УДК 517.956.4

©2015 р. О.Г. Возняк[1], С.Д. Івасишен[2,4], І.П. Мединський[3,4]

[1]Тернопільський національний економічний університет,
[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",
[3]Національний університет "Львівська політехніка",
[4]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова із залежними від частини просторових змінних коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині побудовано класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші й одержано оцінки його похідних та їх приростів.

The classical fundamental solution of the Cauchy problem for a ultra-parabolic equation of Kolmogorov type with coefficients depend on part of spatial variables and with degenerations on the initial hyperplane is constructed. Estimates of one's derivatives and their differences are obtained.

Вступ. У працях [1–9] (див. також [10, с. 162–172]) розглядались рівняння вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)A(t,x,\partial_x) - a_0(t,x)\Big)u(t,x) = \\ = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

за таких припущень: α і β – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; диференціальний вираз $\partial_t - A(t,x,\partial_x) - a_0(t,x)$ рівномірно параболічний за Петровським чи за Ейдельманом, його коефіцієнти обмежені, неперервні за t і гельдерові за x у шарі $\Pi_{[0,T]}$. Ці рівняння мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta.$$

Так, у випадку, коли $A(T,0) < +\infty$, рівняння (1) мають слабке виродження, а коли $A(T,0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T,0) = +\infty$ і $B(T,0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

Для рівняння (1) не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайній постановці. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) як про таку функцію $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, що формула

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначає розв'язок однорідного рівняння (1), який задовольняє умову $u\big|_{t=\tau} = \varphi$ для будь-якого $\tau \in (0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

В указаних вище працях для рівняння (1) побудовано ФРЗК, встановлено його властивості, за допомогою яких досліджено коректну розв'язність рівнянь зі звичайними початковими умовами у випадку слабкого виродження і без початкових умов, якщо виродження сильне.

Ці результати узагальнено в працях [11–13] на випадок вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких не залежать від просторових змінних. Наведемо вигляд таких рівнянь для випадку однієї групи змінних виродження.

Нехай n, n_1 і n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2$. Вважаємо, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. В [11–13] розглянуто рівняння типу

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + A(t, \partial_{x_1})\big) - \\ -a_0(t) \Big) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2}$$

де $A(t, \partial_{x_1})$ – диференціальний вираз з неперервними на $[0, T]$ коефіцієнтами такий, що вираз $\partial_t - A(t, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським чи за Ейдельманом у шарі $\Pi^1_{[0,T]} := [0, T] \times \mathbb{R}^{n_1}$.

У цій статті ми робимо наступний крок в узагальненні вищезгаданих результатів, а саме будуємо ФРЗК для рівняння другого порядку типу (2), в якому коефіцієнти залежать не лише від t, але й від просторових змінних з основної групи x_1. Зазначимо, що для такого рівняння тільки без виродження на початковій гіперплощині побудовано класичний ФРЗК та одержано точні оцінки його похідних в статті [14].

1. Припущення та допоміжні твердження. Крім запроваджених у вступі позначень, використовуватимемо ще такі: $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$, $M := m_1 n_1 + m_2 n_2$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}$, $k := (k_1, k_2)$ і $x := (x_1, x_2)$, де $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2\}$;
$\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$,
$\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \{1, 2\}$,
$z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$;
$X(t, \tau) := (X_1(t, \tau), X_2(t, \tau))$, $X_1(t, \tau) := x_1$,
$X_2(t, \tau) := x_2 + B(t, \tau)\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2})$,
$Z^{(s)}(t, \tau) := X(t, \tau)\Big|_{x_s = z_s}$, $s \in \{1, 2\}$.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$Lu(t,x) := (S - A(t, x_1, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

де

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t)\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}},$$
$$A(t, x_1, \partial_{x_1}) := A_0(t, x_1, \partial_{x_1}) + A_1(t, x_1, \partial_{x_1}),$$
$$A_0(t, x_1, \partial_{x_1}) := \beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \\ + a_0(t, x_1),$$
$$A_1(t, x_1, \partial_{x_1}) := \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1)\partial_{x_{1j}}.$$

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями в $\Pi^1_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) вони є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t, x_1) \in \Pi^1_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x_1)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2;$$

2) вони є гельдеровими за x_1 у такому сенсі:

$$\exists\, H > 0 \;\; \exists\, \gamma \in (0,1) \;\; \forall \{(t, x_1), (t, z_1)\} \subset \Pi^1_{[0,T]} : \\ |\Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x_1)| \leq H|x_1 - z_1|^\gamma,$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0.

