УДК 517.95

©2015 р. Я.О. Баранецький

Національний університет "Львівська політехніка"

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕРЕГУЛЯРНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

В роботі вивчаються властивості розв'язків крайової задачі з нерегулярними умовами для диференціально-операторних рівнянь.

The paper deals with the properties of solutions of boundary problems with nonregular conditions for differential-operator equations.

Нехай $W_2^2(0,1) \equiv \{y \in L_2(0,1) : y' \in L_2(0,1),\ y'' \in L_2(0,1)\}$, $\|y; W_2^2(0,1)\|^2 \equiv \|y; L_2(0,1)\|^2 + \|y'; L_2(0,1)\|^2 + \|y''; L_2(0,1)\|^2$;

H— сепарабельний гільбертовий простір, $H_1 \equiv L_2((0,1); H)$, $\|y; H_1\| \equiv \|\|y, H\|; L_2(0,1)\|$, D_t— сильна похідна в H_1;

$A : H \to H$ —щільно визначений оператор, суттєво несамоспряжений [1], з власними значеннями $z_k = Mk^s$, $M > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $s \in \mathbb{R}, s > 0$, та векторами $v_k^j \in H$, кореневими в сенсі :$Av_k^0 = z_k v_k^0$, $Av_k^j = z_k v_k^j + z_k^{j-1} v_k^{j-1}$, $|z_k^{j-1}| \leq M_1 k^s$, $j = 1, 2, \ldots, m_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

Система $V(A) = \{v_k^j \in H, j = 0, 1, \ldots, m_k, k = 1, 2, \ldots, \}$ утворює базис Рісса [1,2, 9, 11] в просторі H;

$H_2 \equiv \{u \in H_1, Au \in H_1, D_t^2 u \in H_1\}$, $||u, H_2||^2 \equiv ||u, H_1||^2 + ||Au, H_1||^2 + ||D_t^2 u, H_1||^2$.

Дослідження спектральних властивостей задач з нерегулярними умовами мають давню історію [1-9].

В даній роботі, використовуючи результати публікацій [11, 12], досліджено спектральні властивості нерегулярної суттєво несамоспряженої задачі для диференціального рівняння другого порядку з операторними коефіцієнтами. Зокрема, визначено спектр, побудовано систему кореневих векторів задачі, встановлено її повноту та базисність за Абелем [13]. В явному вигляді побудовано та встановлено умови збіжності розв'язків відповідних напіводнорідних задач.

Розглянемо спектральну задачу

$$-D_t^2 u(t) + Au(t) = \mu u(t), \tag{1}$$

$$t \in (0,1),\ \mu \in \mathbb{C},$$

$$\begin{cases} \ell_1 u \equiv u(0) + u(1) = 0 \\ \ell_2 u \equiv \sum_{j=0}^{1} \alpha_j (D_t^j u(0) - D_t^j u(1)) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Введемо в розгляд оператор задачі

$L(\alpha_0, \alpha_1) : H_1 \to H_1$; $D(L(\alpha_0, \alpha_1)) \equiv \{v \in H_2 : \ell_1 v = 0,\ \ell_2 v = 0\}$.

Припущення на оператор A, зазначені вище, дозволяють визначити [11, стор. 157–169] дробові степені A^β, $\beta \geq 0$ цього оператора та простори

$H(A^\beta) \equiv \{v \in H : A^\beta v \in H\}$,
$\|v; H(A^\beta)\|^2 \equiv \|v; H\|^2 + \|A^\beta v; H\|^2$.
$H_3 \equiv \{v(t) \in H : D_t v(t) \in H\}$,
$\|v(t); H_3\|^2 \equiv \|v(t), H_1\|^2 + \|D_t v(t); H_1\|^2$.

Розв'язком задачі (1), (2) будемо називати функцію $u \in H_2$, яка справджує рівняння (1) в сенсі рівності в просторі H_1 та граничні умови (2) в сенсі рівностей в просторах $H(A^{3/4}), H(A^{1/4})$ відповідно.

Побудуємо розв'язки $u(t) \in H_2$ задачі (1), (2) у вигляді добутку

$$u(t) = y(t) v_k^0,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Для визначення невідомої функції $y(t) \in W_2^2(0,1)$ отримаємо спектральну задачу

$$-D_t^2 y(t) + z_k y(t) = \mu y(t), \tag{3}$$

$t \in (0,1)$, $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} y(0)+y(1)=0, \\ \sum_{j=0}^{1} \alpha_j (D_t^j y(0) - D_t^j y(1)) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\omega^2 = z_k - \mu$.

Фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$-D_t^2 y(t) = \omega^2 y(t), \quad t \in (0,1) \qquad (5)$$

визначимо співвідношеннями

$$Y_0(t,\omega) \equiv e^{i\omega t} + e^{i\omega(1-t)},\ t \in (0,1),$$

$$Y_1(t,\omega) \equiv e^{i\omega t} - e^{i\omega(1-t)},\ t \in (0,1). \qquad (6)$$

Загальний розв'язок рівняння (5) можна подати лінійною комбінацією функцій (6)

$$y(t,\omega) = C_0 Y_0(t,\omega) + C_1 Y_1(t,\omega),$$

$$C_0,\, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Підставивши цей розклад в граничні умови (4), для визначення невідомих коефіцієнтів C_0 та C_1, отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо визначник матриці коефіцієнтів системи

$\Delta(\omega) \equiv$

$$\det \begin{pmatrix} 2\alpha_0(1+e^{i\omega}) & 2\alpha_1 i\omega(1+e^{i\omega}) \\ 0 & 2(1-e^{i\omega}) \end{pmatrix}$$

та характеристичне рівняння

$$\Delta(\omega) \equiv 4\alpha_0(1-e^{i2\omega}) = 0. \qquad (7)$$

Зауважимо, що у випадку $\alpha_0 = 0$ граничні умови (4) набувають вигляду

$$\begin{cases} y(0)+y(1)=0, \\ y'(0)-y'(1)=0. \end{cases}$$

Ці граничні умови є виродженими [7] та нерегулярними за Біркгофом [2, стор. 67].

Кожне число $\omega \in \mathbb{C}$, є коренем рівняння (7), якому відповідають власне значення $\mu = -\omega^2 + z_k, k = 1,2,\dots$, задачі (1),(2) та власна функція $(e^{i\omega t} - e^{i\omega(1-t)})v_k^0$, $k = 1,2,\dots$.

У випадку $\alpha_0 \neq 0$ рівняння (7) має корені $\omega_n = \pi n$, $n = 1,2,\dots$. Тому, фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (3) можна задати співвідношеннями

$$Y_{0,n}(t) = \sqrt{2}\cos \pi n t, n = 1,2,\dots$$

$$Y_{1,n}(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t, n = 1,2,\dots .$$

При цьому задача (5), (4) має власні значення $\pi^2 n^2$, $n = 1,2,\dots$, а задача (3), (4)– $z_k + \pi^2 n^2$, $n = 1,2,\dots$.

Побудуємо власні функції задачі (3), (4) у вигляді суми

$$y_n(t) = \sqrt{2}(\sin \pi n t + \gamma_n \cos \pi n t),\ \gamma_n \in \mathbb{R},$$

$n = 1,2,\dots$.

Підставляючи попередню рівність в граничні умови (4),знаходимо невідомі параметри γ_n :

$$\gamma_n = \begin{cases} 0,\ n = 2q, q = 1,2,\dots, \\ -\dfrac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}(2q-1),\ n = 2q-1, \\ q = 1,2,\dots . \end{cases}$$

Отже, задача (3), (4) має систему $V(\alpha_0,\alpha_1)$ власних функцій

$$v_{2q}(t,\alpha_0,\alpha_1) = \sqrt{2}\sin 2\pi q t,$$

$$v_{2q-1}(t,\alpha_0,\alpha_1) = \sqrt{2}\sin \pi(2q-1)t -$$

$$-\sqrt{2}\frac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}\cos \pi(2q-1)t,$$

$q = 1,2,\dots$.

Кореневі функції задачі (1), (2) визначаємо співвідношеннями

$$u(t) = y(t) v_k^j, \quad y(t) \in W_2^2(0,1),$$

$j = 1,2,\dots,m_k,\ k = 1,2,\dots$.

Для знаходження невідомої функції $y(t)$ отримаємо спектральну задачу (3), (4), розв'язками якої є елементи системи $V(\alpha_0,\alpha_1)$.

