +\beta_n(\tau(\varkappa_{n+1})-\tau(\varkappa_n))\big) < +\infty. \qquad (2)$$

Зауваження 1. Нескладно переконатися, що необхідна і достатня умови в нашій Теоремі 3 є близькими, але не рівносильними.

Зауваження 2. У випадку, коли $\theta_1 < +\infty$ або для всіх достатньо великих x виконується умова $\tau(x) \le x$ і $\theta_2 < +\infty$, то з Твердження 2 випливає, що наша Теорема 3 містить умови належності функції $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ до класу $S_\rho(\lambda,\beta,\tau)$.

2. Доведення Теореми 3. Нескладно переконатися, що $F \in S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) < +\infty.$$

Справді, якщо останнє умова виконується, то за критерієм Коші для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для всіх досить великих $t \le T$ отримуємо

$$e^{-T\rho}(\ln\mu(T,F) - \ln\mu(t,F)) \le \le \int_t^T e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) < \varepsilon,$$

звідки,

$$e^{-T\rho}\ln\mu(T,F) \to 0 \quad (T \to +\infty). \qquad (3)$$

Якщо ж

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\rho}\ln\mu(x,F)dx < +\infty,$$

то

$$e^{-T\rho}\ln\mu(T,F) \le \le \rho\int_T^{+\infty} e^{-x\rho}\ln\mu(x,F)dx \to 0 \quad (T \to +\infty),$$

тобто, знову виконується (3). Тому, обидва інтеграли збіжні або розбіжні одночасно і

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\rho}\ln\mu(x,F)dx = \frac{1}{\rho}\ln\mu(0,F)+ +\frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F).$$

Але,

$$\int_{\varkappa_{n_0}}^{+\infty} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) = = \sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{[\varkappa_n,\varkappa_{n+1})} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) = = \sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{[\varkappa_n,\varkappa_{n+1})} e^{-x\rho} d\big(\lambda_n x + \beta_n\tau(x)\big)$$

Звідси, якщо виконується умова (1), то

$$\int_{\varkappa_{n_0}}^{+\infty} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) \le \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\varkappa_n\rho}\int_{[\varkappa_n,\varkappa_{n+1})} d\big(\lambda_n x + \beta_n\tau(x)\big) = = \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_n}\big(\lambda_n(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)+ +\beta_n(\tau(\varkappa_{n+1})-\tau(\varkappa_n))\big) < +\infty.$$

Якщо ж виконується умова $F \in S_{\rho,\mu}(\lambda,\beta,\tau)$, то

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_{n+1}}\big(\lambda_n(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)+ +\beta_n(\tau(\varkappa_{n+1})-\tau(\varkappa_n))\big) = = \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\varkappa_{n+1}\rho}\int_{[\varkappa_n,\varkappa_{n+1})} d\big(\lambda_n x + \beta_n\tau(x)\big) \le \le \int_{\varkappa_{n_0}}^{+\infty} e^{-x\rho} d\ln\mu(x,F) < +\infty,$$

тобто, виконується умова (2).

3. Узагальнене формулювання Теореми 3. Нескладно зрозуміти, що правильне таке узагальнення Теореми 3.

Теорема 4. *Нехай $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, $\rho > 0$ і існують послідовність натуральних чисел $n_k \uparrow +\infty$ і зростаюча послідовність $(\varkappa_k)$ така, що $0 \le \varkappa_k \to +\infty$ $(0 \le k \to +\infty)$ і $\mu(x, F) = a_{n_k} e^{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}}$ для всіх $x \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$, $k \ge k_0$. Для того, щоб $F \in S_{\rho,\mu}(\lambda, \beta, \tau)$ достатньо, щоб*

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_k}\big(\lambda_{n_k}(\varkappa_{k+1} - \varkappa_k)+ \\ +\beta_{n_k}(\tau(\varkappa_{k+1}) - \tau(\varkappa_k))\big) < +\infty$$

і необхідно, щоб

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\rho\varkappa_{k+1}}\big(\lambda_{n_k}(\varkappa_{k+1} - \varkappa_k)+ \\ +\beta_{n_k}(\tau(\varkappa_{k+1}) - \tau(\varkappa_k))\big) < +\infty.$$

Відзначимо також наступне твердження (див., наприклад, [5]– [8]), яке містить достатні умови існування зростаючої послідовності $(\varkappa_k)$ такої, що $0 \le \varkappa_k \to +\infty$ $(0 \le k \to +\infty)$ і $\mu(x, F) = a_{n_k} e^{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}}$ для всіх $x \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$, $k \ge k_0$.

Твердження 5. *Якщо $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ і виконується хоча б одна з наступних умов:*
а) $\tau(x)$ – неспадна і послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ – неспадні,
б) $\tau(x)$ – диференційовна, $0 \le \tau'(x) \le 1$ $(x > 0)$, і послідовності $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ - зростаюча і $\lambda = (\lambda_n)$ – неспадна,
в) $\tau(x)$ – диференційовна, $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge 0)$ і послідовності $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ - зростаюча і $\beta = (\beta_n)$ – неспадна, — то існують послідовність натуральних чисел $n_k \uparrow +\infty$ і зростаюча послідовність $(\varkappa_k)$ така, що $0 \le \varkappa_k \to +\infty$ $(0 \le k \to +\infty)$ і $\mu(x, F) = a_{n_k} e^{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}}$ для всіх $x \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$, $k \ge k_0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kamthan P.K.* A theorem on step functions. II // Istambul Univ. Fen. Fac. Mecm. A. – 1963. – V.28. – P.65–69.

2. *Скаскiв О.Б., Трусевич О.М., Орищин О.Г.* Аналоги нерiвностi Валiрона для деяких додатних рядiв // Вiсник НУ "Львiвська полiтехнiка". Фiз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 540. – С.41–44.

3. *Мулява О.М.* Про класи збiжностi рядiв Дiрiхле // Укр. матем. ж. – 1999. – Т.51, №11. – С.1485–1494.

4. *Filevych P.V., Fedynyak S.I.* On belonging of entire Dirichlet series to convergence class // Mat. Stud. – 2001. – V.16, №1. – P.57–60.

5. *Величко С.Д., Скаскiв О.Б.* Асимптотичнi властивостi одного класу функцiональних рядiв // Вiсник. Львiв. ун-ту. – 1989. – Вип. 32. – С.50–51.

6. *Скаскiв О.Б., Трусевич О.М.* Максимальний член i сума регулярно збiжного функцiонального ряду // Вiсник Львiв. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С.75–79.

7. *Скаскiв О.Б., Трусевич О.М.* Про винятковi множини у асимптотичнiй рiвностi суми та максимального члена додатного ряду, подiбного до ряду Тейлора-Дiрiхле // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №1. – С.61–64.

8. *Скаскiв О.Б., Трусевич О.М., Киричинська I.Б.* Про суму i максимальний член рядiв, подiбних до ряду Тейлора-Дiрiхле // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №2. – С.90–95.