УДК 517.3

©2015 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ДО ТЕОРІЇ ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Наведено метод інтегрування правильних раціональних функцій, що не використовує розклад на елементарні дроби.

A method for integrating rational functions without using the decomposition into elementary fractions are obtained.

1. Вступ. Раціональною функцією називається функція

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Ця функція називається правильною, якщо степінь многочлена $P(x)$ менша за степінь многочлена $Q(x)$. Ми вважатимемо, що в подальшому коефіцієнти у многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ є дійсними.

У навчальних посібниках з інтегрального числення значна увага приділяється інтегруванню раціональних функцій. Їх інтегрування здійснюється за схемою:

1) зображення функції $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

де $S(x)$ і $\tilde{P}(x)$ – многочлени, причому степінь многочлена $\tilde{P}(x)$ менший за степінь многочлена $Q(x)$, якщо функція $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ не є правильною, та інтегрування $S(x)$ (многочлени $S(x)$ і $\tilde{P}(x)$ у рівності (1) визначаються єдиним чином);

2) розклад правильної раціональної функції $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ на елементарні дроби (для фактичного розкладання цієї функції використовують так званий метод невизначених коефіцієнтів);

3) інтегрування елементарних дробів.

Використання на практиці цієї методики супроводжується деякими труднощами при реалізації методу невизначених коефіцієнтів та інтегруванні елементарних дробів вигляду

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},$$

де $A,B,p,q\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ і $p^2-4q<0$. Тут і далі $\mathbb{R}$ і $\mathbb{N}$ – множини всіх дійсних і натуральних чисел відповідно.

Цих труднощів позбавлений розглянутий у подальшому метод, анонсований в [1,2], що дає змогу для кожної правильної раціональної функції $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, для якої відомі корені многочлена $Q(x)$, знаходити невизначений інтеграл, не здійснюючи розклад цієї функції на елементарні дроби.

2. Основна формула. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – довільні многочлени з дійсними коефіцієнтами, причому степінь многочлена $P(x)$ менша за степінь многочлена $Q(x)$, тобто раціональна функція $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ є правильною.

Позначимо через $\mathcal{M}$ множину всіх коренів многочлена $Q(x)$, а через $k(a)$ – кратність кореня $a\in\mathcal{M}$. Кожному $a\in\mathcal{M}$ поставимо у відповідність многочлен $Q_a(x)$, для якого

$$Q(x)=(x-a)^{k(a)}Q_a(x),$$

а кожним $m\in\{0,1,2,\dots,k(a)-1\}$ і $a\in\mathcal{M}$ – число

$$A(m,a)=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(a)}{Q_a(a)}, & \text{якщо } m = 0, \\ \left(\dfrac{d^m}{dx^m} \left(\dfrac{P(x)}{Q_a(x)} \right) \right) \Big|_{x=a}, & \text{якщо } m \geq 1. \end{cases}$$

Використаємо позначення $\operatorname{Re} z$ і $\operatorname{Im} z$ для дійсної та уявної частин комплексного числа z відповідно.

Справджується формула

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx =$$

$$= \sum_{a \in \mathcal{M},\ k(a) \geq 2} \sum_{m=0}^{k(a)-2} \frac{A(m,a)(x-a)^{m+1-k(a)}}{m!(m+1-k(a))} +$$

$$+ \sum_{a \in \mathcal{M} \cap \mathbb{R}} \frac{A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!} \ln|x-a| +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{M} \setminus \mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!} \times$$

$$\times \ln\left((x - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2\right) -$$

$$- \sum_{a \in \mathcal{M} \setminus \mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!} \operatorname{arctg} \frac{x - \operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a} + C. \tag{2}$$

Тут і в подальшому C – довільна стала.

