УДК 517.9

©2015 р. І.М. Грод

Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка

ГЛАДКІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ МНОГОВИДІВ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ТИПУ РІККАТІ

Вивчаються властивості гладкості інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних систем типу Ріккаті.

The properties of smoothness of invariant manifolds of toroidal of nonlinear systems of type Riccati are studied.

Дослідженню інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем присвячено багато робіт [1-10]. Введене в роботі [3] поняття функції Гріна-Самойленка про інваріантні тори дозволило з єдиної точки зору викласти теорію збурення як диференційованих, так і неперервних інваріантних многовидів і привело до дослідження властивостей їх гладкості. Вивченню цього питання і присвячена ця робота.

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$d\varphi/dt = a(\varphi),$$
$$dX/dt = XH_1(\varphi)X + H_3(\varphi)X + \qquad (1)$$
$$+XH_2(\varphi) + H_4(\varphi),$$

де $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $a(\varphi)$ – m – мірна векторна функція з простору $C^0(\mathcal{T}_m)$, $C^0(\mathcal{T}_m)$– простір функцій, неперервних за сукупністю змінних φ і 2π– періодичних по кожній зі змінних $j = \overline{1,m}$. Припускаємо, $a(\varphi)$ така, що задача Коші

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \qquad (2)$$

при довільному фіксованому $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$, визначений на всій осі R, і він неперервно залежить від параметрів $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. Відомо, що достатньою умовою цього є умова Осгуда. $H_i(\varphi)$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$ – прямокутні матричні функції розмірності відповідно $r_2 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, $r_1 \times r_1$, $r_1 \times r_2$, визначені на всьому просторі $\mathcal{T}_m$, неперервні по сукупності змінних і обмежені.

Позначимо також $C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \geq 1$, -підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ функцій $F(\varphi)$, які мають частинні похідні $D^p_\varphi F(\varphi)$, $|p| = \sum\limits_{i=1}^m p_m$, $|p| = \overline{1,q}$; $C'(\mathcal{T}_m; a)$ – підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ функції $F(\varphi)$ таких, що суперпозиція $F(\varphi_t(\varphi))$ як функція змінної t неперервно диференційована по t, при цьому $dF(\varphi_t(\varphi))/dt|_{t=0} := \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$; для $(n \times n)$ – матриці $\|B\|_0 = \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|B(\varphi)\|$, $\|B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$, $\|y\| = \langle y , y \rangle$, $\langle x , y \rangle = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$ – скалярний добуток в R^n.

Нагадаємо, що рівність

$$X = M(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m$$

задає інваріантний тороїдальний многовид системи (1), якщо $M(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m, a)$ і виконується тотожність

$$\frac{dM(\varphi_t(\varphi))}{dt} = M(\varphi_t(\varphi))H_1(\varphi_t(\varphi))M(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+H_2(\varphi_t(\varphi))M(\varphi_t(\varphi)) + M(\varphi_t(\varphi))H_3(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+H_4(\varphi_t(\varphi)),$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

У припущенні, що система (1) має інваріантний тор $X = M(\varphi)$, виникає питання про степінь неперервності по φ цих функцій залежно від неперервності матричної функції $H(\varphi)$ і вектор-функції $a(\varphi)$. Ця залежність має аж ніяк не очевидний характер. Так згадані функції можуть бути неперервно диференційованими, а інваріантний тороїдальний многовид може не задовольняти умові Ліпшиця по φ. Далі нам знадобляться ще деякі поняття.

Розглянемо допоміжну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dh}{dt} = H(\varphi)h, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$
$$H(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m). \tag{3}$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi_0, H)$ матрицант лінійної системи рівнянь $\frac{dh}{dt} = H(\varphi_t(\varphi_0))h$.

Означення [6]. Нехай для деякої $n \times n$ - мірної матриці $C(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n), & \tau > 0, \end{cases} \tag{4}$$

задовольняє оцінку

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \le K\, exp\{-\gamma|\tau|\}, \quad \tau \in R, \tag{5}$$

де $K, \quad \gamma - const > 0$. Тоді функція (4) називається функцією Гріна задачі про інваріантні тори для системи рівнянь (3).

Відмітимо, що виконання оцінки (5) для функції Гріна (4) еквівалентне виконанню оцінки

$$\|G_t(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|t - \tau|\} \tag{6}$$

для функції $G_t(\tau, \varphi) = \Omega_0^t(\varphi) G_0(\tau, \varphi)$.

Тут досліджується характер модуля неперервності вищих похідних функції інваріантного тороїдального многовиду системи (1), дані оцінки і умови їх збіжності.

