УДК 517.925

©2015 р. Ю.Ю.Король

Ужгородський національний університет

ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ЛІНІЙНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглядається вироджена система, яка зводиться до центральної канонічної форми, і при цьому відповідна однорідна невироджена система експоненціально-дихотомічна на півосях. Отримано необхідну у достатню умову існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

We consider a degenerate system which can be reduced to the central canonical form and such that the corresponding homogeneous nondegenerate system is exponentially dichotomous on the semiaxes. We obtain a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a solution bounded on the whole axis of degenerate system of differential equations with impulse action at fixed points of time.

При складанні математичних моделей багатьох практичних задач, які виникають у теорії електричних кіл, теорії керування, автоматичному регулюванні, робототехніці, радіофізиці, математичній економіці тощо, дослідники приходять до задач, які описуються диференціальними рівняннями

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

з виродженою матрицею при похідній.

Важливий внесок у розвиток теорії вироджених систем внесли американські математики С.Кемпбелл і Л.Петцольд [1], які ввели поняття центральної канонічної форми(ЦКФ) і показали що розв'язок виродженої системи має найпростішу структуру, якщо вона зводиться до ЦКФ. Розвитку загальної теорії цих систем присвячено значну кількість праць російських математиків: Бояринцева Ю.Е., Чистякова В.Ф., Данилова В.О., Логінова О.О. [2]. В подальших дослідженнях А.М.Самойленка, М.І.Шкіля, В.П.Яковця [3],було знайдено достатні умови звідності виродженої системи до ЦКФ. Беручи до уваги ці результати та результати [4-6], з'ясуємо питання існування і єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи з імпульсною дією, у припущенні що вона зведена до центральної канонічної форми

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(t), \tag{1}$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i x_1 + b_i; \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $x = col(x_1, x_2)$, де $x_1(t), x_2(t)-$ $n-s$ і $s-$вимірні вектори, $M(t), f(t)$ - неперервні(кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$ відповідно матрична і векторна функції; $f = col(f_1, f_2)$, $f_1(t) \in \mathbb{R}^{n-s}$, $f_2(t) \in \mathbb{R}^s$, $f_2(t) \in \mathbb{C}^{s-1}(\mathbb{R})$; E_s - одинична матриця порядку s; B_i і b_i - сталі матриці і вектори, які відповідно рівномірно відносно $i \in \mathbb{Z}$ обмежені $det(E_{n-s} + B_i) \neq 0$ для будь-яких $t = \tau_i$. Послідовність моментів τ_i занумерована множиною цілих чисел так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Крім того, припускається, що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{i(t, t+T)}{T} = p < \infty \tag{3}$$

рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$. Ця умова рівносильна тому, що можна вказати такі числа l і натуральне q, що будь-який проміжок числової осі довжини l містить не більше q точок послідовності $\{\tau_i\}$.

Як показано в [2], система (1) може бути розщеплена на два незалежних рівняння:

$$\frac{dx_1}{dt} = M(t)x_1 + f_1(t), \tag{4}$$

$$I\frac{dx_2}{dt} = x_2 + f_2(t), \tag{5}$$

Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x_1(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)f_1(s)ds. \tag{6}$$

де $c-(n-s)$-вимірний сталий вектор, $X(t)-$ фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_1}{dt} = M(t)x_1. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (5) можемо записати у вигляді

$$x_2(t) = r(t) = -\sum_{k=0}^{s-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} f_2(t), \tag{8}$$

Тоді об'єднавши (6) і (8) отримаємо загальний розв'язок системи (1) без імпульсів

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)f_1(s)ds \\ -\sum\limits_{k=0}^{s-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} f_2(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Знайдемо умови існування розв'язку системи (1) обмеженого на всій осі в припущенні, що система (7) задовольняє експоненціальній дихотомії на півосях, тобто існують проектори U та $V(U^2 = U, V^2 = V)$ і константи $K_i \geq 1, \alpha_i > 0 (i = 1, 2)$ такі, що виконуються наступні нерівності:

$$\begin{gathered} \|\Omega^+(t,s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \left\|\tilde{\Omega}^+(t,s)\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad s \geq t, \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \\ \|\Omega^-(t,s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \left\|\tilde{\Omega}^-(t,s)\right\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad s \geq t, \quad t, s \in \mathbb{R}_-, \end{gathered} \tag{10}$$

де

$$\begin{gathered} \|\Omega^+(t,s)\| = \| X(t)UX^{-1}(s) \|, \\ \left\|\tilde{\Omega}^+(t,s)\right\| = \| X(t)(I-U)X^{-1}(s) \|, \\ \|\Omega^-(t,s)\| = \| X(t)VX^{-1}(s) \|, \\ \left\|\tilde{\Omega}^-(t,s)\right\| = \| X(t)(I-V)X^{-1}(s) \| . \end{gathered}$$