Отже, задача (1), (2) має власні значення

$$\mu_{n,k} \equiv \pi^2 n^2 + z_k, \quad n,k = 1,2,\dots, \qquad (8)$$

яким відповідає система $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ кореневих функцій оператора $L(\alpha_0,\alpha_1) : H_1 \to H_1$.

$$v_{2q,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) = \sqrt{2}\sin 2\pi qt\nu_k^j,$$

$$v_{2q-1,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) = \sqrt{2}\nu_k^j\cdot$$

$$(\sin(2q-1)\pi t - \frac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}(2q-1)\cos(2q-1)\pi t),$$
$$j = 0,1,\dots,m_k,\ q,k = 1,2,\dots$$

в сенсі рівностей

$$L(\alpha_0,\alpha_1)v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) \equiv$$

$$\mu_{n,k}v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) + z_k^{j-1}v_{n,k}^{j-1}(t, L(\alpha_0,\alpha_1)),$$
$$j = 1,2,\dots,\ m_k,\ \ k = 1,2,\dots .$$

Зауваження 1. *Множини власних значень кожного із операторів $L(\alpha_0,\alpha_1)$, $\alpha_0 \neq 0$, α_0, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ співпадають з точковим спектром оператора $L(0,1)$.*

Такі оператори будемо називати ізоспектральними.

Побудуємо систему, яка є біортогональною в просторі H_1 до системи $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$.

Нехай $W(A) \equiv$

$$\left\{w_q^s \in H : s = 0,1,\dots,m_q, q = 1,2,\dots\right\}$$

— система біортогональна в просторі H до системи $V(A)$ в сенсі

$$(v_k^j, w_p^s; H) = \delta_{k,p}\delta_{j,s},$$

$j = 0,1,\dots,m_k$, $s = 0,1,\dots,m_q$, $k,q = 1,2,\dots$.

Визначимо з крайових умов (4) значення $y(0)$ та $y(1)$:

$$y(1) = -y(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}(y'(0) - y'(1)).$$

Підставляючи ці вирази у співвідношення

$$(-y'(t)w(t) + y(t)w'(t))\ |_{t=0}^{t=1} = 0,$$

визначаємо граничні умови, які є спряженими до граничних умов (4).

Легко переконатись, що спряжена спектральна задача

$$-D_t^2 w(t) = \mu w(t),\ t \in (0,1),\ \mu \in \mathbb{C},$$

$$\begin{cases} w(0) - w(1) = 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{1} \alpha_j(D_t^j w(0) + D_t^j w(1)) = 0, \end{cases}$$

$\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$,

має власні значення $\pi^2 n^2$, $n = 1,2,\dots$, та відповідні власні функції

$$w_n(t,\alpha_0,\alpha_1) =$$
$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin n\pi t, n = 2r-1, \\ \sqrt{2}\sin n\pi t - \sqrt{2}\dfrac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}\cos n\pi t,\ n = 2r, \end{cases}$$
$$r = 1,2,\dots,$$

що утворюють систему $W(\alpha_0,\alpha_1)$, яка є біортогональною до системи $V(\alpha_0,\alpha_1)$ в просторі $L_2(0,1)$.

Можна перевірити, що біортогональною до системи $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ в просторі H_1 буде система

$$W(L(\alpha_0,\alpha_1)) \equiv \left\{w_{p,q}^s(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) \in H_1\right.$$
$$\left. : w_{p,q}^s(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) \equiv w_p(t, L(\alpha_0,\alpha_1))w_q^s\right\},$$

$s = 0,1,\dots,m_q$, $q,p = 1,2,\dots$.

Тому, система $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ є мінімальною в просторі H_1.

Використовуючи методику роботи [11, стор. 131], доходимо висновку , що ця система $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ повна (тотальна) в просторі H_1.

Оскільки власні значення $\mu_{n,k} \equiv \pi^2 n^2 + z_k, n, k = 1,2,\dots$, оператора $L(\alpha_0,\alpha_1)$ є дійсними числами та, після перенумерування в порядку зростання, мають асимптотику росту $(2^{-1} + s^{-1})^{-1}$, то за теоремою В.Б. Лідського [13], система $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ є сумованою методом Абеля.

При $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ маємо частковий випадок задачі (1), (2)

$$-D_t^2 u(t) + Au(t) = \mu u(t),\quad \mu \in \mathbb{C},\ t \in (0,1),$$

$$\begin{cases} u(0) + u(1) = 0, \\ u(0) - u(1) = 0. \end{cases}$$

Власним значенням (8) оператора $L(1,0)$ цієї задачі відповідають власні та кореневі функції

$$v_{n,k}^j(t, L(1,0)) = \sqrt{2}\sin\pi nt v_k^j, \tag{9}$$

$j=0,1,\dots,m_k,\ k,n=1,2,\dots$.