Нехай деяка матрична або векторфункція $\Phi(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, тоді скалярна функція $\omega(\Phi; \sigma) = \sup\limits_{\|\varphi - \overline{\varphi}\| \le \sigma} \|\Phi(\varphi) - \Phi(\overline{\varphi})\|$ називається її модулем неперервності. У випадку $\Phi(\varphi) \in C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \ge 1$, для її вищих похідних позначимо:

$$\omega_p(\Phi; z) = \begin{cases} \max\left\{\omega(D_\varphi^p \Phi; z) L_{q-1}(\Phi) z\right\}, & |p| = q, \\ L_{|p|}(\Phi) z, & |p| = \overline{1, q-1}, \end{cases}$$

де $L_p(\Phi) = \max\limits_{|i| = \overline{0, |p|}} L_i(\Phi)$, $L_i(\Phi)$ - константа Ліпшиця відповідної частинної похідної функції $\Phi(\varphi)$ $|i|$ – го порядку, тобто така, що $\left\|D_\varphi^i \Phi(\varphi) - D_\varphi^i \Phi(\overline{\varphi})\right\| \le L_i(\Phi)\|\varphi - \overline{\varphi}\|$. Також покладемо $\omega_0(A; z) = \omega(A; z)$, $\omega_0(f; z) = \omega(f; z)$, $\omega_0(a; z) \equiv 0$.

Щоб отримати оцінки для різниці похідних розв'язку задачі Коші (2) в точках $\varphi, \overline{\varphi} \in \mathcal{T}_m, \varphi \ne \overline{\varphi}$ для вище описаного класу функцій $\Phi(\varphi)$, введемо в розгляд допоміжні відображення

$$J_\nu(\Phi; p; z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\sigma|\} \times$$
$$\times \omega_p(\Phi; F^{-1}(F(z) + |\sigma|)) d\sigma, \quad |p| = \overline{0, q},$$

де ν – довільна додатна константа і $F(z) = \int\limits_\eta^z \omega(a; z)^{-1} d\sigma$, $\eta = const > 0$. Має місце твердження:

Лема. *Якщо* $a(\varphi) \in C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \ge 1$, *то для додатної сталої* ν *виконуються оцінки*

$$\left\|D_\varphi^p \varphi_t(\varphi) - D_\varphi^p \varphi_t(\overline{\varphi})\right\| \le$$
$$\le M_p \exp\{(\alpha|p| + \nu)|t|\} \times \tag{7}$$
$$\times J_\nu(a; p; \|\varphi - \overline{\varphi}\|), \; |p| = \overline{1, q},$$

де M_p *– додатні сталі,* α *визначена нерівністю* $\alpha \ge \max\limits_{\|\xi\| = 1} \|(\partial a / \partial \varphi)\xi\|$.

Доведення. Зазначемо, що при досить великих η в силу періодичності функції $a(\varphi)$ її модуль неперервності має властивість $\omega(a; \sigma) = \omega(a; \eta)$. Запишемо різницю розв'язку задачі Коші (2) при $t \ge 0$ в інтегральній формі: $\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\bar{\varphi}) = \varphi - \dot{\varphi} + \int\limits_0^t (a(\varphi_\sigma(\varphi)) - a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))) d\sigma$. Тоді для цієї різниці справедлива оцінка

$$\|\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\overline{\varphi})\| \le \|\varphi - \overline{\varphi}\| +$$
$$+ \int\limits_0^t \omega(a; \|\varphi_\sigma(\varphi) - \varphi_\sigma(\overline{\varphi})\|) d\sigma,$$

з якої випливає, що

$$\|\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\overline{\varphi})\| \le F^{-1}(F(\|\varphi - \overline{\varphi}\|) + |\sigma|), \tag{8}$$

де через F^{-1} позначена обернена до F функція. Аналогічно переконуємося у виконанні оцінки (8) і при $t < 0$.

Підставимо в систему (2) її розв'язок для різних $\varphi, \overline{\varphi} \in \mathcal{T}_m$ і запишемо різницю

$$(d/dt)\left(\varphi_t(\varphi)-\varphi_t(\overline{\varphi})\right)=a\left(\varphi_t(\varphi)\right)-a\left(\varphi_t(\overline{\varphi})\right). \quad (9)$$

З того, що $a(\varphi)$ належить класу $C^q(\mathcal{T}_m)$, випливає, що і розв'язок системи (2) також належить цьому класу для будь-яких $t \in R$, тому маємо право продиференціювати q разів тотожність (9) по будь-яких змінних $\varphi_i,\ i=\overline{1,m}$. Зокрема, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_1(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)=$$

$$=\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_t(\varphi)}\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_t(\overline{\varphi})}\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}=$$

$$=\left(\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_t(\varphi)}-\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_{t(\overline{\varphi})}}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}\quad+\left(\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_{t(\overline{\varphi})}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right). \quad (10)$$

Розглядаючи (10) як систему лінійних неоднорідних рівнянь відносно похідних, розв'язки задачі (2), при $t>0$ можна записати

$$\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}=\left.\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)\right|_{t=0}$$

$$+\int\limits_0^t\Omega_\sigma^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\left(\left.\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_{\sigma(\varphi)}}-\right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial\omega(\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_{\sigma(\overline{\varphi})}}\right)\frac{\partial\varphi_\sigma(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}d\sigma, \quad (11)$$

де $\Omega_r^t(\partial a/\partial\varphi)-$ матрицант системи $dy/dt=\left(\partial a(\varphi)/\partial\varphi|_{\varphi=\varphi_t(\varphi)}\right)y, y\in R_m$.

