УДК 515.51

©2015 р. Тарас Банах

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО СЕКВЕНЦІАЛЬНЕ ЗАМИКАННЯ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Для сепарабельних метризовних просторів X, Y та метризовної топологічної групи Z через $S(X\times Y,Z)$ позначається простір усіх нарізно неперервних функцій $f: X\times Y\to Z$, наділений топологією пошарової рівномірної збіжності, яка породжується передбазою, що складається з множин виду $[K_X\times K_Y,U]=\{f\in S(X\times Y,Z): f(K_X\times K_Y)\subset U\}$, де U – відкрита множина в Z і $K_X\subset X$, $K_Y\subset Y$ компактні множини, одна з яких одноточкова. Доведено, що довільна нарізно неперервна функція $f: X\times Y\to Z$ з нульвимірним образом $f(X\times Y)$ є границею послідовності неперервних функцій у топології пошарової рівномірної збіжності.

For separable metrizable spaces X, Y and a metrizable topological group Z by $S(X\times Y,Z)$ we denote the space of all separately continuous functions $f: X\times Y\to Z$ endowed with the topology of fiberwise uniform convergence, generated by the subbase consisting of the sets $[K_X\times K_Y,U]=\{f\in S(X\times Y,Z): f(K_X\times K_Y)\subset U\}$, where U is an open subset of Z and $K_X\subset X$, $K_Y\subset Y$ are compact sets one of which is a singleton. We prove that every separately continuous function $f: X\times Y\to Z$ with zero-dimensional image $f(X\times Y)$ is a limit of a sequence of jointly continuous functions in the topology of fiberwise uniform convergence.

У цій статті ми досліджуємо секвенціальне замикання $\bar{C}^s(X\times Y,Z)$ множини $C(X\times Y,Z)$ неперервних функцій у просторі $S(X\times Y,Z)$ нарізно неперервних функцій $f: X\times Y\to Z$, визначених на добутку топологічних просторів X, Y зі значеннями у топологічному просторі Z. Простір $S(X\times Y,Z)$ наділено топологією пошарової рівномірної збіжності на компактах, яка породжена передбазою, що складається з множин виду

$$[K_X\times K_Y,U]=\{f\in S(X\times Y,Z):$$
$$f(K_X\times K_Y)\subset U\},$$

де $U\subset Z$ – відкрита множина і $K_X\subset X$, $K_Y\subset Y$ – компактні підмножини, одна з яких одноточкова. Зауважимо, що послідовність $(f_n)_{n\in\omega}$ функцій $f_n: X\times Y\to Z$ збігається до функції $f_\infty: X\times Y\to Z$ тоді і лише тоді, коли для довільних точок $x\in X$, $y\in Y$ послідовність $\big(f_n(x,\cdot)\big)_{n\in\omega}$ збігається до $f_\infty(x,\cdot)$ у просторі $C(Y,Z)$, а послідовність $\big(f_n(\cdot,y)\big)_{n\in\omega}$ збігається до $f_\infty(\cdot,y)$ у просторі $C(X,Z)$ (наділеному компактно-відкритою топологією).

У випадку компактних просторів X, Y та дійсної прямої $Z=\mathbb{R}$ простір $S(X\times Y,Z)$ вивчався у працях Г.А. Волошин, В.К. Маслюченка та О.В. Маслюченка [1]– [5]. Зокрема, у цих працях розглядалася проблема опису секвенціального замикання $\bar{C}^s(X\times Y,Z)$ множини $C(X\times Y,Z)$ неперервних функцій у просторі $S(X\times Y,Z)$. Нагадаємо, що *секвенціальним замиканням* $\bar{A}^s$ множини A у топологічному просторі T називається множина границь $\lim_{n\to\infty}a_n$ послідовностей $\{a_n\}_{n\in\omega}\subset A$, збіжних у просторі T.

Із теореми Тітце-Урисона [8, 2.1.8] випливає, що для тихонових просторів X, Y множина $C(X\times Y,\mathbb{R})$ неперервних функцій всюди щільна в $S(X\times Y,\mathbb{R})$, що мотивує наступне питання.

