УДК 517.983

©2016 р. Т. І. Звоздецький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛІВИХ ОБЕРНЕНИХ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Отримано критерій δ-еквівалентності в просторах послідовностей оператора узагальненого диференціювання та довільного оператора, який є лівим оберненим до узагальненого інтегрування.

It is obtained a criterium of the δ-similarity of the generalized differentiation operator and the left inverse to the generalized integration operator in sequence spaces.

1. Вступ.

У роботах [1-4] було встановлено еквівалентність у певних просторах аналітичних функцій будь-якого оператора, який є лівим оберненим до n-го ($n \in \mathbb{N}$) степеня оператора звичайного чи узагальненого інтегрування, до n-го степеня оператора звичайного чи узагальненого диференціювання відповідно. Крім цього, в роботі [5] отримано умови еквівалентності в певних просторах аналітичних функцій будь-якого оператора, який є лівим оберненим до n-го степеня оператора множення на незалежну змінну, до n-го степеня оператора Помм'є. Оскільки деякі простори аналітичних функцій, що наділені топологією компактної збіжності, топологічно ізоморфні до відповідних просторів послідовностей із нормальною топологією Кете, то природно розглянути аналогічну задачу стосовно операторів узагальненого інтегрування та диференціювання і для певних класів просторів послідовностей. У даній роботі отримано необхідні й достатні умови δ-еквівалентності в досить широких класах просторів послідовностей оператора узагальненого диференціювання та довільного оператора, який є лівим оберненим до узагальненого інтегрування. Зауважимо, що одержані тут результати цілком узгоджуються з результатами робіт [1-5].

Нехай X – деякий векторний простір послідовностей комплексних чисел $x = (x_m)_{m=0}^{\infty}$ над полем $\mathbb{C}$, що містить усі фінітні послідовності, а

$$X^{\alpha} = \{u = (u_m)_{m=0}^{\infty} : \sum_{m=0}^{\infty} |u_m x_m| < +\infty, \ \forall\, x \in X\} -$$

двоїстий до нього простір. Для кожного $u \in X^{\alpha}$ через p_u позначатимемо переднорму на X, яка визначається формулою

$$p_u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |u_m x_m|, \ x \in X.$$

Вважатимемо надалі, що простір X наділений нормальною топологією Кете [6], яка задається набором переднорм $\{p_u : u \in X^{\alpha}\}$.

Зафіксуємо послідовність відмінних від нуля комплексних чисел $\alpha = (\alpha_m)_{m=0}^{\infty}$ і для $x \in X$ через $\mathcal{D}_{\alpha}x$ та $\mathcal{I}_{\alpha}x$ позначатимемо відповідно такі послідовності:

$\mathcal{D}_{\alpha}x = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}x_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_2, ..., \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}}\, x_{m+1}, ...\right),$

$\mathcal{I}_{\alpha}x = \left(0, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}x_0, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_1, ..., \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}\, x_{m-1}, ...\right).$

Припустимо, що простір X має такі властивості:

В1) X – досконалий, тобто $X^{\alpha\alpha} = X$;

В2) $\forall\, x \in X : \ x' = (m\, x_m)_{m=0}^{\infty} \in X$;

В3) $\forall\, x \in X : \ \mathcal{D}_{\alpha}x \in X$;

В4) $\forall v \in X^{\alpha}\, \exists u \in X^{\alpha}\, \forall m, k = 0, 1, ... :$

$$\left|\frac{\alpha_0\, \alpha_{m+k+1}}{\alpha_m\, \alpha_k}\right| |v_{m+k+1}| < |u_m\, u_k|.$$

Відзначимо, що досконалість простору X рівносильна його повноті відносно нормальної топології Кете [6]. Властивість В2) мають при досить загальних умовах простори,

що входять у класифікацію [7, с. 31] (зокрема, й простори послідовностей, що ізоморфні до різних просторів аналітичних функцій). З наведеного вище означення операторів $\mathcal{D}_\alpha$ та $\mathcal{I}_\alpha$, а також з умов В3) і В4) відповідно випливає, що ці оператори лінійно та неперервно діють у просторі X. Називатимемо надалі оператори $\mathcal{D}_\alpha$ та $\mathcal{I}_\alpha$ відповідно операторами узагальненого диференціювання та інтегрування, породженими послідовністю α.