Далі, використавши оцінку (див.[4,с.191])

$$\left\|D_\varphi^p\varphi_t(\varphi)\right\|\le C_p\ \exp\{\alpha|p||t|\}, \quad (12)$$

$|p|=\overline{1,q}$, де C_p – деякі додатні сталі, маємо

$$\left\|\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}-\ \frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right\|\le\int\limits_0^t C_1\exp\{\alpha|t-\sigma|\}\times$$

$$\times\omega\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi};\|\varphi_\sigma(\varphi)-\varphi_\sigma(\overline{\varphi})\|\right)\times$$

$$\times\exp\{a|\sigma|\}d\sigma\le C_1^2\exp\{|t|\}\times$$

$$\times\int\limits_o^t\exp\{\nu|t|-|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi};F^{-1}\left(F\left(\|\varphi-\overline{\varphi}\|\right)+|\sigma|\right)\right)\times$$

$$\times\exp\{\alpha|\sigma|\}d\sigma\le\frac{1}{2}C_1^2exp\{(\alpha+\nu)|t|\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}exp\{-\nu|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega_1(a;F^{-1}(F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+|\sigma|))d\sigma. \quad (13)$$

Таким чином, ми довели твердження леми при $|p|=1$. Далі припустивши, що оцінка (7) справедлива для всіх p, таких, що $|p|\le|l|$, доведемо, що тоді вона справедлива і для p таких, що $|p|=|l|+1$. Продиференціюємо тотожність (9) $|l|$ разів по будь-яких змінних $\varphi_i,\ i=\overline{1,m}$, вважаючи при цьому, що $|l|+1\le q$. Маємо

$$\frac{d}{dt}\left(D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right)-D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)\right)=$$

$$\frac{\partial a(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_i}\times$$

$$\times\left[D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right)-D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial a(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_t(\varphi)}-\frac{\partial a(\varphi_t(\overline{\varphi}))}{\partial\varphi_i(\overline{\varphi})}\right]D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)+$$

$$+R_l(\varphi_t(\varphi))-\ R_l(\varphi_t(\overline{\varphi})),$$

де

$$R_l(\varphi_t(\varphi))=D_\varphi^l\left[\frac{\partial a(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_t}\frac{\partial\varphi_y}{\partial\varphi_i}\right]-$$

$$-\frac{\partial a(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_i}\left(D_\varphi^l\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right)\right).$$

Оскільки $R_l(\varphi_t(\varphi))$ має вигляд диференціального виразу, який містить доданки

$$\sum_{|\theta|=1}^{|l-j|} D^{\theta}_{\varphi_t}\left(\frac{\partial a(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_t}\right)\sum_{\varsigma}(D_\varphi\varphi_t(\varphi))^{\varsigma_1}\times$$

$$\times\left(D^2_\varphi\varphi_t(\varphi)\right)^{\varsigma_2}\dots\left(D^{l-j}_\varphi\varphi_t(\varphi)\right)^{\varsigma_{l-j}}D^j_\varphi\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi}\right),$$

$$|j|=\overline{0,|i-1|},\quad s=\overline{1,m},$$

зі сталими коефіцієнтами, де $\varsigma_1+\varsigma_2+\dots+\varsigma_{l-j}=|\theta|$, $\varsigma_1+2\varsigma_2+\dots+|l-j|\,\varsigma_{l-j}=|l-j|$, то, оцінюючи різницю $(l+1)$−х частинних похідних розв'язку задачі Коші (2) з використанням міркувань, аналогічних (11), і при тому враховуючи, що $\left[D^p_\varphi\varphi_t(\varphi)\right]\big|_{t=0}=0$ при $|p|=\overline{2,q}$, отримаємо

$$\left\|D^{l+1}_\varphi\varphi_t(\varphi)-D^{l+1}_\varphi\varphi_t(\overline{\varphi})\right\|=$$

$$=\left\|D^l_\varphi\left(\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\ \varphi_i}\right)-D^l_\varphi\left(\frac{\partial\varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_i}\right)\right\|\le$$

$$\le 0\ +\int\limits_0^t\left\|\Omega^t_\sigma\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial a(\varphi_\sigma(\varphi))}{\partial\varphi_\sigma(\varphi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))}{\partial\varphi_\sigma(\overline{\varphi})}\right]D^{l+1}_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)\,\Big\|d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^t\left\|\Omega^t_\sigma\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\|\|R_l(\varphi_\sigma(\varphi))-$$

$$-R_l(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\,\|d\sigma\ :=I_1+I_2.$$