Питання 1. *Чи правда, що $\bar{C}^s(X\times Y,\mathbb{R})=S(X\times Y,\mathbb{R})$ для довільних (нуль-вимірних) компактних метризовних просторів X, Y?*

У роботі [3] Г.А. Волошин та В.К. Маслюченко довели, що для метризовних компактних просторів X та компактного простору Y множина $\bar{C}^s(X\times Y,\mathbb{R})$ містить усі нарізно неперервні функції $f: X\times Y\to\mathbb{R}$, для яких множина $D(f)\subset X\times Y$ точок розриву має зліченну проекцію на X або Y.

У цій статті ми підходимо до Питання 1

з дещо іншого боку і доводимо, що для метризовних сепарабельних просторів X, Y та метризовної топологічної групи Z множина $\bar{C}^s(X\times Y, Z)$ містить усі нарізно неперервні функції $f : X \times Y \to Z$ з нуль-вимірним образом $f(X \times Y) \subset Z$.

Доведення розпочнемо із наступного (відносно простого) факту.

Теорема 1. *Для метризовних сепарабельних просторів X, Y та метризовного простору Z секвенціальне замикання множини неперервних функцій $C(X \times Y, Z)$ у просторі $S(X\times Y, Z)$ містить усі нарізно неперервні функції $f : X \times Y \to Z$ з дискретним образом $f(X \times Y) \subset Z$.*

Доведення. Зафіксуємо довільну нарізно неперервну функцію $f : X \times Y \to Z$ з дискретним образом $f(X \times Y) \subset Z$. Без обмеження загальності можна вважати, що $Z = f(X\times Y)$. Із нарізної неперервності функції f випливає, що для довільних зліченних всюди щільних підмножин $D_X \subset X$ та $D_Y \subset Y$ множина $f(D_X \times D_Y)$ всюди щільна в дискретному просторі $Z = f(X\times Y)$. Тому $Z = f(D_X \times D_Y)$ і простір Z – не більш ніж зліченний. Запишемо множину Z у вигляді зліченного об'єднання $Z = \bigcup_{n\in\omega} Z_n$ неспадної послідовності $(Z_n)_{n\in\omega}$ скінченних множин.

Зафіксуємо зліченні бази $\{U_n\}_{n\in\omega}$ та $\{V_n\}_{n\in\omega}$ топологій метризовних сепарабельних просторів X та Y, відповідно.

Для довільної точки $z \in Z$ та числа $k \in \omega$ розглянемо підмножини

$$X(z, k) = \{x \in X : \{x\} \times V_k \subset f^{-1}(z)\} = \{x \in X : \{x\} \times \overline{V}_k \subset f^{-1}(z)\},$$

$$Y(z, k) = \{y \in Y : U_k \times \{y\} \subset f^{-1}(z)\} = \{y \in Y : \overline{U}_k \times \{y\} \subset f^{-1}(z)\}.$$

Перевіримо, що множина $X(z, k)$ замкнена в X. Дійсно, якщо $x \in X\setminus X(z, k)$, то $f(x, v) \neq z$ для деякого $v \in V_k$. Із нарізної неперервності f випливає існування такого околу $O_x \subset X$ точки x, що $f(O_x\times\{v\}) \subset Z\setminus\{z\}$, звідки випливає, що $O_x\cap X(z, k) = \emptyset$. Аналогічно можна довести замкненість множини $Y(z, k)$ у просторі Y.

Звідси випливає, що для довільного числа $n \in \omega$ підмножина

$$XY(z, n) = \bigcup_{k\le n}(X(z, k) \times V_k) \cup (U_k \times Y(z, k))$$

замкнена в $X \times Y$ і міститься у множині $f^{-1}(z)$. Тому сім'я замкнених множин $\big(XY(z, n)\big)_{z\in Z}$ диз'юнктна. Використовуючи нормальність простору $X \times Y$, можемо побудувати таку неперервну функцію $g_n : X \times Y \to Z$, що $XY(z, n) \subset g_n^{-1}(z)$ для кожного $z \in Z_n$.