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^{(j)}(t, \tau, z_j) := \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-2j}|z_j|^2\}, \\ t > \tau, \; z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \; j \in \{1, 2\};$$
$$E_c(t, \tau, x, \xi) := E_c^{(1)}(t, \tau, X_1(t,\tau) - \xi_1) \times \\ \times E_c^{(2)}(t, \tau, X_2(t,\tau) - \xi_2), \;\; t > \tau, \; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n;$$
$$F_c(t, \tau, x, \xi) := \exp\{-c[(4B(t,\tau))^{-1}|x_1 - \xi_1|^2 + \\ + 3(B(t,\tau))^{-3}|x_2 + 2^{-1}B(t,\tau)(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2|^2]\}, \\ t > \tau, \; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$E_c^d(t, \tau, x, \xi) := E_c(t, \tau, x, \xi)E^d(t, \tau),$$
$$F_c^d(t, \tau, x, \xi) := F_c(t, \tau, x, \xi)E^d(t, \tau),$$
$$E^d(t, \tau) := \exp\{dA(t, \tau)\}, \\ t > \tau, \; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \; d \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $c > 0$.

Потрібні властивості цих функцій описуються в наступній лемі, яка доводиться аналогічно до леми 1 з [14].

Лема 1. *Функції* (4) *мають такі властивості :*

$$E_c(t,\tau,x,\xi) \le F_{c_1}(t,\tau,x,\xi) \le E_{c_2}(t,\tau,x,\xi),$$
$$t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<c_1<c; \quad (5)$$
$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_2 \le$$
$$\le C(B(t,\tau)^{-m_1n_1}E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$
$$t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \quad (6)$$
$$(B(t,\tau))^{-m_1n_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)d\xi_1 = C,$$
$$t>\tau,\quad x_1\in\mathbb{R}^{n_1}; \quad (7)$$
$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi = C,$$
$$t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}^{n}; \quad (8)$$
$$E_c^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1) \le$$
$$\le E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$
$$0<\tau<\theta<t,\quad \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \quad (9)$$
$$(B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E_c(t,\theta,x,\lambda)\times$$
$$\times E_c(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le C(B(t,\tau))^{-M}E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<\theta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n}; \quad (10)$$
$$|x_1-\xi_1|^\gamma E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1) \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{m_1\gamma}E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$
$$t>\tau,\quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \quad (11)$$
$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^\gamma E_c(t,\tau,x,\xi) \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{m_s\gamma}E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$
$$t>\tau,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n},\quad s\in\{1,2\}; \quad (12)$$
$$E_c(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi) \le E_c(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<\theta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n}; \quad (13)$$
$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi) \le E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$
$$\times E_{-c}^{(1)}(t,\theta,x_1-\xi_1)E_{c/2}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),$$
$$B(t,t_1)=B(t_1,\tau),\quad t_1<\theta<t,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n},\lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (14)$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0<c$.

2. Параметрикс та його властивості. Розглянемо рівняння

$$\Big(\ S - A_0(t,y_1,\partial_{x_1})\ \Big)\ u(t,x)=0,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (15)$$

з коефіцієнтами, залежними лише від t і параметра y_1. Для цього рівняння за умов **1** і **2** так само, як у [10–12], доводиться існування ФРЗК $G(t,x;\tau,\xi;y_1)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, для якого справджуються оцінки

$$|\partial_x^k\partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi;y_1)| \le C_{kl}(B(t,\tau))^{-M-M_{kl}}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi), \quad (16)$$
$$|\Delta_{y_1}^{z_1}\partial_x^k\partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi;y_1)| \le C_{kl}|y_1-z_1|^\gamma\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-M_{kl}}E_c^d(t,\tau,x,\xi). \quad (17)$$

У цих оцінках $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{y_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}$, $M_{kl}:=m_1(|k_1|+|l_1|)+m_2(|k_2|+|l_2|)$, $\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+^n$. Зауважимо, що для G правильні рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi = \exp\Big\{\int\limits_\tau^t \frac{a_0(\theta,y_1)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\},$$
$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi = 0,$$
$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} G(t,x;\tau,\xi;y_1)d\xi_2 = 0,$$
$$\partial_{x_{2j}}G(t,x;\tau,\xi;y_1) = -\partial_{\xi_{2j}}G(t,x;\tau,\xi;y_1),$$

в яких $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}\setminus\{0\}$, $j\in\{1,\dots,n_2\}$.