Використовуючи нерівність (12), аналогічно (13) оцінимо перший з інтегралів:

$$I_1\le\int\limits_0^t C_1\exp\{\alpha|t-\sigma|\}\times$$

$$\times\omega\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi};\|\varphi_\sigma(\varphi)-\varphi_\sigma(\overline{\varphi})\|\right)C_{l+1}\times$$

$$\times\exp\{\alpha(l+1)|\sigma|\}\,d\sigma\le$$

$$\le(c)\exp\{\alpha|t|\}\int\limits_0^t\exp\{\alpha l|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega\left(a;F^{-1}(|\sigma|+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|))\right)d\sigma\le$$

$$\le(c)\exp\{(l+1)\alpha|t|\}\int\limits_0^t\exp\{\nu(|t|-|\sigma|)\}\times$$

$$\times\omega_1\left(a;F^{-1}(|\sigma|+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|))\right)d\sigma\le$$

$$\le(c)\exp\{(\alpha(l+1)+\nu)|t|\}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\nu|\sigma|\}\omega_{l+1}(a;F^{-1}(|\sigma|+$$

$$+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)))d\sigma.$$

Тут і надалі через (C), (K) позначимо деякі додатні константи, що, залежно від місця запису, загалом різні.

Оцінимо другий інтеграл:

$$I_2\le\int\limits_0^t C_1\exp\{\alpha|t-\sigma|\}\left\|D^{l-j}_\varphi\left(\frac{\partial a(\varphi_\sigma(\varphi))}{\partial\varphi_\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-D^{l-j}_\varphi(\frac{\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))}{\partial\varphi_\sigma})\right\|\times$$

$$\times\left\|D^{l-j}_\varphi\left(\frac{\partial\varphi_\sigma(\varphi)}{\partial\varphi_\sigma}\right)\right\|d\sigma+\int\limits_0^t C_1\exp\{\alpha|t-\sigma|\}\times$$

$$\times\left\|D^{l-j}_\varphi\left(\frac{\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))}{\partial\varphi_\sigma}\right)\right\|\times$$

$$\times\left\|D^j_\varphi\frac{\partial\varphi_\sigma(\varphi)}{\partial\varphi_\sigma}-D^j_\varphi\frac{\partial y_\sigma(\overline{\varphi})}{\partial\varphi_\sigma}\right\|d\sigma:=J_1+J_2.$$

Для підінтегрального виразу J_1 можемо записати

$$\|D^{l-j}_\varphi(\partial a(\varphi_\sigma(\varphi))/\partial\varphi_\sigma(\varphi))-$$

$$-D^{l-j}_\varphi(\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))/\partial\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\|\le$$

$$\le(K)\Big[\|D^{\partial}_{\varphi_\sigma}(\partial a(\varphi_\sigma(\varphi))/\partial\varphi_\sigma(\varphi))-$$

$$-D^{\theta}_{\varphi_\sigma}(\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))/\partial\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\|\times$$

$$\times\|D_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)\|^{\varsigma_1}\left\|D^2_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)\right\|^{\varsigma_2}\dots$$

$$\dots\left\|D^{l-j}_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)\right\|^{\varsigma_{i-j}}+\left\|D^{\theta}_{\varphi_\sigma}(\partial a(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))/\partial\varphi_\sigma)\right\|$$

$$\Big[\|D_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)-\varphi_\sigma(\overline{\varphi})\|\|(D^2_\varphi(\varphi_\sigma(\varphi))^{\varsigma_2})\dots$$

$$\dots\left(D^{i-j}_\varphi(\varphi_\sigma(\varphi))^{\varsigma_{l-j}}\right)\|+\dots$$

$$+\left\|D_\varphi\varphi_\sigma(\varphi)\dots\left(D^{l-j-1}_\varphi\right)^{l-j-1}\right\|\times$$

$$\times \left\| \left(D_{\varphi}^{l-j}\varphi_{\sigma}(\varphi) \right)^{l-j} - \left(D_{\varphi}^{l-j}\varphi_{\sigma}(\overline{\varphi}) \right)^{l-j} \right\| \Big]\Big] :=$$
$$:= D.$$

Оскільки

$$\left\| \left(D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\varphi) \right)^{\varsigma_p} - \left(D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\overline{\varphi}) \right)^{\varsigma_p} \right\| \le$$
$$\le \varsigma_p \left(\max\left\{ \left\| D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\varphi) \right\|, \left\| D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\overline{\varphi}) \right\| \right\} \right)^{\varsigma_{p-1}} \times$$
$$\times \left\| D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\varphi) \quad - D_{\varphi}^{p}\varphi_{\sigma}(\overline{\varphi}) \right\|, \qquad (14)$$