Залишилось довести, що послідовність $(g_n)_{n\in\omega}$ збігається до f у просторі $S(X \times Y, Z)$. Для цього достатньо для довільного околу $O_f \subset S(X \times Y, Z)$ знайти такий номер $m \in \omega$, що $g_n \in O_f$ для усіх $n \ge m$. Без обмеження загальності можна вважати, що окіл O_f – передбазовий, тобто має вид $[K_X \times K_Y, W] = \{g \in S(X \times Y, Z) : g(K_X\times K_Y) \subset W\}$ для деякої скінченної підмножини $W \subset Z$ та деяких компактних підмножин $K_X \subset X$, $K_Y \subset Y$, одна з яких одноточкова. Для визначеності, вважаємо, що компакт $K_X = \{x\}$ одноточковий. Розглянемо неперервне відображення $f_x : Y \to Z$, $f_x : y \mapsto f(x, y)$, і зауважимо, що множина $f_x^{-1}(W)$ відкрито-замкнена в Y і містить компакт K_Y.

Для кожного $z \in W$ знайдемо таку скінченну множину $F_z \subset \omega$, що $K_Y \cap f_x^{-1}(z) \subset \bigcup_{k\in F_z} V_k \subset f_x^{-1}(z)$. Виберемо таке число $m \in \omega$, що $W \subset Z_m$ і $\bigcup_{z\in W} F_z \subset \{0, \dots, m\}$. Тоді для довільних $n \ge m$ і $z \in W$ справджується включення $\{x\}\times(K_Y\cap f_x^{-1}(z)) \subset XY(z, n) \subset g_n^{-1}(z)$, звідки випливає, що

$$K_X \times K_Y = \{x\} \times K_Y \subset \bigcup_{z\in W}\{x\} \times f_x^{-1}(z) \subset \bigcup_{z\in W} f_n^{-1}(z) = g_n^{-1}(W)$$

і тому $g_n \in O_f = [K_X \times K_Y, W]$ для усіх $n \ge m$.

Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *нуль-вимірним*, якщо відкрито-замкнені множини утворюють базу топології простору Z.

Теорема 2. *Для сепарабельних метризовних просторів X, Y та метризовної топологічної групи G секвенціальне замикання множини неперервних функцій $C(X\times Y, G)$ у просторі $S(X\times Y, G)$ містить усі нарізно неперервні функції $f : X\times Y \to G$ з нульвимірним образом $f(X\times Y) \subset G$.*

Доведення. Зафіксуємо довільну нарізно неперервну функцію $f : X\times Y \to G$ з нуль-вимірним образом $f(X\times Y)$. За теоремою Біркхофа-Какутані [6, 3.3.12], топологія метризовної топологічної групи G породжується обмеженою ліво-інваріантною метрикою d. Після множення d на достатньо малу додатню сталу, можемо вважати, що $\mathrm{diam}(G) = \sup\{d(x, y) : x, y \in G\} \le \frac{1}{2}$. Для додатнього ε позначимо через $B[\varepsilon] = \{g \in G : d(g, 1_G) \le \varepsilon\}$ замкнену ε-кулю з центром в одиниці 1_G групи G. Для кожного $n \in \omega$ виберемо максимальну підмножину $E_n \subset B[\frac{1}{2^{n-1}}]$, яка є $\frac{1}{2^{n+1}}$-*розділеною* у тому сенсі, що $d(x, y) \ge \frac{1}{2^{n+1}}$ для довільних різних точок $x, y \in E_n$. Зрозуміло, що множина E_n – замкнена та дискретна в G.

Із сепарабельності просторів X, Y та нарізної неперервності функції $f : X\times Y \to G$ випливає сепарабельність образу $f(X\times Y)$. Оскільки метризовний простір $Z = f(X\times Y)$ сепарабельний та нуль-вимірний, то він має покриттєвий вимір $\dim(Z) = 0$, що дозволяє вибрати послідовність $(\mathcal{W}_n)_{n\in\omega}$ диз'юнктних відкритих покрить простору Z множинами діаметру $\le \frac{1}{2^{n+1}}$. Заміняючи кожне покриття $\mathcal{W}_n$ на дрібніше покриття $\{W \cap W' : W \in \mathcal{W}_n,\ W' \in \mathcal{W}_{n+1}\}$, можна вважати, що для кожного $n \in \omega$ покриття $\mathcal{W}_{n+1}$ подрібнює покриття $\mathcal{W}_n$. Оскільки $\mathrm{diam}(Z) \le \frac{1}{2}$, то можна покласти $\mathcal{W}_0 = \{Z\}$. Індукцією по $n \ge 0$ ми побудуємо послідовність $(r_n)_{n\in\omega}$ неперервних відображень $r_n : Z \to G$ таких, що $r_0(Z) = \{1_G\}$ і для кожного $n \in \omega$ виконуються наступні умови:

(1_n) для кожної множини $W \in \mathcal{W}_n$ її образ $r_n(W)$ одноточковий;

(2_n) $\sup_{z\in Z} d(r_n(z), z) \le 2^{-n}$;

(3_n) $r_n(z) \in r_{n-1}(z)\cdot E_{n+1}$ для кожного $z \in Z$.

Індуктивну побудову почнемо зі сталого відображення $r_0 : Z \to \{1_G\} \subset G$. Припустимо, що для деякого $n \in \omega$ ми побудували неперервне відображення $r_n : Z \to G$, що задовольняє умови (1_n) та (2_n). Для кожного $W \in \mathcal{W}_n$ через g_W позначимо єдину точку множини $r_n(W)$. Розглянемо підсім'ю $\mathcal{W}_{n+1}(W) = \{W' \in \mathcal{W}_{n+1} : W' \subset W\}$ і для кожної множини $W' \in \mathcal{W}_{n+1}(W)$ виберемо точку $z_{W'} \in W'$. Зауважимо, що $d(z_{W'}, g_W) = d(z_{W'}, r_n(z_{W'})) \le \frac{1}{2^n}$ і отже $g_W^{-1} z_{W'} \in B[\frac{1}{2^n}]$. Із максимальності $\frac{1}{2^{n+2}}$-розділеної множини $E_{n+1} \subset B[\frac{1}{2^n}]$ випливає існування точки $\varepsilon_{W'} \in E_{n+2}$ такої, що $d(\varepsilon_{W'}, g_W^{-1} z_{W'}) < \frac{1}{2^{n+2}}$. Розглянемо точку $g_{W'} = g_W \cdot \varepsilon_{W'}$ і зауважимо, що

$$d(g_{W'}, z_{W'}) = d(g_W \cdot \varepsilon_{W'}, z_{W'}) =$$
$$d(\varepsilon_{W'}, g_W^{-1} z_{W'}) \le \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Означимо функцію $r_{n+1} : Z \to G$ формулою $r_{n+1}(z) = g_{W'}$ де $W' \in \mathcal{W}_{n+1}$ – єдина множина, що містить z. Зрозуміло, що функція r_{n+1} неперервна і задовольняє умову (1_{n+1}). Щоб перевірити умову (2_{n+1}), виберемо довільну точку $z \in Z$ і знайдемо єдину множину $W' \in \mathcal{W}_{n+1}$, що містить точку z та єдину множину $W \in \mathcal{W}_n$, що містить множину W'. Зауважимо, що

$$d(r_{n+1}(z), z) = d(g_{W'}, z) \le$$
$$d(g_{W'}, z_{W'}) + d(z_{W'}, z) \le$$
$$2^{-n-2} + \mathrm{diam}(W') \le$$
$$2^{-n-2} + 2^{-n-2} = 2^{-n-1}.$$

Щоб перевірити умову (3_{n+1}), візьмемо довільну точку $z \in Z$ і знайдемо єдині множини $W \in \mathcal{W}_n$ і $W' \in \mathcal{W}_{n+1}$, що містять цю точку. Оскільки покриття $\mathcal{W}_{n+1}$ подрібнює диз'юнктне покриття $\mathcal{W}_n$, то $W' \subset W$. Тому $r_{n+1}(z) = g_{W'} = g_W \cdot \varepsilon_{W'} = r_n(z)\cdot \varepsilon_{W'} \subset r_n(z)\cdot E_{n+1}$. Це завершує індуктивну побудову функціональної послідовності $(r_n)_{n\in\omega}$.

Із неперервності r_n та нарізної неперервності функції f випливає, що композиція $f_n = r_n \circ f : X\times Y \to G$ є нарізно неперервною функцією, причому

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} d(f_n(x, y), f(x, y)) \le$$

$$\sup_{z\in Z} d(r_n(z), z) \le 2^{-n}.$$

Тобто функційна послідовність $(f_n)_{n\in\omega}$ рівномірно збігається до f.