За параметрикс для рівняння (3) візьмемо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi):=G(t,x;\tau,\xi;\xi_1),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

властивості якої описуються у наступних лемах.

Лема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (15) *виконуються умови* ***1*** *і* ***2****. Тоді пра-*

вильні такі твердження:

$$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)| \le C_{k0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (18)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)| \le C_{ks}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-m_s\gamma_s^0}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (19)$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\,\Big|\le$$
$$\le C_k\,(B(t,\tau))^{-M_{k0}+m_1\gamma}\,E^d(t,\tau), \qquad (20)$$

$$\Big|\,\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\,\Big|\le C_{ks}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M_{k0}-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma}E^d(t,\tau), \qquad (21)$$

$$|SZ_0(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-1}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (22)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}SZ_0(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1-m_s\gamma_s^0}\,E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (23)$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\tau,\xi)d\xi\,\Big|\le$$
$$\le C\,(B(t,\tau))^{-1+m_1\gamma}E^d(t,\tau), \qquad (24)$$

$$\Big|\,\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\tau,\xi)d\xi\,\Big|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-1-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma}\,E^d(t,\tau), \qquad (25)$$

$$\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_0(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 = 0, \qquad (26)$$

$$\partial_{x_{2j}}Z_0(t,x;\tau,\xi) = -\partial_{\xi_{2j}}Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (27)$$

Тут $k\in\mathbb{Z}_+^n$ *у* (18), (19) *і* $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$ *у* (20), (21), $s\in\{1,2\}$, γ_s^0 *– довільне число з проміжку* $(0,1]$, γ *– число з умови* ***2***, $j\in\{1,\ldots,n_2\}$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $|x_s-z_s|\le(B(t,\tau))^{m_s}$.

Зауваження 1. На підставі оцінок (5) у нерівностях (18), (19), (22), (23), як і в (16), (17), замість оцінюючої функції E_c^d можна брати функцію F_c^d.

Наступні леми стосуються інтеграла

$$W(t,x;\tau,\xi) :=$$
$$:= \int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (28)$$

де функція Q є неперервною там, де вона визначена, та задовольняє такі умови:

3) $|Q(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\times$
$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma}\,E_c^d(t,\tau,x,\xi)$;

4) $|\Delta_{x_s}^{z_s}Q(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s}\times$
$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_s\gamma_s}\times$
$\times\big(E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)+E_c^d(t,\tau,x,\xi)\big)$;

5) функція Q має неперервні похідні $\partial_{x_{2j}}Q$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2j}}Q(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2}\,E_c^d(t,\tau,x,\xi).$$

У цих умовах $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\{1,2\}$, $j\in\{1,\ldots,n_2\}$, γ – число з умови **2**, $\gamma_1\in(0,1]$, $\gamma_2\in(1/3,1]$.

Лема 3. *Якщо функція Q задовольняє умови* ***3*** *–* ***5****, то функція* (28) *має всі похідні, що входять у рівняння* (3)*, причому*

$$LW(t,x;\tau,\xi) = Q(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}LZ_0(t,x;\theta,\lambda)\,Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda$$

і правильні формули

$$\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi) =$$
$$=\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\,Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda, \qquad (29)$$

$$\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi) =$$
$$=\int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\times$$
$$\times d\lambda+\int\limits_{t_1}^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\,d\lambda\Big)\times$$

$$\times Q(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\,\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \qquad (30)$$

$$\partial_{x_{2l}}W(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2l}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\partial_{\lambda_{2l}}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \qquad (31)$$

$$SW(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\times$$

$$\times d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$

$$\times\Delta_{\lambda}^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ_0(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Big)\times$$

$$\times Q(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\,\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+Q(t,x;\tau,\xi). \qquad (32)$$

Тут $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, $l\in\{1,\ldots,n_2\}$, t_1 *таке, що* $B(t,t_1)=\frac{1}{2}B(t,\tau)$.