Система (9) є добутком тригонометричної системи $T\equiv\{\sqrt{2}\sin\pi nt,\ n=1,2,\dots\}$, яка є ортонормованим базисом простору $L_2(0,1)$ та системи $V(A)$, яка за припущенням є базисом Рісса простору H. Тому, згідно теореми Н. К. Барі [10] , ця система є базисом Рісса простору H_1 , та існують такі дійсні числа $C_1>0$, $C_2>0$, що для будь-якого елемента $h\in H_1$ виконуються нерівності

$$C_1\|h;H_1\|^2\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}(f;v_{n,k}^j(t,L(1,0));H_1)^2 \le C_2\|h;H_1\|^2, \tag{10}$$

$$C_1\|h;H_1\|^2\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}(h;w_{n,k}^j(t,L(1,0));H_1)^2 \le C_2\|h;H_1\|^2.$$

Отже, справджується

Теорема 1. *1).При $\alpha_0=0$ граничні умови задачі* (1), (2) *є виродженими і будь-яке комплексне число є власним значенням.*

2). При $\alpha_0=1,\alpha_1=0$ система кореневих функцій $V(L(1,0))$ оператора $L(1,0)$ є базисом Рісса в просторі H_1.

3). У випадку $\alpha_0\ne 0$ система кореневих функцій $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$ оператора $L(\alpha_0,\alpha_1)$ – повна і мінімальна в просторі H_1 та сумована методом Абеля.

4). У випадку $\alpha_0\ne 0$ оператори $L(\alpha_0,\alpha_1)$ є ізоспектральними ($\alpha_0,\ \alpha_1\in\mathbb{R}$).

Розглянемо неоднорідну граничну задачу, породжену рівнянням

$$-D_t^2u(t)+Au(t)=f(t),\ t\in(0,1) \tag{11}$$

та граничними умовами (2).

Розв'язком задачі (11), (2) будемо називати функцію $u\in H_2$, яка справджує рівняння (11) в сенсі рівності в просторіH_1 та граничні умови (2) в сенсі рівностей в просторах $H(A^{3/4})$, $H(A^{1/4})$ відповідно.

Теорема 2. 1). *Нехай $\alpha_0=1,\ \alpha_1=0$. Тоді для будь-якої функції $f(t)\in H_1$ існує єдиний розв'язок задачі* (11), (2) *та справджується нерівність*

$$\|u;H_2\|\le C\|f;H_1\|.$$

2). У випадку $\alpha_1\ne 0$ для будь-якої функції $f(t)\in H_3$ існує єдиний розв'язок задачі та справджується нерівність

$$\|u;H_2\|\le C\|f;H_3\|.$$

Доведення. Побудуємо формальний розв'язок задачі (11), (2).

Розвинемо функції $u(t)$ та $f(t)$ в ряд Фур'є за системою $V(L(\alpha_0,\alpha_1))$:

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}u_{n,k}^j v_{n,k}^j(t,L(\alpha_0,\alpha_1)),$$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}f_{n,k}^j v_{n,k}^j(t,L(\alpha_0,\alpha_1)), \tag{12}$$

$$u_{n,k}^j=(u,w_{n,k}^j(t,L(\alpha_0,\alpha_1);H_1),$$

$$f_{n,k}^j=(f,w_{n,k}^j(t,L(\alpha_0,\alpha_1);H_1),$$

$$j=0,1,\dots,m_k,k,\ n=1,2,\dots .$$

Для визначення невідомих $u_{n,k}^j,(j=0,1,\dots,m_k,k,\ n=1,2,\dots)$ отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered}(\pi^2n^2+z_k)u_{n,k}^{m_k}=f_{n,k}^{m_k},\\ (\pi^2n^2+z_k)u_{n,k}^{m_k-1}+z_k^{m_k}u_{n,k}^{m_k}=f_{n,k}^{m_k-1},\\ (\pi^2n^2+z_k)u_{n,k}^{m_k-2}+z_k^{m_k-1}u_{n,k}^{m_k-1}=f_{n,k}^{m_k-2},\\ (\pi^2n^2+z_k)u_{n,k}^{0}+z_k^{1}u_{n,k}^{1}=f_{n,k}^{0},\end{gathered} \tag{13}$$

$k,n=1,2,\dots$.