то, враховуючи, що $|\theta|$ змінюється від 1 до $|l-j|$, отримаємо

$$D \le (K) \exp\{\alpha|\theta|\sigma\} \sum_{s=1}^{|l-j|} \omega_s(a; F^{-1}(|\sigma| +$$
$$+F(\|\varphi - \overline{\varphi}\|)))\exp\{(|l-j| - \varsigma_s)|\sigma|\} \le$$
$$\le (K) \exp\{\alpha\,|l-j|\,|\sigma|\} \times$$
$$\times \omega_{l-j} \left(a; F^{-1} \left(F\left(\|\varphi - \overline{\varphi}\| \right) + |\sigma| \right) \right).$$

Таким чином,

$$J_1 \le (K) \int_0^t \exp\{\alpha\left(|t-\sigma| + |l-j|\right)\} \times$$
$$\times \omega_{|l-j|} \left(a; F^{-1} \left(F\left(\|\varphi - \overline{\varphi}\| \right) + |\sigma| \right) \right) \times$$
$$\times \left\| D_{\varphi}^{j+1}\varphi_{\sigma}(\varphi) \right\| \, d\sigma \le \exp\{(\alpha(l+1) + \nu)\,|t|\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\,\nu|\,|\sigma|\} \times$$
$$\times \omega_{l+1} \left(a; F^{-1} \left(F\left(\|\varphi - \overline{\varphi}\| \right) + |\sigma| \right) \right) d\sigma.$$

Крім того, оскільки $|j| + 1 \le |l|$, то

$$J_2 \le \int_0^t \exp\{\alpha\,|t-\sigma|\}\,(c)\|D_{\varphi}^{j+1}\varphi_{\sigma}(\varphi) -$$
$$-D_{\varphi}^{j+1}\varphi_{\sigma}(\overline{\varphi})\|d\sigma(K) \int_0^t \exp\{\alpha|t-\sigma| +$$
$$+(\alpha(j+1)+\nu)|\sigma|\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\tau|\} \times$$
$$\times \omega_{j+1}\;(a; F^{-1}(|\sigma| + F(\varphi - \overline{\varphi})))d\tau d\sigma \le$$

$$\le (K)\exp\{\alpha|t|\} \int_0^t \exp\{(\alpha j + \nu)|\sigma|\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{\nu|\tau|\}\omega_{j+1}(a; F^{-1}(F(\|\varphi - \overline{\varphi}\|) +$$
$$+|\tau|))d\tau d\sigma \le (K)\exp\{(\alpha(l+1)+\nu)|t|\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\tau|\}\omega_l(a; F^{-1}(F(\|\varphi - \overline{\varphi}\|) + |\tau|))d\tau.$$

Отже, оцінка (7) справедлива і при $|p| = |l|+1$. Аналогічно показуємо справедливість леми при $t < 0$. Цим і завершується доведення леми.

Досліджуючи модулі неперервності інваріантних многовидів системи (1), отримали наступне твердження.

Теорема. *Припустимо, що система* (1) *така, що функції* $a(\varphi)$, $H_i(\varphi)$, *при* $i = \overline{1,4}$ *належать класу* $C^q(\mathcal{T}_m\ )$ *і має місце нерівність*

$$\Big| \langle H_2(\varphi) z_1, z_1 \rangle + \left\langle \left[H_4(\varphi) + H_1^T(\varphi) \right] z_1, z_2 \right\rangle + +$$
$$+ \langle H_3(\varphi) z_2, z_2 \rangle \Big| ge\beta \left(\|z_1\|^2 + \|z_1\|^2 \right) \qquad (15)$$

для всіх $z_1 \ \in R^{k_2}, z_2 \ \in \mathbb{R}^{k_1}$, *де* $\beta = const \ > 0$.

Тоді при виконанні нерівності

$$\beta > \alpha q \qquad (16)$$

система рівнянь (1) *має інваріантний тор* $Y = M(\varphi)$ *разом з усіма своїми частинними похідними до порядку* q *включно і виконуються оцінки*

$$\left\| D_{\varphi}^{p} M(\varphi) - \ D_{\varphi}^{p} M(\overline{\varphi}) \right\| \le$$
$$\le K_p J_{\nu}(a; p; \|\varphi - \ \overline{\varphi}\|) +$$
$$+\overline{K_p} J_{\nu}(H; p; \|\varphi - \ \overline{\varphi}\|), |p| = \ \overline{0, q}.$$