Лема 4. *За умов леми 3 для похідних від* W*, які визначаються формулами* (29) – (32) *справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-m_1(1-\gamma)}\times$$
$$\times E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi),$$
$$|\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}W(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma}\times$$
$$\times E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi),$$
$$|\partial_{x_{2l}}W(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M+m_1\gamma-m_2}\times$$
$$\times E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi),$$
$$|SW(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma}\times$$
$$\times E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi),$$

в яких $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, $l\in\{1,\ldots,n_2\}$.

Доведення лем 2 – 4 проводиться відповідною модифікацією доведень для рівнянь типу (1) і (2) в указаних у вступі працях, а також для рівняння (3), в якому відсутні функції α і β – у статті [14].

3. Побудова та оцінки ФРЗК. Згідно з методом Леві ФРЗК для рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=Z_0(t,x;\tau,\xi)+W(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (33)$$

де Z_0 – параметрикс, а функція W визначається формулою (21), в якій Q – невідома функція. Припускаючи, що Q задовольняє умови **3** і **4**, та використовуючи лему 3, для Q одержимо інтегральне рівняння

$$Q(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \qquad (34)$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi):=\Big(\ \beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x_1)\times$$
$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}}+$$
$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x_1)\ \Big)\,Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (35)$$

За допомогою умов **1** і **2**, оцінок (18), нерівностей (5), (12) і того, що

$$(B(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le(\beta(t))^p(A(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le$$
$$\le(\beta(T))^pE^{d_1}(t,\tau),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad p>0,\quad d_1>d, \qquad (36)$$

одержимо оцінку

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma}\times$$
$$\times F^{d_1}_{c_1}(t,\tau,x,\xi). \qquad (37)$$

Тут $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $d_1>d$, $c_1\in(0,c)$, c і d – сталі з оцінок (18). Отже, для ядра K виконуються умови відповідно модифікованої леми 1.10 з [10], на підставі якої для функції Q справджується оцінка

$$|Q(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma}\times$$
$$\times F_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (38)$$

де сталі c_1 і d_1 такі ж, як і в (37). З нерівності (38), на підставі (5), одержуємо оцінку з умови **3**.

Перейдемо до оцінки приростів K. На підставі (35) запишемо такі зображення:

$$\Delta_{x_1}^{z_1}K(t,x;\tau,\xi)=\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_{jl}(t,x_1)\times$$
$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_0(t,x;\tau,\xi)+\beta(t)\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,z_1)\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_0(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,x_1)\partial_{z_{1j}}Z_0(t,z^{(1)};\tau,\xi)+$$
$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,x_1)\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,x_1)Z_0(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_0(t,z_1)\Delta_{x_1}^{z_1}Z_0(t,x;\tau,\xi), \qquad (39)$$

$$\Delta_{x_2}^{z_2}K(t,x;\tau,\xi)=\beta(t)\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x_1)\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_0(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,x_1)\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x_1)\Delta_{x_2}^{z_2}Z_0(t,x;\tau,\xi). \qquad (40)$$

Оцінюючи доданки з виразів (39) і (40) за допомогою умов **1** і **2**, оцінок (12), (18), (19) і (36), одержуємо

$$|\Delta_x^{z^{(s)}}K(t,x;\tau,\xi)|\le C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,z^{(s)},\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\{1,2\}, \qquad (41)$$

де γ_1^0 і γ_2^0 – довільні числа з проміжку $(0,1]$. З оцінок (41) випливають оцінки з умов **4**.

Залишилось довести, що функція Q задовольняє умову **5**. Зауважимо, що за допомогою рівностей (27) установлюються такі рівності:

$$\partial_{x_{2j}}K_l(t,x;\tau,\xi)=-\partial_{\xi_{2j}}K_l(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ j\in\{1,\dots,n_2\}, \qquad (42)$$

для повторних ядер K_l, $l\ge 1$, які визначаються із співвідношень

$$K_1(t,x;\tau,\xi):=K(t,x;\tau,\xi),$$
$$K_l(t,x;\tau,\xi)=\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times K_{l-1}(\theta,\lambda;\tau,\xi)\,d\lambda,\quad l>1. \qquad (43)$$