Справді, відомо (див., наприклад, [3]), що для кожного $a \in \mathcal{M}$ існують многочлен $P_a(x)$, степінь якого менша степені многочлена $Q_a(x)$, і числа $A_1, A_2, \ldots, A_{k(a)}$, для яких

$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{k(a)}}{(x-a)^{k(a)}} + \frac{P_a(x)}{Q_a(x)}.$$

Тому

$$\frac{P(x)}{Q_a(x)} =$$

$$= A_1(x-a)^{k(a)-1} + A_2(x-a)^{k(a)-2} + \ldots +$$

$$+ A_{k(a)} + \frac{P_a(x)}{Q_a(x)}(x-a)^{k(a)}.$$

Очевидно, що

$$A_{k(a)} = \frac{P(a)}{Q_a(a)}$$

і для $m = \overline{1, k(a)-1}$

$$A_m =$$

$$= \frac{1}{(k(a)-m)!} \left(\frac{d^{k(a)-m}}{dx^{k(a)-m}} \left(\frac{P(x)}{Q_a(x)} \right) \right) \Big|_{x=a} =$$

$$= \frac{A(k(a)-m,a)}{(k(a)-m)!}.$$

Отже,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{m=0}^{k(a)-1} \frac{A(m,a)}{m!(x-a)^{k(a)-m}} + \frac{P_a(x)}{Q_a(x)}.$$

Звідси та довільності $a \in \mathcal{M}$ отримуємо рівність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{a \in \mathcal{M}} \sum_{m=0}^{k(a)-1} \frac{A(m,a)}{m!(x-a)^{k(a)-m}}. \tag{3}$$

Зобразимо рівність (3) у вигляді, зручному для інтегрування. Очевидно, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{a \in \mathcal{M},\ k(a) \geq 2} \sum_{m=0}^{k(a)-2} \frac{A(m,a)}{m!(x-a)^{k(a)-m}} +$$

$$+ \sum_{a \in \mathcal{M} \cap \mathbb{R}} \frac{A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!(x-a)} +$$

$$+ \sum_{a \in \mathcal{M} \setminus \mathbb{R}} \frac{A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!(x-a)}. \tag{4}$$

Легко перевірити, що у випадку, коли $a = \alpha + \beta i \in \mathcal{M} \setminus \mathbb{R}$ (i – уявна одиниця),

$$\frac{A(k(a)-1,a)}{x-a} + \frac{A(k(a^*)-1,a^*)}{x-a^*} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{Re} A(k(a)-1,a)(x - \operatorname{Re} a)}{(x - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} -$$

$$- \frac{2 \operatorname{Im} A(k(a)-1,a)) \operatorname{Im} a}{(x - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2}, \tag{5}$$

де $a^* = \alpha - \beta i$ – спряжене число до числа a. Тому

$$\int \left(\frac{A(k(a)-1,a)}{x-a} + \frac{A(k(a^*)-1,a^*)}{x-a^*} \right) dx =$$

$$= \operatorname{Re} A(k(a)-1,a) \ln\left((x - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2\right) -$$

$$-2\operatorname{Im} A(k(a)-1,a))\operatorname{arctg}\frac{x-\operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a}+C. \quad (6)$$

Інтегруючи обидві частини рівності (4) та враховуючи (5) і (6), отримаємо формулу (2) (у правильності (2) можна також переконатися диференціюванням).

3. Окремі випадки формули (2)**.** Очевидно, що:

1) якщо $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ і $k(a)=1$ для всіх $a\in\mathcal{M}$, то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\sum_{a\in\mathcal{M}}\frac{P(a)}{Q_a(a)}\ln|x-a|+C;$$

2) якщо $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ і $\{a\in\mathcal{M}:k(a)>1\}\neq\emptyset$, то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\sum_{a\in\mathcal{M}}\frac{A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\ln|x-a|+$$

$$+\sum_{a\in\mathcal{M},\ k(a)\geq 2}\sum_{m=0}^{k(a)-2}\frac{A(m,a)(x-a)^{m+1-k(a)}}{m!(m+1-k(a))}+C; \quad (7)$$

3) якщо $\mathcal{M}\subset\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел) і $k(a)=1$ для всіх $a\in\mathcal{M}$, то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=$$

$$=\sum_{a\in\mathcal{M}\cap\mathbb{R}}\frac{A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\ln|x-a|+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Re} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\times$$

$$\times\ln\left((x-\operatorname{Re} a)^2+(\operatorname{Im} a)^2\right)-$$

$$-\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Im} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\operatorname{arctg}\frac{x-\operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a}+C;$$