Доведення. Як зазначалося вище, існування функції Гріна (4), для якої виконується оцінка (5), гарантує існування функції $G_t(\tau, \varphi)$ з виконанням оцінки (6). Як відомо [4, с.126], для різниці цієї функції в точках $\varphi \neq \overline{\varphi}$ має місце представлення

$$G_t(\tau,\varphi) - G_t(\tau,\overline{\varphi}) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_t(\sigma,\varphi)[A(\varphi_\sigma(\varphi)) -$$

$$-A(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))]G_\sigma(\tau,\overline{\varphi})d\sigma. \qquad (17)$$

Крім того, як показано в [10], нерівність (16) гарантує диференційовність функції Гріна до порядку q включно і виконання наступних оцінок:

$$\|D^p_\varphi G_i(\tau,\varphi)\| \leq K^l_p \exp\{-\gamma|t-\tau|+$$

$$+\alpha|p|\max\{|t|,|\tau|\}\}, |p| = \overline{1,q}, \qquad (18)$$

де K^l_p- додатні константи. Таким чином, ми маємо право продиференціювати обидві частини нерівності (17) і, оскільки умова (16) гарантує збіжність інтеграла в правій частині представлення (32) з роботи [10], можемо записати

$$D^p_\varphi G_t(\tau,\varphi) - D^p_\varphi G_t(\tau,\overline{\varphi}) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3|=|p|} C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} D^{\lambda_1}_\varphi G_t(\sigma,\varphi) \times$$

$$\times [D^{\lambda_2}_\varphi A(\varphi_0(\varphi)) - D^{\lambda_2}_\varphi(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\times$$

$$\times D^{\lambda_3} G_\sigma(\tau,\overline{\varphi})]d\sigma, \qquad (19)$$

де $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}-$ деякі постійні, $\lambda_i = (\lambda_{i1},\ldots,\lambda_{im}), \lambda_{1j} \geq 0, \lambda_{2j} \geq 1, \lambda_{3j} \geq 0$, $|\lambda_i| = \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j}$,

$$D^{\lambda_2}_\varphi A(\varphi_t(\varphi)) = \sum_{|\Theta|=1}^{|\lambda_2|} D^\Theta_\varphi \omega(\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_t(\varphi)} \times$$

$$\times \sum_\rho C_{\Theta\rho} (D_\varphi \varphi_t(\varphi))^{\rho_1} \left(D^2_\varphi \varphi_t(\varphi)\right)^{\rho_2} \ldots$$

$$\left(D^{\lambda_2}_\varphi \varphi_t(\varphi)\right)^{\rho_{\lambda_2}}, \qquad (20)$$

$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho = |\Theta|$, $\rho_1+2\rho_2+\cdots+|\lambda_2|\,\rho\lambda_2 = |\lambda_2|$.

Далі проведем оцінку різниці похідних єдиної функції Гріна виходячи з представлення (19).

Легко переконатися у правильності співвідношень

$$-(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) \leq -2|\sigma| + |t+\tau| \quad (21)$$

$\forall\ t,\tau,\sigma \in R$,

$$|t-\tau| + |t+\tau| \equiv \max\{|t|,|\tau|\}\ \forall t,\tau \in R, \qquad (22)$$

а також у виконанні нерівності

$$-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) \leq -(\gamma-\delta)|y-\tau| -$$

$$-\delta(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) \qquad (23)$$

для будь-яких $t,\tau,\sigma \in R$ і γ,δ, таких, що $\gamma > \delta > 0$. Використовуючи (21)-(23), для кожного $\beta \in (0, 2\gamma-\nu)$ можна записати ланцюжок нерівностей

$$-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) + \beta|\sigma| \leq$$

$$\leq -(\gamma-(\nu+\beta)/2)|t-\tau| - ((\nu+\beta)/2)|t-\sigma| +$$

$$+|\sigma-\tau|) + \beta|\sigma| \leq -(\gamma-(\nu+\beta)/2)|t-\tau| -$$

$$-((\gamma+\beta)/2)(2|\sigma| - |t+\tau|) +$$

$$+\beta|\sigma| = -\gamma|t-\tau| + ((\nu+\beta)/2)(|t-\tau|+$$

$$+|t+\tau|) - (\gamma-\beta)|\sigma| + \beta|\sigma| =$$

$$= -\gamma|t-\tau| + (\nu+\beta)\max\{|t|,|\tau|\} - \nu|\sigma|. \qquad (24)$$

Тобто, для будь-яких додатних сталих $\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\nu$, таких, що виконується нерівність $2\gamma > \beta_1+\beta_2+\beta_3+\nu$, і для будь-яких $t,\tau,\sigma \in R$ маємо

$$-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|) + \beta_1|\sigma| + \beta_2 \max\{|t|,|\sigma|\} +$$