Дифференційовність (43) за змінною x_2 обгрунтовується аналогічно до доведення формул (31). За індукцією доводиться існування похідних $\partial_{x_{2j}}K_l(t,x;\tau,\xi)$, $l\ge 2$, та оцінки

$$|\partial_{x_{2j}}K_l(t,x;\tau,\xi)|\le C^l\left(\frac{\pi}{c}\right)^{l-1}\frac{\Gamma^l(\gamma/2)}{\Gamma(l\gamma/2)}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_2-1+m_1l\gamma}F_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (44)$$

де $j\in\{1,\dots,n_2\}$, $c_2<c_1<c$, $d_2>d_1>d$, c і d – сталі з оцінок (18), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Оцінки (44) гарантують абсолютну та рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\partial_{x_{2j}}K_l(t,x;\tau,\xi):=\partial_{x_{2j}}Q(t,x;\tau,\xi),$$

а також оцінку з умови **5**.

Отже, розв'язок Q інтегрального рівняння (34) задовольняє умови **3**, **4** і **5**.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови **1** і **2**. Тоді для рівняння* (3) *існує ФРЗК Z, для* *якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (45)$$
$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (46)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-m_s\gamma_s}\times$$
$$\times\Big(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big), \qquad (47)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,z^{(s)},\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $k:=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, $|k_1|+2|k_2|\le 2$, $\gamma_1=\gamma$, $\gamma_2=\gamma/3$, γ *– число з умови* ***2***.

Доведення теореми. Оцінки (45) і (46) випливають з (33) та лем 2 і 4.

Доведемо оцінки (47). На підставі оцінок (18) і (19) для першого доданка з (33) справджуються оцінки (47). Залишається оцінити прирости похідних від W. Вважатимемо, що $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le\frac14 B(t,\tau)$. Якщо $|x_s-z_s|^{1/m_s}>\frac14 B(t,\tau)$, то потрібна оцінка приросту $\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k W$ безпосередньо випливає з леми 4. Спочатку оцінимо $\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}W$, $|k_1|\le 2$. Користуючись формулами (29) і (30), запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}W(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\times$$
$$\times d\lambda+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$
$$-\int_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{Z^{(s)}(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\Delta_{x_s}^{z_s}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Big)\times$$
$$\times Q(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$
$$+\int_{\eta_s}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Big)Q(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\times$$
$$\times\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}-\int_{\eta_s}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,z^{(s)};\theta,\lambda)d\lambda\Big)\times$$
$$\times Q(\theta,Z^{(s)}(t,\theta);\tau,\xi)\,\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{7}L_j, \qquad (48)$$

де число t_1 таке саме, як у лемі 3, а η_s таке, що $B(t,\eta_s)=|x_s-z_s|^{1/m_s}$, $s\in\{1,2\}$.

Доданок L_1 оцінимо за допомогою нерівностей (19) і (10) та оцінки з умови **3**:

$$|L_1|\le\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)|\times$$
$$\times|Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times\int_\tau^{t_1}(B(t,\theta))^{-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma}\times$$
$$\times\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\,\Big(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\Big)^{-M}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\Big(E_c^d(t,\theta,x,\lambda)+E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\Big)\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma)-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_{c_1}^d(t,\tau,x,\xi)+E_{c_1}^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big). \qquad (49)$$

Щоб оцінити L_2, використаємо оцінку (19) та нерівності

$$|\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)|\le$$
$$\le|\Delta_{(\lambda_1,X_2(t,\theta))}^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)|+$$
$$+|\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\theta))}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)|\le C\beta(t)|x_1-\lambda_1|^\gamma\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1}\Big(E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)+$$
$$+E_c^d(\theta,\tau,X_2(t,\theta),\xi)\Big)+C\beta(t)\times$$
$$\times|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times\Big(E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)+E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\Big),\tag{50}$$

одержані за допомогою оцінки з умови **4**. Маємо

$$|L_2|\le\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda)|\times$$
$$\times|\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)|\,d\lambda\le$$
$$\le C\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_c^d(t,\theta,x,\lambda)+E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\Big)\times$$
$$\times\Big[|x_1-\lambda_1|^{\gamma}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times\Big(E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)+$$
$$+E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\Big)+$$
$$+|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times\Big(E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)+E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\Big)\Big]\times$$
$$\times d\lambda=C\Big[\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times|x_1-\lambda_1|^{\gamma}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}|x_1-\lambda_1|^{\gamma}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}|x_1-\lambda_1|^{\gamma}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\,E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}|x_1-\lambda_1|^{\gamma}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}|X_2(t,\tau)-\lambda_2|^{\gamma_2}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{\eta_s}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}|X_2(t,\tau)-\lambda_2|^{\gamma_2}\times$$
$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}E_c^d(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\,d\lambda\Big]=C\sum_{j=1}^{8}L_{2j}.\tag{51}$$