4) якщо $\mathcal{M}\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ і $k(a)=1$ для всіх $a\in\mathcal{M}$, то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Re} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\times$$

$$\times\ln\left((x-\operatorname{Re} a)^2+(\operatorname{Im} a)^2\right)-$$

$$-\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Im} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\operatorname{arctg}\frac{x-\operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a}+C;$$

5) якщо $\mathcal{M}\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ і

$$\{a\in\mathcal{M}:a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},k(a)>1\}\neq\emptyset,$$

то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=$$

$$=\sum_{a\in\mathcal{M},\ k(a)\geq 2}\sum_{m=0}^{k(a)-2}\frac{A(m,a)(x-a)^{m+1-k(a)}}{m!(m+1-k(a))}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Re} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\times$$

$$\times\ln\left((x-\operatorname{Re} a)^2+(\operatorname{Im} a)^2\right)-$$

$$-\sum_{a\in\mathcal{M}\setminus\mathbb{R}}\frac{\operatorname{Im} A(k(a)-1,a)}{(k(a)-1)!}\operatorname{arctg}\frac{x-\operatorname{Re} a}{\operatorname{Im} a}+C. \quad (8)$$

Наведені формули можна використовувати для інтегрування раціональних функцій.

4. Приклади та задачі. Покажемо застосування формул (2), (7) і (8).

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{x+1}{x(x^2+1)(x^2+4)^2}dx.$$

Оскільки

$$P(x)=x+1,$$

$$Q(x)=x(x^2+1)(x^2+4)^2,$$

$$\mathcal{M}=\{0,i,-i,2i,-2i\},$$

$$k(0)=k(i)=k(-i)=1,$$

$$k(2i)=k(-2i)=2,$$

$$Q_0(x)=(x^2+1)(x^2+4)^2,$$

$$Q_i(x)=x(x+i)(x^2+4)^2,$$

$$Q_{-i}(x)=x(x-i)(x^2+4)^2,$$

$$Q_{2i}(x)=x(x^2+1)(x+2i)^2,$$

$$Q_{-2i}(x)=x(x^2+1)(x-2i)^2,$$

$$Q'_{2i}(x)=$$

$$=(3x^2+1)(x+2i)^2+2x(x^2+1)(x+2i),$$

$$Q'_{-2i}(x)=$$

$$=(3x^2+1)(x-2i)^2+2x(x^2+1)(x-2i),$$

$$P(0)=1,$$
$$P(i)=1+i,$$
$$P(-i)=1-i,$$
$$P(2i)=1+2i,$$
$$P(-2i)=1-2i,$$
$$Q_0(0)=2^4,$$
$$Q_i(i)=Q_{-i}(-i)=-2\cdot 3^2,$$
$$Q_{2i}(2i)=3\cdot 2^5 i,$$
$$Q_{-2i}(-2i)=-3\cdot 2^5 i,$$
$$Q'_{2i}(2i)=Q'_{-2i}(-2i)=7\cdot 2^5,$$

то

$$A(0,0)=\frac{P(0)}{Q_0(0)}=\frac{1}{2^4},$$
$$A(0,i)=\frac{P(i)}{Q_i(i)}=\frac{-1-i}{2\cdot 3^2},$$
$$A(0,-i)=\frac{P(-i)}{Q_{-i}(-i)}=\frac{-1+i}{2\cdot 3^2},$$
$$A(0,2i)=\frac{P(2i)}{Q_{2i}(2i)}=\frac{2-i}{3\cdot 2^5},$$
$$A(0,-2i)=\frac{P(-2i)}{Q_{-2i}(-2i)}=\frac{2+i}{3\cdot 2^5},$$
$$A(1,2i)=\left(\frac{P(x)}{Q_{2i}(x)}\right)'\Bigg|_{x=2i}=$$
$$=\frac{Q_{2i}(2i)-P(2i)Q'_{2i}(2i)}{Q^2_{2i}(2i)}=\frac{7+11i}{3^2\cdot 2^5},$$
$$A(1,-2i)=\left(\frac{P(x)}{Q_{-2i}(x)}\right)'\Bigg|_{x=-2i}=$$
$$=\frac{Q_{-2i}(-2i)-P(-2i)Q'_{-2i}(-2i)}{Q^2_{-2i}(-2i)}=\frac{7-11i}{3^2\cdot 2^5}.$$