Послідовно розв'язуючи систему (13), знаходимо невідомі коефіцієнти Фур'є

$$u_{n,k}^{m_k}=(\pi^2n^2+z_k)^{-1}f_{n,k}^{m_k},k,n=1,2,\dots,$$

$$u_{n,k}^{m_k-1}=(\pi^2n^2+z_k)^{-1}f_{n,k}^{m_k-1}-(\pi^2n^2+z_k)^{-2}z_k^{m_k}f_{n,k}^{m_k},$$

$$u_{n,k}^{j}=\sum_{s=0}^{m_k-j}\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\theta_k^s f_{n,k}^{s+j},$$

$j=0,1,\dots,m_k,$

$$u_{n,k}^{0}=\sum_{s=0}^{m_k}\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\theta_k^s f_{n,k}^{s},$$

$$\theta_k^s = \begin{cases} \prod_{p=1}^{s} z_k^{m_k+1-p}, s>0, k=1,2,\ldots, \\ 1,\ s=0. \end{cases}$$

Отже,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\cdot$$

$$\theta_k^s f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)),$$

$-D_t^2 u(t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \frac{\pi^2n^2}{s!}\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\cdot$$

$$\theta_k^s f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)),$$

$$Au(t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \frac{1}{s!}\frac{d^s}{dz^s}(\frac{z}{\pi^2n^2+z})\mid_{z=z_k}\cdot$$

$$\theta_k^s f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)).$$

Позначимо

$$\beta_{n,k}^{0,s} \equiv \frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\ \theta_k^s,$$

$$\beta_{n,k}^{1,s} \equiv \frac{1}{s!}\pi^2n^2\frac{d^s}{d\mu^s}(\mu)^{-1}\mid_{\mu=\pi^2n^2+z_k}\ \theta_k^s, \qquad (14)$$

$$\beta_{n,k}^{2,s} \equiv \frac{1}{s!}\frac{d^s}{dz^s}(\frac{z}{\pi^2n^2+z})\mid_{z=z_k}\ \theta_k^s,$$

$s=0,1,\ldots,m_k,\ n,k=1,2,\ldots$.

Числа $\beta_{n,k}^{r,s}$, $r=0,1,2,\ s=0,\ldots,m_k$, $n,k=1,2,\ldots$, що визначаються співвідношеннями (14) є обмеженими, тоді

$$|\beta_{n,k}^{r,s}| \le C_3 < \infty, \qquad (15)$$

$r=0,1,2,\ s=0,\ldots,m_k,\ n,k=1,2,\ldots$.

Згідно позначень (14), отримаємо

$u(t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \beta_{n,k}^{0,s} f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t; L(\alpha_0,\alpha_1)), \qquad (16)$$

$-D_t^2 u(t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \beta_{n,k}^{1,s} f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)), \qquad (17)$$

$Au(t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j} \beta_{n,k}^{2,s} f_{n,k}^{j+s} v_{n,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)). \qquad (18)$$

Дослідимо збіжність рядів (16) – (18) за умови $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$.

Згідно оцінок (10), (15), одержимо

$$\|u; H_1\|^2 \le (C_1)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\left(\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta_{n,k}^{0,s} f_{n,k}^{j+s}; H_1\right)^2$$

$$\le (C_1)^{-1}(C_3)^2 C_4 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}(f_{n,k}^j; H_1)^2,$$

$m_k + 1 \le C_3 < \infty, k=1,2,\ldots$.

Отже,

$$\|u; H_1\|^2 \le C_5\|f; H_1\|^2,\ C_5 = (C_1)^{-1}(C_3)^2 C_4. \qquad (19)$$

Аналогічно,

$$\|D_t^2 u; H_1\|^2 \le (C_1)^{-1}\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\left(\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta_{n,k}^{1,s} f_{n,k}^{j+s}; H_1\right)^2 \le C_5\|f; H_1\|^2,$$

$$\|Au; H_1\|^2 \le (C_1)^{-1}\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\left(\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta_{n,k}^{2,s} f_{n,k}^{j+s}; H_1\right)^2 \le C_5\|f; H_1\|^2.$$

Враховуючи означення норми в просторі H_2 з попередніх нерівностей отримуємо оцінку

$$\|u; H_2\| \le C_6\|f; H_1\|,\ C_6 = \sqrt{3C_5}. \qquad (20)$$

Отже, теорема 2 встановлена для випадку $\alpha_1 = 0, \alpha_0 = 1,\ f \in H_1$. Для цього випадку справджується нерівність (20).