Із неперервності групових операцій та нарізної неперервності функцій f_n, f_{n+1} випливає, що функція $g_n = f_n^{-1} f_{n+1} : X \times Y \to G$, $g_n : (x, y) \mapsto f_n^{-1}(x, y) \cdot f_{n+1}(x, y)$, нарізно неперервна. З умови (3_{n+1}) випливає, що $g_n(x, y) = f_n^{-1}(x, y) \cdot f_{n+1}(x, y) = r_n(f(x, y))^{-1} \cdot r_{n+1}(f(x, y)) \in E_{n+1}$ і тому образ $g_n(X \times Y)$ – дискретний. За теоремою 1, нарізно неперервна функція $g_n : X \times Y \to E_{n+1}$ є границею у просторі $S(X\times Y, G)$ послідовності $(g_{n,m})_{m\in\omega}$ неперервних функцій $g_{n,m} : X \times Y \to E_{n+1}$.

Для довільних чисел $n, m \in \omega$ розглянемо неперервну функцію

$$f_{n,m} = g_{0,m} \cdot g_{1,m} \cdots g_{n,m} : X \times Y \to G.$$

Беручи до уваги, що $\lim_{m\to\infty} g_{n,m} = g_n$ для усіх n, робимо висновок, що $\lim_{m\to\infty} f_{n,m} = g_0 \cdots g_n = f_n$ для кожного $n \in \omega$. Залишилось перевірити, що $\lim_{n\to\infty} f_{n,n} = f$ у просторі $S(X \times Y, G)$.

Зафіксуємо довільний окіл O_f функції у просторі $S(X \times Y)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що O_f є передбазовим околом виду $[K_X \times K_Y, W] = \{g \in S(X \times Y, G) : f(K_X \times K_Y) \subset W\}$, де $W \subset G$ – відкрита множина і $K_X \subset X$, $K_Y \subset Y$ – компактні підмножини, одна з яких одноточкова. Використовуючи компактність множини $f(K_X\times K_Y) \subset W$, знайдемо таке число $l \in \omega$, що $f(K_X \times K_Y) \cdot B[\frac{4}{2^l}] \subset W$. Збіжність послідовності $(f_{l,n})_{n\in\omega}$ до функції f_l у просторі $S(X \times Y, G)$ дає нам таке число $m \ge l$, що $\sup_{(x,y)\in K_X\times K_Y} d(f_{l,n}(x, y), f_l(x, y)) \le 2^{-l}$ для усіх $n \ge m$. Перевіримо, що $\sup_{(x,y)\in K_X\times K_Y} d(f(x, y), f_{n,n}(x, y)) \le 2^{-l}$ для усіх $n \ge m$. Зафіксуємо довільне число $n \ge m$ та пару $z = (x, y) \in K_X \times K_Y$. Зауважимо, що $g_{l+1,n}(z) \cdots g_{n,n}(z) \in E_{l+2} \cdots E_{n+1} \subset B[\frac{1}{2^{l+1}}] \cdots B[\frac{1}{2^n}] \subset B[\frac{1}{2^l}]$. Тоді

$$d(f(z), f_{n,n}(z)) \le d(f(z), f_l(z))+$$
$$d(f_l(z), f_{l,n}(z)) + d(f_{l,n}(z), f_{n,n}(z)) \le$$
$$\le 2^{-l} + 2^{-l}+$$
$$d(g_{0,n}(z) \cdots g_{l,n}(z), g_{0,n}(z) \cdots g_{n,n}(z)) =$$
$$= 2^{-l+1} + d(1_G, g_{l+1,n}(z) \cdots g_{n,n}(z)) \le$$
$$2^{-l+1} + 2^{-l} < 2^{-l+2}$$

і, отже, $f_{n,n}(z) \in W$ згідно з вибором числа l.

Тепер ми знайдемо умови на топологічну групу Z, при яких секвенціальне замикання $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ множини $C(X \times Y, Z)$ неперервних функцій у просторі $S(X \times Y, Z)$ замкнене у топології рівномірної збіжності на $S(X \times Y, Z)$.