Тому за формулою (2)

$$\int\frac{x+1}{x(x^2+1)(x^2+4)^2}dx=$$
$$=\frac{-2+i}{3\cdot 2^5(x-2i)}-\frac{2+i}{3\cdot 2^5(x+2i)}+$$
$$+\frac{1}{2^4}\ln|x|-\frac{1}{2\cdot 3^2}\ln(x^2+1)+\frac{7}{3^2\cdot 2^5}\ln|x^2+4|+$$
$$+\frac{1}{2\cdot 3^2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2\cdot 3^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{-1}\right)-$$
$$-\frac{11}{3^2\cdot 2^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{11}{3^2\cdot 2^5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{-2}\right)+C=$$
$$=\frac{-x-1}{3\cdot 2^3(x^2+4)}+\frac{1}{2^4}\ln|x|-$$
$$-\frac{1}{2\cdot 3^2}\ln(x^2+1)+\frac{7}{3^2\cdot 2^5}\ln(x^2+4)+$$
$$+\frac{1}{3^2}\operatorname{arctg}x-\frac{11}{3^2\cdot 2^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл
$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Оскільки
$$P(x)=1,$$
$$Q(x)=(x^2-1)^n,$$
$$\mathcal{M}=\{1,-1\},$$
$$k(1)=k(-1)=n,$$
$$Q_1(x)=(x+1)^n,$$
$$Q_{-1}(x)=(x-1)^n,$$
$$\frac{P(x)}{Q_1(x)}=(x+1)^{-n},$$
$$\frac{P(x)}{Q_{-1}(x)}=(x-1)^{-n},$$
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!(x+1)^{n+m}},$$
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{P(x)}{Q_{-1}(x)}\right)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!(x-1)^{n+m}},$$

то
$$A(m,1)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!2^{n+m}},$$
$$A(m,-1)=\frac{(-1)^n(n+m-1)!}{(n-1)!2^{n+m}}$$

для всіх $m\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Тому за формулою (7)

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\ln|x-1|+$$
$$+\frac{(-1)^n(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\ln|x+1|+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!2^{n+m}}\times$$
$$\times\frac{(x-1)^{m+1-n}}{m!(m+1-n)}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^n(n+m-1)!}{(n-1)!2^{n+m}}\times$$
$$\times\frac{(x+1)^{m+1-n}}{m!(m+1-n)}+C=$$
$$=\frac{(-1)^n(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\left(\ln|x+1|-\ln|x-1|\right)+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^{m+1}C_{n+m-1}^m}{2^{n+m}(n-m-1)}(x-1)^{m+1-n}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n+1}C_{n+m-1}^m}{2^{n+m}(n-m-1)}(x+1)^{m+1-n}+C.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{(-1)^n(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\ \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^{m+1}C_{n+m-1}^m}{2^{n+m}(n-m-1)}(x-1)^{m+1-n}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n+1}C_{n+m-1}^m}{2^{n+m}(n-m-1)}(x+1)^{m+1-n}+C. \quad (9)$$

Задача 1. Використовуючи (9), знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx, \quad (10)$$

де $A,B,p,q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ і $p^2-4q>0$.

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

не використовуючи рекурентну формулу [3, с. 326].

Оскільки

$$P(x)=1,$$
$$Q(x)=(x^2+1)^n,$$
$$\mathcal{M}=\{i,-i\},$$
$$k(i)=k(-i)=n,$$
$$Q_i(x)=(x+i)^n,$$
$$Q_{-i}(x)=(x-i)^n,$$
$$\frac{P(x)}{Q_i(x)}=(x+i)^{-n},$$
$$\frac{P(x)}{Q_{-i}(x)}=(x-i)^{-n},$$
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{P(x)}{Q_i(x)}\right)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!(x+i)^{n+m}},$$
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{P(x)}{Q_{-i}(x)}\right)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!(x-i)^{n+m}},$$

то

$$A(m,i)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{-i}{2}\right)^{n+m},$$
$$A(m,-i)=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+m}$$

для всіх $m\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ і

$$\operatorname{Re}A(n-1,i)=\operatorname{Re}A(n-1,-i)=0.$$

Тому за формулою (8)