Нехай $\alpha_1 \ne 0,\ f(t) \in H_3$. Розглянемо елементи ряду (12) :

$f_{2q,k}^j v_{2q,k}^j(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) =$

$$(f, \sqrt{2}\sin 2q\pi t w_k^j; H_1)\sqrt{2}\sin 2q\pi t v_k^j -$$

$$\frac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}2q(f, \sqrt{2}\cos 2q\pi t w_k^j; H_1)\sqrt{2}\sin 2q\pi t v_k^j,$$

$j=0,1,\ldots,m_k,\ q,k=1,2,\ldots$.

Враховуючи формулу інтегрування частинами

$$\left(f, (1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t)\sqrt{2}\sin 2q\pi t; L_2(0,1)\right) = \left((1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t)f, \sqrt{2}\sin 2q\pi t; L_2(0,1)\right),$$

отримаємо

$$f^j_{2q,k}v^j_{2q,k}(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) = \left((1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t)f, w^j_{2q,k}(t, L(1,0)); H_1\right)\cdot v^j_{2qk}(t, L(1,0)). \tag{21}$$

Аналогічно

$$f^j_{2q-1,k}v^j_{2q-1,k}(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) = (f, \sqrt{2}\sin(2q-1)\pi t w^j_k; H_1)\sqrt{2}\sin(2q-1)\cdot \pi t v^j_k - \frac{\pi\alpha_1}{\alpha_0}(2q-1)\cdot (f, \sqrt{2}\sin(2q-1)\pi t w^j_k; H_1)\cdot \sqrt{2}\cos(2q-1)\pi t v^j_k.$$

Отже,

$$f^j_{2q-1,k}v^j_{2q-1,k}(t, L(\alpha_0,\alpha_1)) = \left(f, w^j_{2q-1,k}(t, L(1,0)); H_1\right)\cdot \left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t\right)v^j_{2q-1,k}(t, L(1,0)). \tag{22}$$

Подамо формальний розв'язок задачі (11), (2) у вигляді суми $u(t) = u_0(t) + u_1(t)$, де

$$u_r(t) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta^{0,s}_{2q+r,k}f^{j+s}_{2q+r,k}\cdot v^j_{2q+r,k}(t, L(\alpha_0,\alpha_1)),\ r=0,1.$$

Приймаючи до уваги співвідношення (21) (22), отримаємо розвинення функцій $u_0(t)$, $u_1(t)$ в ряди за системою $V(L(1,0))$:

$$u_0(t) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta^{0,s}_{2q,k}\cdot \left(\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t\right)f, w^{j+s}_{2q,k}(t, L(1,0)); H_1\right)\cdot v^j_{2q,k}(t, L(1,0)),$$

$$u_1(t) = \left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t\right)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_k}\sum_{s=0}^{m_k-j}\beta^{0,s}_{2q,k}\cdot \left(f, w^{j+s}_{2q-1,k}(t, L(1,0); H_1\right)v^j_{2q-1,k}(t, L(1,0)).$$

Скориставшись нерівністю (19), отримаємо оцінки

$$\|u_0; H_1\|^2 \le C_5\left\|\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t\right)f; H_1\right\|^2 \le C_5\left(1+|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}|\right)^2\|f; H_3\|^2,$$

$$\|u_1; H_1\|^2 \le C_5\left\|\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}D_t\right)f; H_1\right\|^2 \le C_5\left(1+|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}|\right)^2\|f; H_3\|^2,$$

$$\|u; H_1\|^2 \le C_7(\alpha_0,\alpha_1)\|f; H_3\|^2, \tag{23}$$

$$C_7(\alpha_0,\alpha_1) = 2C_5\left(1+\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right|\right)^2.$$

Аналогічні оцінки справджуються для функцій $Au(t)$ та $D^2_t u(t)$.

Із нерівностей (23) та означення норми простору H_2 , отримаємо оцінку розв'язку задачі (11), (2)

$$\|u; H_2\| \le C_8(\alpha_0,\alpha_1)\|f; H_3\|^2, \tag{24}$$

$$C_8(\alpha_0,\alpha_1) = \sqrt{3C_7(\alpha_0,\alpha_1)}.$$

Теорема доведена.

Нехай H^1, H^2– гільбертові простори. Введемо простори $L(H^1,H^2)$ — лінійних обмежених операторів $S : H^1 \to H^2$ з нормою $\|S; L(H^1,H^2)\| < \infty$ та $L(H^1)$ — з нормою $\|S; L(H^1)\| < \infty$, якщо $H^2 = H^1$.