$$+\beta_3 \max\{|\tau|,|\sigma|\} \leq$$

$$\leq -\gamma|t-\tau| + (\beta_1+\beta_2+\beta_3+\nu)\times$$

$$\max\{|t|,|\tau|\} - \nu|\sigma|. \qquad (25)$$

Далі, використовуючи нерівність (24) і подання (17), запишемо оцінку

$$\|G_t(\tau,\varphi) - G_t(\tau,\overline{\varphi})\| \leq$$

$$\leq K^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\gamma(|t-\sigma| + |\sigma-\tau|)\} \times$$

$$\times \omega(A; \|\varphi_\sigma(\varphi) - \varphi_\sigma(\overline{\varphi})\|)\,d\sigma \leq$$

$$\leq K^2 \exp\{-\gamma|t-\tau| + \nu\max\{|t|,|\tau|\}\} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\sigma|\} \times$$

$$\omega\left(A; F^{-1}\left(F\left(\|\varphi-\overline{\varphi}\|\right)+|\sigma|\right)\right) d\sigma. \qquad (26)$$

Норму різниці функції (20) в різних точках φ за допомогою нерівності (14) і твердження леми можна оцінити наступним чином:

$$\|D_\varphi^{\lambda_2} A(\varphi_\sigma(\varphi)) - D_\varphi^{\lambda_2} A(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\| \leq$$

$$\leq \sum_{\theta=1}^{|\lambda_2|} \sum_{\rho} C_{\Theta_\rho}[\|D_\varphi^{\Theta}\omega(\varphi)|_{\varphi=\varphi_{\sigma(\varphi)}} -$$

$$-D_\varphi^{\Theta}\omega(\varphi)|_{\varphi=\varphi_\sigma(\overline{\varphi})}\|\|(D_\varphi\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_1}\times$$

$$\times(D_\varphi^2\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_2}\ldots(D^{\lambda_2}\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_{\lambda_2}}\|+$$

$$+\|D_\varphi^{\theta}A(\varphi)|_{\varphi=\varphi_\sigma(\varphi)}\|(\|(D_\varphi\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_1}-$$

$$-(D_\varphi\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))^{\rho_1}\|\times$$

$$\times\|(D_\varphi^2\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_2}\ldots\ (D_\varphi^{\lambda_2}\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_{\lambda_2}}\|+\cdots+$$

$$+\|D_\varphi o_\sigma(\overline{\varphi})\ldots(D^{\lambda_2-1}\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))^{\rho_{\lambda_2-1}}\|\times$$

$$\times\|(D_\varphi^{\lambda_2}\varphi_\sigma(\varphi))^{\rho_{\lambda_2}}-(D_\varphi^{\lambda_2}\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))^{\rho_{\lambda_2}}\|)\leq$$

$$\leq \sum_{\Theta=1}^{|\lambda_2|}\sum_{\rho}\prod_{\rho=1}^{|\lambda_2|} C_\rho \exp\{(\alpha|\lambda_2|+\nu)|\sigma|\}\times$$

$$\times[\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\|D_\varphi^{\theta}\omega(\varphi)\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\nu|\sigma|\ \}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{|\lambda_2|} M_i\rho_i C_i^{-1}\omega_i(a;F^{-1}(|u|+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)))du+$$

$$+\exp\ \{-\nu|\sigma|\}\omega(D_\varphi^{\Theta}A;F^{-1}(F(\varphi-\overline{\varphi})+|\sigma|))]. \qquad (27)$$

Відповідно до леми з роботи [10], виконання нерівності $2\gamma>\mu$, де $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$, гарантує збіжність інтеграла

$$J(\tau,t,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\gamma(|t-\sigma|+|\sigma-\tau|)+\mu_1|\sigma|+$$

$$+\mu_2\max\{|\sigma|,|\tau|\}+\mu_3\ \max\{|\sigma|,|t|\}\}d\sigma$$

за параметрами $t,\tau\in R$, де γ,μ_1 – додатні, а μ_2,μ_3 – невід'ємні константи, і виконання оцінки $J(\tau,t,\mu)\leq K\exp\{-\gamma|t-\tau|+\mu\max\{|t|,|\tau|\}\}$, де

$$K=2\left(2\gamma+\max\{\gamma,\mu\}\right)/(\mu_1\left(2\gamma-\mu\right)).$$

Скориставшись цією нерівністю, а також нерівностями (18), (25), для різниці похідних функції Гріна (19) можна записати наступне:

$$\left\|D_\varphi^p G_t(\tau,\varphi)-D_\varphi^p G_t(\tau,\overline{\varphi})\right\|\leq$$

$$\leq K_{\lambda_1}^{'}K_{\lambda_3}^{'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\gamma\left(|t-\sigma|+|\sigma-\tau|\right)+$$

$$+\lambda_1\max\{|t|,|\sigma|\}+\lambda_3\max\{|\sigma|,|\tau|\}\}\times$$

$$\times\|D_\varphi^{\lambda_2}A(\varphi_\sigma(\varphi))-D_\varphi^{\lambda_2}A(\varphi_\sigma(\overline{\varphi}))\|d\sigma\leq$$