Для $m = 0, 1, 2, ...$ покладемо

$$e^{(m)} = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{m+1}, 0, \dots) \in X.$$

Відзначимо, що система всіх ортів $\{e^{(m)}\}_{m=0}^\infty$ утворює базис простору X [6]. Тому для кожного $x \in X$ маємо, що

$$x = \sum_{m=0}^\infty x_m e^{(m)},$$

$$\mathcal{D}_\alpha x = \sum_{m=0}^\infty \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} x_{m+1}\, e^{(m)},$$

$$\mathcal{I}_\alpha x = \sum_{m=1}^\infty \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} x_{m-1}\, e^{(m)}.$$

Зауважимо, що для всіх $x \in X$

$$\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{I}_\alpha x) = x, \quad \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{D}_\alpha x) = x - x_0 e^{(0)}.$$

У роботі [8] доведено, що при зроблених вище припущеннях щодо послідовності α та простору X для всіх $x, y \in X$ формулою

$$x * y = \sum_{m,k=0}^\infty \frac{\alpha_0 \alpha_{m+k+1} x_m y_k}{\alpha_m\, \alpha_k} e^{(m+k+1)} =$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_0\, \alpha_m\, x_{m-k-1}\, y_k}{\alpha_{m-k-1}\, \alpha_k} \right) e^{(m)},$$

визначається нетривіальна згортка для оператора $\mathcal{I}_\alpha$ на X, причому

$$\mathcal{I}_\alpha x = e^{(0)} * x, \quad x \in X.$$

Пригадаємо, що згорткою для лінійного неперервного оператора $M : X \to X$ в топологічному векторному просторі X називається нарізно неперервна, білінійна, комутативна й асоціативна операція $* : X \times X \to X$, для якої

$$M(x * y) = (Mx) * y, \quad x, y \in X.$$

Кажуть, що згортка $*$ нетривіальна, якщо вона не має в просторі X ануляторів, тобто таких ненульових елементів $x \in X$, що $x * y = 0$ для всіх $y \in X$.

Позначимо через δ лінійний неперервний функціонал на X, для якого $\delta(x) = x_0$ при $x = (x_m)_{m=0}^\infty \in X$. Зафіксуємо $a \in X$ і розглянемо лінійний неперервний оператор A на X, який визначається рівністю

$$Ax = \mathcal{D}_\alpha x + \delta(x)\, a, \quad x \in X. \tag{1}$$

Зауважимо, що цією формулою дається загальний вигляд лінійних неперервних операторів на X, які є лівими оберненими до оператора $\mathcal{I}_\alpha$.З'ясуємо умови, при яких оператор A вигляду (1) еквівалентний у просторі X до оператора $\mathcal{D}_\alpha$.

Нагадаємо, що лінійні неперервні оператори $B : X \to X$ та $C : X \to X$ називаються еквівалентними в X, якщо існує такий ізоморфізм $T : X \to X$, для якого $BT = TC$. Якщо при цьому ізоморфізм T задовольняє додатково умову $\delta(Tx) = \delta(x)$ для всіх $x \in X$, то ми називатимемо оператори B та C δ-еквівалентними в X.

2. Критерій δ-еквівалентності операторів A та $\mathcal{D}_\alpha$ в просторах послідовностей.

Теорема 1. *Нехай для деякого векторного простору X послідовностей комплексних чисел над полем $\mathbb{C}$, що містить усі фінітні послідовності й наділений нормальною топологією Кете, та фіксованої послідовності $\alpha = (\alpha_m)_{m=0}^\infty$ відмінних від нуля комплексних чисел виконуються умови В1)–В4), a – фіксований елемент з X. Тоді такі умови рівносильні:*

(*i*) *оператор A вигляду (1) δ-еквівалентний в X до оператора $\mathcal{D}_\alpha$;*

(*ii*) *оператор T, який на $x \in X$ діє за правилом*

$$Tx = x - a * x,$$

є ізоморфізмом простору X на себе;

(*iii*) *існує такий елемент $b \in X$, для якого*

$$b = a + a * b. \tag{2}$$

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай оператори A та $\mathcal{D}_\alpha$ δ-еквівалентні в X, тобто існує такий ізоморфізм $T : X \to X$, для якого при $x \in X$

$$A(Tx) = T(\mathcal{D}_\alpha x) \tag{3}$$

і

$$\delta(Tx) = \delta(x). \tag{4}$$

З'ясуємо, як діє оператор T на довільний елемент $x \in X$. Для цього досить знайти дію оператора T на кожен орт $e^{(k)}$, де $k = 0, 1, 2, \dots$.