Фактично, на просторі $S(X\times Y, Z)$ є чотири природні топології рівномірної збіжності, породжені чотирма канонічними рівномірностями топологічної групи Z. Щоб означити ці топології, для довільної функції $f \in S(X \times Y, Z)$ та околу $U \subset Z$ одиниці групи Z розглянемо множини

$$B_l[f, U] = \{g \in S(X \times Y, Z) :$$
$$\forall (x, y) \in X \times Y \;\; g(x, y) \in f(x, y) \cdot U\},$$
$$B_r[f, U] = \{g \in S(X \times Y, Z) :$$
$$\forall (x, y) \in X \times Y \;\; g(x, y) \in U \cdot f(x, y)\},$$
$$B_{lr}[f, U] = B_l[f, U] \cap B_r[f, U] =$$
$$\{g \in S(X \times Y, Z) : \forall (x, y) \in X \times Y$$
$$g(x, y) \in U \cdot f(x, y) \cap f(x, y) \cdot U\},$$
$$B_{rl}[f, U] = \{g \in S(X \times Y, Z) :$$
$$\forall (x, y) \in X \times Y \;\; g(x, y) \in U \cdot f(x, y) \cdot U\}.$$

Підмножину $W \subset S(X \times Y, Z)$ назвемо τ_s-*відкритою* для $s \in \{l, r, lr, rl\}$, якщо для кожної функції $f \in W$ існує такий окіл $U \subset Z$ одиниці 1_Z групи Z, що $B_s[f, U] \subset W$. Сім'я τ_s усіх τ_s-відкритих множин є топологією на просторі $S(X \times Y, Z)$. Зрозуміло, що $\tau_{rl} \subset \tau_l \cap \tau_r$ і $\tau_l \cup \tau_r \subset \tau_{lr}$. Підмножину $F \subset S(X \times Y, Z)$ називатимемо $\tau_l \cap \tau_r$-*замкненою*, якщо її доповнення в $S(X\times Y, Z)$ належить топології $\tau_l \cap \tau_r$.

Для топологічних просторів X, Y, Z через $S_0(X \times Y, Z)$ позначаємо множину усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to Z$ з нуль-вимірним образом $f(X \times Y)$. Якщо Z – топологічна група, то через $\bar{S}^u_0(X \times Y, Z)$ позначатимемо замикання множини $S_0(X \times$

$Y, Z)$ у топології рівномірної збіжності $\tau_l \cap \tau_r$ на просторі $S(X \times Y, Z)$. Із теореми 2 випливає, що $S_0(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$ для довільних метризовних компактів X, Y та метризовної топологічної групи Z. У наступній теоремі ми дамо умови на групу Z, при яких $\bar{S}_0^u(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$.

Будемо говорити, що топологічний простір Z є *абсолютним екстензором* для топологічного простору X, якщо довільне неперервне відображення $f : A \to Z$ визначене на замкненій підмножині $A \subset X$ продовжується до неперервного відображення $\bar{f} : X \to Z$.

Теорема 3. *Нехай X, Y – сепарабельні метризовні простори і Z – метризовна топологічна група, яка має базу околів одиниці, що складається з абсолютних екстензорів для простору $X \times Y$. Тоді секвенціальне замикання $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ множини $C(X \times Y, Z)$ у просторі $S(X \times Y, Z)$ замкнене у топології $\tau_l \cap \tau_r$. Як наслідок, $\bar{S}_0^u(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Достатньо довести, що множина $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ замкнена у топологіях τ_l та τ_r на просторі $S(X \times Y, Z)$. Для доведення τ_l-замкненості цієї множини, зафіксуємо ліво-інваріантну метрику $d \le 1$, що породжує топологію метризовної топологічної групи Z. Покладемо $W_{-1} = W_0 = Z$ і для кожного $n > 0$ виберемо окіл $W_n \subset \{z \in Z : d(1_Z, z) \le 2^{-n}\}$ одиниці 1_Z, що є абсолютним екстензором для простору $X \times Y$. Заміняючи послідовність $(W_n)_{n\in\omega}$ деякою її підпослідовністю, можемо вважати, що $W_n^{-1} W_n W_n \subset W_{n-1}$ для усіх $n > 0$.