$$\leq K_{\lambda_1}^{'}K_{\lambda_3}^{'}|\lambda_2|\sum_{\mu}\prod_{\mu=1}^{\lambda_2}C_\mu[\exp\{\gamma|t-\tau|+$$

$$+(\alpha|p|+\nu)\}\max\{|t|,|\tau|\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\nu|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega\left(D_\varphi^{\lambda_2}A;F^{-1}\left(F\left(\|\varphi-\overline{\varphi}\|\right)+|\sigma|\right)\right)d\sigma+$$

$$+\sum_{i=1}^{|\lambda_2|}M_iC_i^{-1}\max_{|j|=\overline{0,|\lambda_2|}}\|D_\varphi^jA\|_0\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\gamma(|t-\sigma|+|\sigma-\tau|)+$$

$$+(\alpha|p|+\nu)|\sigma|\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\nu|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega_p(F^{-1}(|u|+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)))dud\sigma]\leq$$

$$\leq\exp\{-\gamma|t-\tau|+(\alpha|p|+\nu)\max\{|t|,|\tau|\}\}\times$$

$$\times\Big(K_p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\nu|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega_p(a;F^{-1}(F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+|\sigma|))d\sigma+$$

$$+\overline{K}_p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\sigma|\}\times$$

$$\times\omega_p(A; F^{-1}(F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+|\sigma|))d\sigma\Big)$$

з деякими достатньо великими константами K, $\overline{K}$.

Таким чином, для матриці проектування $C(\varphi)$, яка входить в структуру функції Гріна задачі про інваріантні тори (4), та її похідних виконуються наступні оцінки

$$\left\|D^p_\varphi C(\varphi) - D^p_\varphi C(\overline{\varphi})\right\| \le$$
$$\le K_p J_\nu(a; p; \|\varphi - \overline{\varphi}\|) +$$
$$+\overline{K_p} J_\nu(A; p; \|\varphi - \overline{\varphi}\|), |p| = \overline{0,q}. \qquad (28)$$

З іншої сторони, якщо в системі (3) матричну функцію $H(\varphi)$ задати як

$$H(\varphi) = \begin{pmatrix} H_2(\varphi) & H_4(\varphi) \\ -H_1(\varphi) & -H_3(\varphi) \end{pmatrix},$$

тоді виконання нерівності (15), використовуючи результати роботи [5], забезпечує існування для вказаної системи єдиної функцію Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, при цьому $K = (2+\sqrt{2})(\frac{\|A\|_0}{\beta})^{\frac{2}{3}}, \gamma = \frac{\beta}{2}$, а матрицю проектування $C(\varphi)$ можна задати у вигляді

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{r_2}(\varphi) \\ M(\varphi) \end{pmatrix} (I_{r_2} - \widetilde{M}(\varphi)M(\varphi))^{-1}\times$$
$$\times[(I_{r_2}|0) - \widetilde{M}(\varphi)(0|I_{r_1})].$$

де $X = M(\varphi)$– інваріантний тороїдальний многовид системи (1).

А цього достатньо, з врахуванням оцінки (28), щоб стверджувати, що має місце дана теорема. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mozer J.J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Acad. Wiss. Gottingen Math.-Phis. Kl. 1962. Vol. 18a, N 1.P. 1 – 20.

2. *Sacker R.J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Holder continuity // J. Math. and Mech. 1969. Vol.18, N 8. P. 705 – 762.

3. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т.34, №6. С. 1219-1240.

4. *Митропольський Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии систем линейных дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Киев, 1990.

5. *Митропольський Ю. А., Грод И.Н.* Некоторые задачи инвариантных многообразий и знакопеременные функции Ляпунова. — Киев, 1989.—37с.—(Препр./АН УССР. Ин-т математики)

6. *Самойленко А.М., А.А.Бурылко, Грод И.Н.* Модули непрерывности производных инвариантных торов линейных расширений динамических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №1. С.103–113.

7. *Броншинейн И.У., Копанский А.Я.* Инвариантное многообразие и нормальные формы.- Кишинев, 1992.

8. *Грод И.Н., Кулик В.Л.* О свойствах непрерывности инвариантных торов и функции Грина линейных расширений на торе// Укр. мат. журн. 1998. Т.41, №12. С. 1709 – 1714.

9. *Самойленко А.М., Кулик В.Л.* О свойствах матрицантов влияющих на регулярность линейных расширений динамических систем на торе // Дифференц. уравнения. 1997. Т.30, №6. С. 779 – 788.

10. *Самойленко А.М., Бурилко А.А.* Питання гладкості функцій Гріна задачі про обмежені многовиди // Укр. мат. журн. 1998. Т. 51, №4. С. 570 – 584.