Доданки суми (51) оцінюються за допомогою нерівностей (11) – (14), рівності (8) і того, що

$$\int_{t_1}^{\eta_s}(B(t,\theta))^{-m_1|k_1|+m_1\gamma-m_s\gamma_s^0}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\le$$

$$\leq C\begin{cases}(B(t,\tau))^{1-m_1|k_1|}, \text{ якщо } |k_1|<2, \\ \qquad\qquad \gamma_s^0=\gamma_s, \\ (B(t,\eta_s))^{m_1\gamma-m_s\gamma_s^0}=|x_s-z_s|^{\gamma_s-\gamma_s^0}, \\ \qquad \text{якщо } |k_1|=2, \gamma_s^0>\gamma_s.\end{cases}$$

Для прикладу оцінимо доданок L_{21}. Маємо

$$L_{21}\leq|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t_1,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x_1-\lambda_1|^{\gamma}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\,d\lambda\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\leq$$
$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|+m_1\gamma-m_s\gamma_s^0}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^d(t,\theta,x,\lambda)\,d\lambda E_c^d(t,\tau,x,\xi)\leq$$
$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(B(t,\theta))^{-m_1|k_1|+m_1\gamma-m_s\gamma_s^0}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\leq$$
$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}E_c^d(t,\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюючи інші доданки суми (51), прийдемо до оцінки

$$|L_2|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times\left(E_c^d(t-\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right). \qquad (52)$$

Доданки L_3 і L_4 оцінюються однаково, оцінимо перший з них. За допомогою (18) і (50) отримуємо

$$|L_3|\leq C\Bigg[\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\gamma}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\gamma}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)E_c^d(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\times$$
$$\times|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_c^d(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)d\lambda\Bigg]=C\sum_{k=1}^{4}L_{3k}. \qquad (53)$$

За допомогою (8), (12) і (13) маємо

$$L_{31}\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta)^{-M-m_1|k_1|+m_1\gamma}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t,\theta,x,\lambda)\,d\lambda\leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}|x_s-z_s|^{\gamma_s}E_c^d(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка L_{32}, крім рівностей (4)) і (8), нерівностей (9) і (11), використовуватимемо ще нерівність (14) з $c=c_0/3$, де c_0 – стала з оцінки (11). Маємо

$$L_{32}\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1}E^d(t,\tau)\times$$
$$\times\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|+m_1\gamma}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)\times$$
$$\times E_{-c_0/3}^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_{c_0/3}^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\,d\lambda\times$$
$$\times E_{c_0/6}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)\leq$$
$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1}E^d(t,\tau)E_{c_0/6}(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|+m_1\gamma}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_0/3}(t,\theta,x,\lambda)\,d\lambda \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}|x_s-z_s|^{\gamma_s}\times$$
$$\times E^d_{c_0/6}(t,\tau,x,\xi).$$

За допомогою (10) і (12) отримуємо

$$L_{33} \le C(B(t_1,\tau))^{-m_2\gamma_2}\times$$
$$\times \int\limits_{\eta_s}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1|k_1|+m_2\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1}\times$$
$$\times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,(B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E^d_{c_0}(t,\theta,x,\lambda)E^d_{c_0}(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda\,d\theta \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}|x_s-z_s|^{\gamma_s}E^d_{c_0}(t,\tau,x,\xi).$$

Інтеграл L_{34} оцінюється аналогічно до L_{32}.

Із (53) та оцінок L_{3k}, $k\in\{1,2,3,4\}$, випливає оцінка

$$|L_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times\left(E^d_c(t,\tau,x,\xi)+E^d_c(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right). \tag{54}$$

Аналогічні оцінки з використанням нерівностей (20), (21) та оцінки з умови **3** приводять до потрібних оцінок L_5, L_6 і L_7, з яких на підставі рівностей (28), (33) і (48) та оцінок (19), (49), (52) і (54) випливають оцінки (47) для похідних від Z за змінними x_1.