Щоб довести τ_l-замкненість множини $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$, візьмемо довільну функцію $f \in S(X \times Y, Z)$, що належить τ_l-замиканню множини $\bar{C}^s(X \times Y)$. Для кожного $n \in \omega$ виберемо функцію $f_n \in \bar{C}^s(X \times Y, Z)$ так, щоб $f_n(x, y) \in f(x, y) \cdot W_{n+1}$ для усіх $(x, y) \in X \times Y$. Оскільки $W_0 = Z$, то функцію f_0 можна вибрати рівною сталій функції $X \times Y \to \{1_Z\}$. Для кожного $n \in \omega$ розглянемо функцію $g_n = f_n^{-1} \cdot f_{n+1} : X \times Y \to Z$ і зауважимо, що для кожного $(x, y) \in X \times Y$ справджується включення $g_n(x, y) = f_n^{-1}(x, y) \cdot f_{n+1}(x, y) \subset W_n^{-1} \cdot f(x, y)^{-1} \cdot f(x, y) \cdot W_{n+1} = W_n^{-1} W_{n+1} \subset \overline{W_n^{-1} W_{n+1} W_{n+2}} \subset W_n^{-1} W_{n+1} W_{n+2} W_{n+3} \subset W_{n-1}$.

Із неперервності групових операцій на топологічній групі Z випливає, що множина $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ є групою. Тому $g_n \in \bar{C}^s(X \times Y, Z)$ і можна підібрати послідовність $(g_{n,m})_{m\in\omega}$ неперервних функцій $g_{n,m} : X \times Y \to G$, що збігається до функції g_n у просторі $S(X \times Y, Z)$. Функції $g_{n,m}$ можна модифікувати так, щоб $g_{n,m}(X \times Y) \subset W_{n-1}$. Це тривіально для $n \le 1$. Тому покладемо $\bar{g}_{k,m} = g_{k,m}$ для $k \le 1$, $m \in \omega$, і зафіксуємо довільне число $n > 1$. Із неперервності функції $g_{n,m}$ випливає, що множина $F_{n,m} = g_{n,m}^{-1}(\overline{W_n^{-1} W_{n+1} W_{n+2}})$ замкнена в $X \times Y$. Оскільки W_{n-1} є абсолютним екстензором для простору $X \times Y$, то функцію $g_{n,m} | F_{n,m}$ можна продовжити до неперервної функції $\bar{g}_{n,m} : X \times Y \to W_{n-1}$. Покажемо, що послідовність $(\bar{g}_{n,m})_{m\in\omega}$ все ще збігається до функції g_n. Достатньо перевірити, що для довільного передбазового околу $O(g_n) = [K_X \times K_Y, W]$ функції g_n існує номер $k \in \omega$ такий, що $\bar{g}_{n,m} \in O(g_n)$ для усіх $m \ge k$. Тут $W \subset Z$ – відкрита підмножина і $K_X \subset X$, $K_Y \subset Y$ компактні підмножини, одна з яких одноточкова. Використовуючи компактність підмножини $g_n(K_X \times K_Y) \subset W$, знайдемо таке $l \ge n + 2$, що $g_n(K_X \times K_Y) \cdot W_l \subset W$. Збіжність послідовності $(g_{n,m})_{m\in\omega}$ до функції g_n дає нам таке число $k \in \omega$, що $g_{n,m}(K_X \times K_Y) \subset g_n(K_X \times K_Y) \cdot W_l \subset W_n^{-1} W_{n+1} W_l \subset \overline{W_n^{-1} W_{n+1} W_{n+2}}$ для усіх $m \ge k$. Для таких чисел m справджується включення $K_X \times K_Y \subset F_{n,m}$, з якого випливає, що $\bar{g}_{n,m}(K_X \times K_Y) = g_{n,m}(K_X \times K_Y) \subset g_n(K_X \times K_Y) \cdot W_l \subset W$. Тому $\bar{g}_{n,m} \in [K_X \times K_Y, W]$ і послідовність $(\bar{g}_{n,m})_{m\in\omega}$ збігається до g_n у просторі $S(X \times Y, Z)$.