Покладемо в рівності (3) $x = e^{(0)}$. Позначивши $Te^{(0)} = \varphi^{(0)} = \big(\varphi_m^{(0)}\big)_{m=0}^{\infty}$ та врахувавши, що $T(\mathcal{D}_\alpha e^{(0)}) = 0$ і

$$A(Te^{(0)}) = \mathcal{D}_\alpha(Te^{(0)}) + \delta(Te^{(0)})\, a = \\ = \mathcal{D}_\alpha \varphi^{(0)} + \delta(e^{(0)})\, a = \mathcal{D}_\alpha \varphi^{(0)} + a,$$

одержимо, що $\mathcal{D}_\alpha \varphi^{(0)} = -a$. Тому

$$\varphi_m^{(0)} = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}\, a_{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Крім цього, згідно з (4),

$$\varphi_0^{(0)} = \delta(Te^{(0)}) = \delta(e^{(0)}) = 1.$$

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і покладемо в (3) $x = e^{(k)}$. Якщо позначити $Te^{(k)} = \varphi^{(k)} = \big(\varphi_m^{(k)}\big)_{m=0}^{\infty}$ і врахувати, що

$$T(\mathcal{D}_\alpha e^{(k)}) = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\, \varphi^{(k-1)},$$

$$A(Te^{(k)}) = \mathcal{D}_\alpha \varphi^{(k)} + \delta(\varphi^{(k)})\, a = \mathcal{D}_\alpha \varphi^{(k)},$$

бо $\delta(\varphi^{(k)}) = \delta(e^{(k)}) = 0$ згідно з (4), то отримаємо, що

$$\varphi_m^{(k)} = \frac{\alpha_m\, \alpha_{k-1}}{\alpha_{m-1}\, \alpha_k}\, \varphi_{m-1}^{(k-1)}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Якщо $m < k$, то, використовуючи (6) і (4), маємо, що

$$\varphi_m^{(k)} = \frac{\alpha_m\, \alpha_{k-m}}{\alpha_0\, \alpha_k}\, \varphi_0^{(k-m)} = 0.$$

Якщо $m = k$, то з (6) одержимо, що

$$\varphi_k^{(k)} = \varphi_0^{(0)} = 1.$$

Якщо ж $m > k$, то з (6) і (5) отримаємо, що

$$\varphi_m^{(k)} = \frac{\alpha_m\, \alpha_0\, \varphi_{m-k}^{(0)}}{\alpha_{m-k}\, \alpha_k} = -\frac{\alpha_0\, \alpha_m\, a_{m-k-1}}{\alpha_{m-k-1}\, \alpha_k}.$$

Отже, для $x \in X$

$$Tx = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{(k)}\, e^{(m)} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varphi_m^{(k)} e^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty} x_m e^{(m)} - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_0\, \alpha_m\, a_{m-k-1}\, x_k}{\alpha_{m-k-1}\, \alpha_k} \right) e^{(m)} = \\ = x - a * x.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Оскільки T – ізоморфізм простору X, то існує таке $b \in X$, що $Tb = a$. Тоді

$$a = Tb = b - a * b,$$

тобто для елемента $b \in X$ виконується рівність (2).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай для деякого $b \in X$ виконується рівність (2). Розглянемо на просторі X оператори T і T_1, які для кожного $x \in X$ визначаються рівностями

$$Tx = x - a * x, \quad T_1 x = x + b * x.$$

Враховуючи білінійність згортки $*$ та рівність (2), легко переконатися, що для всіх $x \in X$

$$T(T_1 x) = T_1(Tx) = x,$$

тому оператор T є ізоморфізмом простору X на себе. Оскільки, очевидно, $\delta(a * x) = 0$, то $\delta(Tx) = \delta(x - a * x) = \delta(x)$ для $x \in X$. Крім цього, для всіх $x \in X$

$$A(Tx) = \mathcal{D}_\alpha x - \mathcal{D}_\alpha(a * x) + \delta(Tx)\, a = \\ = \mathcal{D}_\alpha x - \mathcal{D}_\alpha\big(a * \big[\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{D}_\alpha x) + x_0 e^{(0)}\big]\big) + \\ + \delta(x)\, a = \mathcal{D}_\alpha x - \mathcal{D}_\alpha(a * [\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{D}_\alpha x)]) - \\ - x_0\, \mathcal{D}_\alpha(a * e^{(0)}) + x_0\, a = \mathcal{D}_\alpha x - \\ - a * (\mathcal{D}_\alpha x) - x_0\, \mathcal{D}_\alpha(\mathcal{I}_\alpha a) + x_0\, a = \\ = \mathcal{D}_\alpha x - a * (\mathcal{D}_\alpha x) = T(\mathcal{D}_\alpha x).$$

Отже, оператори A та $\mathcal{D}_\alpha$ δ-еквівалентні в X. Теорема доведена.