Оцінки (47) справджуються також для приростів похідних від Z за змінними групи виродження x_2. Для встановлення цього досить оцінити прирости відповідних похідних від W. Щоб це зробити, на підставі рівності (31) запишемо зображення

$$\Delta^{z_s}_{x_s}\partial_{x_{2j}}W(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_s}_{x_s}\partial_{x_{2j}}Z_0(t,x;\theta,\lambda)Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)\times$$
$$\times d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_s}_{x_s}Z_0(t,x;\theta,\lambda)\times$$
$$\times\partial_{\lambda_{2j}}Q(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda=:P_1+P_2, \tag{55}$$

де число t_1 таке саме, як у лемі 3, а $j\in\{1,\dots,n_2\}$.

За допомогою нерівності (19) та оцінки з умови **3** аналогічно до оцінювання L_1 маємо

$$|P_1|\le C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}\int\limits_{\tau}^{t_1}(B(t,\theta))^{-m_2-m_s\gamma^0_s}\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\left(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\right)^{-M}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(E^d_c(t,\theta,x,\lambda)+E^d_c(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\right)\times$$
$$\times E^d_c(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda\,d\theta\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}(B(t,\tau))^{-M+m_1\gamma-m_2-m_s\gamma^0_s}\times$$
$$\times\left(E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi)+E^d_{c_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right), \tag{56}$$

$$|P_2|\le C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-m_s\gamma^0_s}\times$$
$$\times(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma-m_2}\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\times$$
$$\times\left(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\right)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(E^d_c(t,\theta,x,\lambda)+\right.$$
$$\left.+E^d_c(t,\theta,z^{(s)},\lambda)\right)E^d_c(\theta,\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda\,d\theta\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}(B(t,\tau))^{-M+m_1\gamma-m_2-m_s\gamma^0_s}\times$$
$$\times\left(E^d_{c_1}(t,\tau,x,\xi)+E^d_{c_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right), \tag{57}$$

якщо числа $\gamma^0_s\in(0,1]$ задовольняють умову $1-m_s\gamma^0_s>0$, $s\in\{1,2\}$. Зокрема, ця умова виконується, якщо взяти $\gamma^0_1=\gamma$, $\gamma^0_2=\gamma/3$, де γ – число з умови **2**.

З (55) – (57) випливають потрібні оцінки для W і, отже, на підставі (19) і (33) – оцінки (47) для перших похідних за x_2. ▶

Зауваження 2. В оцінках (45) – (47) стала d може бути будь-якого знака або нулем. У випадку слабкого виродження рівняння (3) в цих оцінках можна брати $\tau=0$ і $d=0$.

Зауваження 3. Властивості, аналогічні до властивостей Z, матиме ФРЗК $Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, для рівняння вигляду (3) з коефіцієнтами, які залежать від змінних $t\in[0,T]$ і $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ та параметра $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$.

Висновки. У статті для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження, з виродженнями на початковій гіперплощині побудовано класичний ФРЗК, встановлено оцінки ФРЗК та його похідних, а також їх приростів. Припущення на коефіцієнти є такими, як і у випадку рівнянь без вироджень. Отримані результати використовуватимуться при побудові ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких залежать від усіх просторових змінних, та систем таких рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Возняк О.Г.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.

2. *Березан Л.П.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині / Л.П. Березан, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.

3. *Мединський І.П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 337. Прикладна математика. – Львів, 1998. – С. 133–136.

4. *Мединський І.П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 364. Прикладна математика. – Львів, 1999. – С. 298–307.

5. *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи / Л.П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13–18.

6. *Ivasyshen S.D.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane / S.D. Ivasyshen, I.P. Medynsky// Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 33–46.

7. *Мединський І.П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 407. Прикладна математика. – Львів, 2000. – С. 185–194.

8. *Березан Л.П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / Л.П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5–10.

9. *Івасишен С.Д.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 15–24.

10. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

11. *Возняк О.Г.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.

12. *Івасишен С.Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь / С.Д. Івасишен, О.Г. Возняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, №2. – С. 13–19.

13. *Возняк О.Г.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 27–39.

14. *Івасишен С.Д.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження / С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 94–106.