Для довільних $n, m \in \omega$ розглянемо неперервну функцію $f_{n,m} = g_{0,m} \cdots g_{n,m} : X \times Y \to Z$ і зауважимо, що $\lim_{m\to\infty} f_{n,m} = g_0 \cdots g_n = f_{n+1}$ для усіх $n \in \omega$. Повторюючи міркування із доведення теореми 2, можна перевірити, що послідовність $(f_{n,n})_{n\in\omega}$ прямує до f у просторі $S(X \times Y, Z)$. Тому $f \in \bar{C}^s(X \times Y, Z)$ і множина $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ –

замкнена у топології рівномірної збіжності τ_l. Аналогічно доводиться замкненість цієї множини у топології τ_r на $S(X \times Y, Z)$.

Із $(\tau_l \cap \tau_r)$-замкненості множини $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ та включення $S_0(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$ (доведеного у теоремі 2) випливає включення $\bar{S}_0^u(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$.

Зауваження 1. *Для компактів $X = Y = [0,1]$ замкненість множини $\bar{C}^s(X \times Y, \mathbb{R})$ у топології рівномірної збіжності на просторі $S(X \times Y, \mathbb{R})$ доведена в роботі [4].*

Із теореми 3 випливає два наслідки.

Наслідок 1. *Для нуль-вимірних сепарабельних метризовних просторів X, Y та довільної метризовної топологічної групи Z секвенціальне замикання $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ множини $C(X \times Y, Z)$ неперервних функцій у просторі $S(X \times Y, Z)$ є $(\tau_l \cap \tau_r)$-замкненим і тому $\bar{S}_0^u(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Із нуль-вимірності простору $X \times Y$ випливає, що кожна замкнена підмножина в $X \times Y$ є ретрактом простору $X \times Y$. Тому кожен топологічний простір є абсолютним екстензором для $X \times Y$, що дає можливість застосувати теорему 3.

Наслідок 2. *Для сепарабельних метризовних просторів X, Y та довільного локально опуклого лінійного метричного простору Z секвенціальне замикання $\bar{C}^s(X \times Y, Z)$ множини $C(X \times Y, Z)$ неперервних функцій у просторі $S(X \times Y, Z)$ є $(\tau_l \cap \tau_r)$-замкненим і тому $\bar{S}_0^u(X \times Y, Z) \subset \bar{C}^s(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Згідно з теоремою Дуґунджі [7], довільна опукла підмножина локально опуклого простору є абсолютним екстензором для довільного метризовного простору. Тому локально опуклий простір Z має базу (опуклих) околів нуля, що є абсолютними екстензорами для простору $X \times Y$. Це дає можливість застосувати теорему 3 і завершити доведення.

Зауважимо, що позитивна відповідь на "нуль-вимірну" частину Питання 1 випливала б з Наслідку 1 та позитивної відповіді на наступне запитання.

Питання 2. *Нехай X, Y – нуль-вимірні метризовні компакти. Чи є множина $S_0(X \times Y, \mathbb{R})$ нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з нуль-вимірним образом всюди щільною у просторі $S(X \times Y, \mathbb{R})$, наділеному топологією рівномірної збіжності $\tau_l = \tau_r$?*

Цю проблему можна еквівалентно переформулювати наступним чином.

Питання 3. *Чи для кожного нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ визначеному на добутку нуль-вимірних метризовних компактів X, Y існує нарізно неперервне відображення $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, образ якого $g(X \times Y)$ нуль-вимірний і $\sup_{(x,y) \in X \times Y} |f(x,y) - g(x,y)| \le 1$?*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Топологізація простору нарізно неперервних функцій // Карп. мат. публ. – 2013. – **5**, № 2. – С. 199–207.
2. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій та її застосування // Мат. Студії. – 2014. – **42**, № 2. – С. 129–133.
3. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій // Укр. мат. журн. (подано до друку).
4. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. Вісник НТШ. – 2013. – **10**. – С.135–158.
5. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів та його бочковість // Мат. Вісник НТШ. – 2014. – **11**. – С. 36–50.
6. *Arhangel'skii A., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. – Atlantis Studies in Mathematics, 1. Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
7. *Dugundji J.* An extension of Tietze's theorem // Pacific J. Math. – 1951. – **1**. P. 353–367.
8. *Engelking R.* General Topology. – Heldermann Verlag, Berlin, 1989.