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)}\times$$
$$\times\left(\frac{-i}{2}\right)^{n+m}(x-i)^{m+1-n}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)}\times$$
$$\times\left(\frac{i}{2}\right)^{n+m}(x+i)^{m+1-n}-$$
$$-\operatorname{Im}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!(-i)^{2n-1}}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\operatorname{arctg}x-$$
$$-\operatorname{Im}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!(i)^{2n-1}}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}\operatorname{arctg}(-x)+$$
$$+C=$$
$$=\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)2^{n+m}}\times$$
$$\times(-i)^{n+m}(x-i)^{m+1-n}+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)2^{n+m}}\times$$

$$\times\, i^{\,n+m}(x+i)^{m+1-n}+$$

$$+\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}\operatorname{arctg} x + C.$$

Ураховуючи, що

$$(-i)^{n+m}(x-i)^{m+1-n}+i^{\,n+m}(x+i)^{m+1-n}=$$

$$=\frac{(-i)^{n+m}(x+i)^{n-m-1}}{(x^2+1)^{n-m-1}}+\frac{i^{\,n+m}(x-i)^{n-m-1}}{(x^2+1)^{n-m-1}}$$

і для всіх $m=\overline{0,n-2}$

$$(-i)^{n+m}(x+i)^{n-m-1}+i^{\,n+m}(x-i)^{n-m-1}=$$

$$=(-i)^{n+m}\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k i^{\,n-m-1-k}+$$

$$+i^{\,n+m}\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k(-i)^{n-m-1-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k(-1)^{n+m}i^{\,2n-1-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k(-1)^{n-m-1-k}i^{\,2n-1-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k(-1)^{m}i^{\,-1-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k(-1)^{-m-1-k}i^{\,-1-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m-1}^{k}x^k\frac{1+(-1)^{-1-k}}{(-1)^m}i^{\,-1-k}=$$

$$=2(-1)^m\sum_{2\le 2k\le n-m}C_{n-m-1}^{2k-1}(-1)^k x^{2k-1},$$

отримаємо

$$(-i)^{n+m}(x-i)^{m+1-n}+i^{\,n+m}(x+i)^{m+1-n}=$$

$$=\frac{2(-1)^m}{(x^2+1)^{n-m-1}}\sum_{2\le 2k\le n-m}C_{n-m-1}^{2k-1}(-1)^k x^{2k-1}$$

і

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)2^{n+m}}\times$$

$$\times\,(-i)^{n+m}\,(x-i)^{m+1-n}+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)2^{n+m}}\times$$

$$\times\, i^{\,n+m}(x+i)^{m+1-n}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!m!(m+1-n)2^{n+m}}\times$$

$$\times\frac{2(-1)^m}{(x^2+1)^{n-m-1}}\sum_{2\le 2k\le n-m}C_{n-m-1}^{2k-1}(-1)^k x^{2k-1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}C_{n+m-1}^{m}\frac{1}{(n-m-1)2^{n+m-1}}\times$$

$$\times\sum_{2\le 2k\le n-m}C_{n-m-1}^{2k-1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(x^2+1)^{n-m-1}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{2\le 2k\le n-m}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-m-1)2^{n+m-1}}\times$$

$$\times C_{n+m-1}^{m}C_{n-m-1}^{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(x^2+1)^{n-m-1}}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{2\le 2k\le n-m}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-m-1)2^{n+m-1}}\times$$

$$\times C_{n+m-1}^{m}C_{n-m-1}^{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(x^2+1)^{n-m-1}}+$$

$$+\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}\operatorname{arctg} x + C. \qquad (11)$$

Задача 2. За допомогою (11) знайти невизначений інтеграл (10), якщо $p^2-4q<0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Слюсарчук В.Ю.* Метод швидкого інтегрування правильних дробово-раціональних функцій // Тези міжнародної науково-методичної конференції "Новітні технології навчання у вищих та середніх навчальних закладах". – Рівне: Вид-во УІІВГ, 1995. – 83 с.

2. *Слюсарчук В.Ю.* Метод швидкого інтегрування правильних дробово-раціональних функцій // Технологія навчання. – Рівне: Вид-во УДАВГ, 1997. – С. 126–131.

3. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720 с.