Зауваження. Нехай простір X та послідовність α такі ж як у теоремі 1 і простір X додатково є бочковим (наприклад, простором Фреше). Відзначимо, що в цьому випадку для кожної поточково збіжної послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ лінійних неперервних операторів у X оператор S, який є поточковою

границею цієї послідовності, лінійно й неперервно діє в X.

Якщо для фіксованого $a \in X$ і лінійного й неперервного на X оператора B, який для $x \in X$ визначається формулою

$$Bx = a * x, \tag{7}$$

операторний ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} B^s$ поточково збігається в X, то оператор $T = E - B$, де E – тотожний оператор в X, є ізоморфізмом простору X на себе, оскільки

$$T^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} B^s.$$

Отже, в цьому випадку виконується умова (ii) з теореми 1.

3. Умови δ-еквівалентності деяких операторів у просторах аналітичних функцій.

Для $R \in (0; +\infty]$ розглянемо простір послідовностей

$$X_R = \left\{(x_m)_{m=0}^{\infty} : \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|x_m|} \leq \tfrac{1}{R}\right\}.$$

Відзначимо, що

$$X_R^{\alpha} = \{(u_m)_{m=0}^{\infty} : \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|u_m|} < R\}$$

і простір X_R із нормальною топологією Кете топологічно ізоморфний до простору $\mathcal{A}_R$ аналітичних у крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функцій із топологією компактної збіжності.

Використовуючи теорему 1, для деяких послідовностей α отримаємо умови δ-еквівалентності в просторі $\mathcal{A}_R$ відповідних операторів $\mathcal{D}_\alpha$ та $A = \mathcal{D}_\alpha + a\delta$, де $a \in \mathcal{A}_R$ – фіксована функція, а $\delta(f) = f(0)$ для $f \in \mathcal{A}_R$.

1) Нехай $\alpha_m = \frac{1}{m!}$ для $m = 0, 1, \ldots$. Оскільки в цьому випадку оператору узагальненого диференціювання в X_R відповідає оператор звичайного диференціювання $\mathcal{D}$ в $\mathcal{A}_R$, який на функцію $f \in \mathcal{A}_R$ діє за правилом

$$(\mathcal{D}f)(z) = f'(z), \quad z \in K_R,$$

то позначатимемо цей оператор узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_\alpha$ в X_R через $\mathcal{D}$.

Нескладно переконатися, що простір X_R і послідовність α задовольняють умови B1)-B4). Враховуючи, що X_R є простором Фреше (бо таким є простір $\mathcal{A}_R$), маємо, що простір X_R бочковий. Зауважимо також, що для розглянутої послідовності α та довільного простору X умова B3) випливає з умов B2) і

B3$'$) $\forall\, x \in X : \ \Delta x = (x_{m+1})_{m=0}^{\infty} \in X$,

оскільки $\mathcal{D}x = \Delta x'$ для $x \in X$.

Зафіксуємо $a \in X_R$ і для лінійного та неперервного на X_R оператора B вигляду (7) доведемо, що операторний ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} B^s$ поточково збігається на X_R. Для цього зафіксуємо $x \in X_R$ та $v \in X_R^{\alpha}$ і переконаємося індукцією відносно s, що виконується умова

$$\exists\, C > 0\ \exists\, M > 0\ \forall\, s = 0, 1, 2, \ldots :$$

$$p_v(B^s x) \leq C\,\frac{M^s}{s!}. \tag{8}$$

Оскільки $v \in X_R^{\alpha}$, то

$$\exists C_1 > 0 \exists r_1 < R\, \forall m = 0, 1, 2, \ldots : |v_m| \leq C_1 r_1^m.$$

З того, що $a, x \in X_R$, маємо, що

$$\exists\, C_2 > 0\ \exists\, r_2\, (r_1 < r_2 < R)\ \forall\, m = 0, 1, 2, \ldots :$$

$$|a_m| \leq \frac{C_2}{r_2^m}, \quad |x_m| \leq \frac{C_2}{r_2^m}.$$

Тоді

$$p_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |v_m x_m| \leq C_1 C_2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m = C,$$

де $C = \frac{C_1 C_2 r_2}{r_2 - r_1}$.