При $s < 0$ визначимо оператор A^s на елементах системи $V(A)$ співвідношеннями

$$A^s v^j_k = \sum_{r=0}^{j}\frac{1}{r!}\frac{d^r}{d\mu^r}(\mu^s)\big|_{\mu=z_k}\rho^r_k v^{j-r}_k,$$

$j = 0,1,m_k$, $m,k = 1,2,\ldots$,
$\rho^r_k \equiv z^0_k z^1_k \ldots z^{r-1}_k$, $\rho^0_k = 1$.

Оскільки числа $\left|\frac{1}{r!}\frac{d^r}{d\mu^r}(\mu^s)\big|_{\mu=z_k}\rho^r_k\right|$ є обмеженими, то простір $H(A^s)$ можна визначити як замикання за нормою простору H скінченних сум $\sum_k\sum_j(z_k)^s h^j_k v^j_k$.

Розглянемо граничну задачу

$$-D^2_t u(t) + Au(t) = 0,\ t\in(0,1) \tag{25}$$

$$\begin{cases} u(0)+u(1) = g_0, \\ \sum_{j=0}^{1}\alpha_j(D^j_t u(0) - D^j_t u(1)) = g_1, \end{cases} \tag{26}$$

$g_o \in H(A^{3/4})$, $g_1 \in H(A^{1/4})$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2$.

Нехай
$Y_0(t) \equiv e^{-\sqrt{A}t} + e^{-\sqrt{A}(1-t)}$,
$Y_1(t) \equiv e^{-\sqrt{A}t} - e^{-\sqrt{A}(1-t)}$

фундаментальна система розв'язків рівняння (25) [4, 11].

Загальний розв'язок $u(t) \in H_2$ рівняння (25) подамо у вигляді суми [див. 11]

$$u(t) = Y_0(t,A)h_0 + Y_1(t,A)h_1, \qquad (27)$$

де $h_0, h_1 \in H(A^{3/4})$ — невизначені елементи.

Підставивши праву частину рівності (27) в граничні умови (26), отримаємо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} 2(E+e^{-\sqrt{A}})h_0 = g_0, \\ 2(E-e^{-\sqrt{A}})(\alpha_0 h_1 + \alpha_1\sqrt{A}h_0) = g_1. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо невідомі h_0 та h_1. $h_0 = \frac{1}{2}(E+e^{-\sqrt{A}})^{-1}g_0$,

$$h_1 = \frac{1}{2\alpha_0}(E-e^{-\sqrt{A}})^{-1}g_1 - \qquad (28)$$

$\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_0}(E+e^{-\sqrt{A}})^{-1}\sqrt{A}g_0.$

У випадку $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = 1$ співвідношення (28) набувають вигляду

$$h_0 = \frac{1}{2}(E+e^{-\sqrt{A}})^{-1}g_0, h_1 = \frac{1}{2}(E-e^{-\sqrt{A}})^{-1}g_1.$$

Враховуючи означення норми простору H_2 та неперервність операторнозначних функцій $Y_r(t,A) : H(A^{3/4}) \to H_2$, $Y_r(t,A) : H(A^{1/4}) \to H_1$ та операторів $e^{-\sqrt{A}} : H(A^s) \to H(A^s)$, $s \in \mathbb{R}$, [11] в припущенні, що $g_0, g_1 \in H(A^{3/4})$, отримуємо оцінки для розв'язку

$$\|u; H_1\|^2 \leq$$

$C_9 \left(\left\|g_0; H(A^{3/4})\right\|^2 + \left\|g_1; H(A^{3/4})\right\|^2 \right),$

$C_9 = 2\max_r \left\{ \left\|Y_r(t,A); L(H(A^{3/4}); H_2)\right\|^2 \cdot \right.$
$\left. \left\| \left(E + (-1)^r e^{-\sqrt{A}}\right)^{-1}; L(H(A^{3/4})) \right\|^2 \right\},$

$$\|Au; H_1\|^2 = \|D_t^2 u; H_1\|^2 \leq C_{10}\cdot$$

$\left(\left\|g_0; H(A^{3/4})\right\|^2 + \left\|g_1; H(A^{3/4})\right\|^2 \right),$

$C_{10} = 2\max_r \left\{ \left\|Y_r(t,A); L(H(A^{-1/4}); H_1)\right\|^2 \right.$
$\left. \cdot \left\| \left(E + (-1)^r e^{-\sqrt{A}}\right)^{-1}; L(H(A^{-1/4})) \right\|^2 \right\}.$