Відзначимо, що $(Bx)_0 = 0$, а при $m \geq 1$

$$(Bx)_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!\, a_k\, x_{m-k-1}}{m \ldots (m-k)},$$

звідки

$$|(Bx)_m| \leq \frac{C_2^2}{m r_2^{m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k}{m-1} \ldots \frac{1}{m-k} \leq \frac{C_2^2}{r_2^{m-1}}.$$

Тому

$$p_v(Bx) \leq C_1 C_2^2 r_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m-1} = C\,\frac{M}{1!},$$

де $M = C_2 r_1$. Отже, є такі додатні сталі C та M, для яких нерівність з умови (8) виконується при $s = 0$ та $s = 1$.

Припустимо, що для деякого $s \in \mathbb{N}$

$$(B^s x)_0 = (B^s x)_1 = \ldots = (B^s x)_{s-1} = 0,$$

а при $m \geq s$

$$|(B^s x)_m| \leq \frac{(m-s+1)!\, C_2^{s+1}}{m!\, r_2^{m-s}},$$

звідки матимемо, що

$$p_v(B^s x) \le \frac{C_1 C_2^{s+1} r_1^s}{s!} \sum_{m=s}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m-s} = C\,\frac{M^s}{s!}.$$

Доведемо, що тоді

$$(B^{s+1}x)_0 = ... = (B^{s+1}x)_s = 0,$$

а при $m \ge s+1$

$$|(B^{s+1}x)_m| \le \frac{(m-s)!\, C_2^{s+2}}{m!\, r_2^{m-s-1}}.$$

Справді, оскільки

$$B^{s+1}x = a * (B^s x) =$$

$$= \sum_{m=s+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-s-1} \frac{k!\, a_k\, (B^s x)_{m-k-1}}{m \dots (m-k)}\, e^{(m)},$$

то

$$(B^{s+1}x)_0 = ... = (B^{s+1}x)_s = 0$$

і при $m \ge s+1$

$$|(B^{s+1}x)_m| \le \sum_{k=0}^{m-s-1} \frac{k!\, |a_k|\, |(B^s x)_{m-k-1}|}{m \dots (m-k)} \le$$

$$\le \frac{C_2^{s+2}}{m(m-1)\dots(m-s+1)\, r_2^{m-s-1}} \times$$

$$\times \frac{1}{m-s} \sum_{k=0}^{m-s-1} \frac{k}{m-s-1} \cdots \frac{2}{m-k-s+1} \le$$

$$\le \frac{(m-s)!\, C_2^{s+2}}{m!\, r_2^{m-s-1}}.$$

Тоді

$$p_v(B^{s+1}x) \le \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{C_1\, C_2^{s+2}\, r_1^m}{m \dots (m-s+1)\, r_2^{m-s-1}} \le$$

$$\le \frac{C_1\, C_2\, (C_2 r_1)^{s+1}}{(s+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m = C\,\frac{M^{s+1}}{(s+1)!}.$$

Отже, виконується умова (8). Тому операторний ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} B^s$ поточково збігається на X_R. Враховуючи зауваження, зроблене після теореми 1, отримуємо, що для кожного $a \in X_R$ оператор $A = \mathcal{D} + a\delta$ δ-еквівалентний в X_R до оператора $\mathcal{D}$. Тому правильна така теорема.

Теорема 2. *Для кожної функції $a \in \mathcal{A}_R$ оператори $A = \mathcal{D} + a\delta$ та $\mathcal{D}$ δ-еквівалентні в $\mathcal{A}_R$.*

Зауважимо, що теорема 2 є частковим випадком відповідних результатів з [1, 2, 4].

2) Нехай для $\varrho > 0$ та $m = 0, 1, 2, ...$

$$\alpha_m = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{\varrho} + 1)}. \tag{9}$$

Відзначимо, що в цьому випадку відповідний оператор узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_\alpha$ є узагальненим диференціюванням Гельфонда-Леонтьєва [9], оскільки для послідовності α правильне співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} m^{\frac{1}{\varrho}} \sqrt[m]{|\alpha_m|} < +\infty. \tag{10}$$

Міркуваннями, подібними до наведених у підпункті 1) цього пункту, можна довести, що для фіксованих $a, x \in X_R$ і $v \in X_R^\alpha$ та оператора B вигляду (7) виконується умова

$$\exists\, C > 0\ \exists\, M > 0\ \forall\, s = 0, 1, 2, ... :$$

$$p_v(B^s x) \le C\,\frac{M^s}{\Gamma(\frac{s}{\varrho} + 1)},$$

а тому правильна така теорема.

Теорема 3. *Для послідовності α вигляду (9) та кожної функції $a \in \mathcal{A}_R$ оператори $A = \mathcal{D}_\alpha + a\delta$ та $\mathcal{D}_\alpha$ δ-еквівалентні в $\mathcal{A}_R$.*

Зауважимо, що теорема 3 є частковим випадком відповідних результатів з [3].

3) Нехай для $g > 0$ та $\varrho > 0$

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_m = \frac{g^m}{m^{\frac{m}{\varrho}}},\ m = 1, 2, \dots. \tag{11}$$

Відзначимо, що в цьому випадку відповідний оператор узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_\alpha$ також є узагальненим диференціюванням Гельфонда-Леонтьєва, оскільки для цієї послідовності α також правильне співвідношення (10).

Оскільки можна довести, що для фіксованих $a, x \in X_R$ і $v \in X_R^\alpha$ та оператора B вигляду (7) виконується умова

$$\exists\, C > 0\ \exists\, M > 0\ \forall\, s = 1, 2, ... :$$

$$p_v(B^s x) \le C\,\frac{M^s}{s^{\frac{s}{\varrho}}},$$

то правильна така теорема.

Теорема 4. *Для послідовності α вигляду (11) та кожної функції $a \in \mathcal{A}_R$ оператори $A = \mathcal{D}_\alpha + a\delta$ та $\mathcal{D}_\alpha$ δ-еквівалентні в $\mathcal{A}_R$.*

4) Нехай $\alpha_m = 1$ для всіх $m = 0, 1, \ldots$. Позначатимемо в цьому випадку оператор $\mathcal{D}_\alpha$ в X_R через Δ, оскільки відповідний оператор в просторі аналітичних функцій $\mathcal{A}_R$ збігається з оператором Помм'є Δ, який на функцію $f \in \mathcal{A}_R$ діє за правилом

$$\Delta f(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Зафіксуємо $a \in X_R$. Оскільки, очевидно, умови B1)-B4) виконуються, то з теореми 1 отримуємо, що оператори $\Delta + a\delta$ та Δ є δ-еквівалентними в X_R тоді й лише тоді, коли існує таке $b \in X_R$, для якого виконується рівність (2). Враховуючи, що відповідна рівність між функціями $a(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m \in \mathcal{A}_R$ та $b(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m z^m \in \mathcal{A}_R$ має вигляд

$$b(z) = a(z) + za(z)b(z), \quad z \in K_R,$$

одержуємо таку теорему.

Теорема 5. *Нехай $a \in \mathcal{A}_R$. Оператори $A = \Delta + a\delta$ та Δ δ-еквівалентні в $\mathcal{A}_R$ тоді й лише тоді, коли*

$$1 - za(z) \neq 0, \quad z \in K_R.$$

Зауважимо, що теорема 5 є частковим випадком відповідних результатів з [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Линчук С. С., Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических в круге функций // Математика сегодня'89. Научно-метод. сб. – 1989. – **5**. – С. 47-62.

2. *Звоздецький Т. І.* Про еквівалентність лівих обернених до степеня інтегрування операторів у просторах аналітичних функцій // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2001. – **111**. – С. 51-54.

3. *Звоздецький Т. І.* Про еквівалентність у просторах аналітичних функцій операторів, які є лівими оберненими до степеня узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва // Мат. студії.– 2005.– **23**, № 2.– С.83-88.

4. *Фишман К. М.* Об эквивалентности некоторых линейных операторов в аналитическом пространстве // Мат. сборник. – 1965. – **68**, № 1. – С. 63-74.

5. *Лінчук Н. Є., Лінчук С. С.* Про еквівалентність операторів Помм'є в просторі аналітичних в області функцій// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2002. – **134**. – С. 61-64.

6. *Köthe G.* Topologische lineare Räume. Bd. 1. – Berlin, 1960. – 307 p.

7. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 160 с.

8. *Звоздецький Т. І., Лінчук С. С.* Про згортки в просторах послідовностей // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 1999. – **46**. – С. 44-49.

9. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – **29**, № 3. – С. 477-500.