Приймаючи до уваги означення норми простору H_2, з останніх оцінок отримаємо нерівність

$\|u; H_2\|^2 \leq C_{11}\cdot$

$$\left(\left\|g_0; H(A^{3/4})\right\|^2 + \left\|g_1; H(A^{3/4})\right\|^2 \right), \qquad (29)$$

Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Припустимо, що $g_0 \in H(A^{5/4})$, $g_1 \in H(A^{3/4})$. Враховуючи рівності (28), маємо

$\left\|h_0; H(A^{3/4})\right\| \leq \frac{1}{2}\cdot$

$\left\|(E+e^{-\sqrt{A}})^{-1}; L(H(A^{3/4}))\right\| \left\|g_0; H(A^{3/4})\right\|,$

$\left\|h_1; H(A^{3/4})\right\| \leq$

$\dfrac{1}{2|\alpha_0|} \left\|(E-e^{-\sqrt{A}})^{-1}; L(H(A^{3/4}))\right\| \cdot$

$\left\{ \left\|g_1; H(A^{3/4})\right\| + |\alpha_1| \left\|\sqrt{A}g_0; H(A^{3/4})\right\| \right\}.$

Використовуючи методику встановлення оцінки (29), отримуємо нерівність

$$\|u; H_2\|^2 \leq C_{12}(\alpha_0, \alpha_1)\cdot$$

$$\left(\left\|g_0; H(A^{5/4})\right\|^2 + \left\|g_1; H(A^{3/4})\right\|^2 \right). \qquad (30)$$

Отже, доведена

Теорема 3.

1). Нехай $\alpha_1 = 0, \alpha_0 = 1$. *Тоді для будь-яких елементів* $g_0, g_1 \in H(A^{3/4})$ *існує єдиний розв'язок відповідної задачі* (25), (26) *та виконується нерівність* (29).

2). У випадку $\alpha_1 \neq 0$ *для будь-яких елементів* $g_0 \in H(A^{5/4}), g_1 \in H(A^{3/4})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (25), (26) *та виконується нерівність* (30).

Зауваження 2. *Нехай* $g_0 = 0$, $g_1 \neq 0$. *Тоді із рівностей* (28) *маємо*

$$h_0 = 0, \; h_1 = \frac{1}{2\alpha_0}(E+e^{-A})^{-1}g_1.$$

Для розв'язку задачі отримуємо оцінку вигляду (29)

$$\|u; H_2\| \leq C(\alpha_0)\|g_1; H(A^{3/4})\|.$$

Нехай $g_1 = 0$, $g_0 \neq 0$. *Тоді зі співвідношень* (28) *одержимо*

$$h_0 = \frac{1}{2}(E + e^{-A})^{-1} g_0,$$

$$h_1 = -\frac{\alpha_1}{4\alpha_0}(E + e^{-A})^{-1}(E + e^{-A})^{-1}\sqrt{A} g_0.$$

Для розв'язку задачі отримуємо нерівність вигляду (30)

$$\|u; H_2\| \leq C(\alpha_0, \alpha_1)\|g_0; H(A^{5/4})\|.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Современ. проблемы математики . М.,2006. — Т.96. — С. 6—105.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969. — 526 с.

3. *Шкаликов А.А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями //Функ. анализ и его приложения. — 1976. — Т. 10, вып. 4. — С. 69–80.

4. *Якубов Я. С.* Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. — Баку : Элм., 1985. — 220 с.

5. *Сильченко Ю.Т.* Об оценке резольвенты дифференциального оператора второго порядка с нерегулярными граничными условиям // Изв. вузов. Математика. — 2000. —**453**, № 2. — С. 65–68.

6. *Будаев В. Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Москва, 1983.— 22 с.

7. *Макин А.С.* Об одном классе существенно несамосопряженных краевых задач // Докл. АН. — 2014. — Т. 456. — С. 502–522.

8. *Макин А.С.* О полноте корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 835–838.

9. *Макин А.С.* О равносходимости по системе корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. — 2012.— Т. 48, № 8. — С. 1196–1200.

10. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

11. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. К.: Наук.думка, 1983. — 230 с.

12. *Баранецький Я. О., Баша А.А.* Нелокальна багатоточкова задача для диференціально-операторних рівнянь порядку 2n // Мат. методи та фіз.-мех.поля. — 2014.—**57**, № 3.— С. 37–44.

13. *Лидский В.Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды Москов. мат. общества. — 1962.— Т. 11. — С. 3–35.