Загальний розв'язок системи (1) обмежений на півосі має вигляд

$$x(t,\xi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t,0)\xi + \\ + \int\limits_0^t \Omega^+(t,s)f_1(s)ds - \\ - \int\limits_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t,s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, \ t \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t,0)\xi + \\ + \int\limits_{-\infty}^t \Omega^-(t,s)f_1(s)ds - \\ - \int\limits_t^0 \tilde{\Omega}^-(t,s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, \ t \leq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Покажемо, що цей розв'язок обмежений. Дійсно

$$\begin{gathered} \| \Omega^+(t,0)\xi \| \leq \| \Omega^+(t,0) \| \| \xi \| \leq \\ \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} \| \xi \|, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \left\| \int\limits_0^t \Omega^+(t,s)f_1(s)ds \right\| \leq \\ \leq \int\limits_0^t \|\Omega^+(t,s)\| \, \|f_1(s)\| \, ds \leq \\ \leq \frac{K_1}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}) \, ||| \, f_1 \, ||| \, . \end{gathered}$$

Обмеженість інших інтегралів доводиться аналогічним чином. Вираз (11) визначає обмежені розв'язки на всій дійсній осі тоді і тільки тоді, коли

$$x(0+,\xi) - x(0-,\xi) = 0, \tag{12}$$

Тобто, розв'язок (11) буде обмеженим на $\mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли сталий вектор $\xi \in \mathbb{R}^{n-s}$ є розв'язком алгебраїчної системи:

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^-(0,s)f_1(s)ds + \int\limits_0^\infty \tilde{\Omega}^+(0,s)f_1(s)ds, \tag{13}$$

де $D = U - (I - V)$ - $(n-s) \times (n-s)$-вимірна матриця. Ця алгебраїчна система розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\begin{gathered} P_{D^*}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^-(0,s)f_1(s)ds + \right. \\ \left. + \int\limits_0^\infty \tilde{\Omega}^+(0,s)f_1(s)ds \right\} = 0 \end{gathered}$$

де P_{D^*} - $(n-s)\times(n-s)$-вимірна матриця ортопроектор. В цьому випадку, загальний розв'язок системи (1) обмежений на $\mathbb{R}$ має форму (11), де константа $\xi\in\mathbb{R}^{n-s}$ визначається з системи (13) наступним чином:

$$\xi = P_D c + D^+\Theta,$$

$$\Theta = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^-(0,s)f_1(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0,s)f_1(s)ds, \tag{14}$$

де $c\in\mathbb{R}^{n-s}$; D^+ - псевдообернена по Муру-Пенроузу матриця до матриці D. Оскільки $P_{D^*}D=0$, тоді $P_{D^*}V = P_{D^*}(I-U)$. Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку системи (1) має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0,s)f_1(s)ds = 0. \tag{15}$$

Якщо підставимо константу ξ в (11), ми отримаємо загальний розв'язок системи (1) обмежений на всій дійсній осі у вигляді

$$x(t,c) = \\ = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t,0)P_Dc + \Omega^+(t,0)D^+\Theta + \\ +\int\limits_0^t \Omega^+(t,s)f_1(s)ds - \\ -\int\limits_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t,s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t\ge 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t,0)P_Dc + \tilde{\Omega}^-(t,0)D^+\Theta + \\ +\int\limits_{-\infty}^t \Omega^-(t,s)f_1(s)ds - \\ -\int\limits_t^0 \tilde{\Omega}^-(t,s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t\le 0. \end{cases} \tag{16}$$

Розглянемо питання існування обмежених на всій осі розв'язків диференціально-алгебраїчної системи з імпульсною дією в фіксовані моменти часу (1), (2). Для цього припустимо, що відповідна однорідна імпульсна система

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = M(t)x_1, \\ \Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i x_1 \end{gathered} \tag{17}$$

експоненціально-дихотомічна на півосях, тобто існують проектори U та $V (U^2 = U, V^2 = V)$ і константи $K_i \ge 1, \alpha_i > 0 (i = 1,2)$ такі, що виконуються нерівності (10), де $X(t)$ - фундаментальна матриця системи (17). Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що лінійна однорідна імпульсна система* (17) *експоненціально-дихотомічна на півосях $R_- = (-\infty,0]$ і $R_+ = [0,\infty)$ з проекторами U та V відповідно, функція $f_2(t)\in\mathbb{C}^{s-1}(\mathbb{R})$, а також виконується нерівність* (3), *тоді справедливі наступні твердження:*

1. *для існування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку диференціально-алгебраїчної системи* (1), (2) *необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:*

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0,s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0,\tau_i)b_i + b_0 = 0; \end{gathered} \tag{18}$$

2. *за умови* (18), *розв'язок системи* (1), (2) *обмежений на всій осі має вигляд*

$$x(t,c) = \\ = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t,0)P_Dc + \\ +\Omega^+(t,0)D^+\Theta + \\ +\int\limits_0^t \Omega^+(t,s)f_1(s)ds - \\ -\int\limits_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t,s)f_1(s)ds + \\ +\sum\limits_{i=1}^{j} \Omega^+(t,\tau_i)b_i - \\ -\sum\limits_{i=j+1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t,\tau_i)b_i \\ r(t) \end{bmatrix}, & t\ge 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t,0)P_Dc + \\ +\tilde{\Omega}^-(t,0)D^+\Theta + \\ +\int\limits_{-\infty}^t \Omega^-(t,s)f_1(s)ds - \\ -\int\limits_t^0 \tilde{\Omega}^-(t,s)f_1(s)ds + \\ +\sum\limits_{i=-\infty}^{-(j+1)} \Omega^-(t,\tau_i)b_i - \\ -\sum\limits_{i=-j}^{-1} \tilde{\Omega}^-(t,s)b_i \\ r(t) \end{bmatrix}, & t\le 0. \end{cases} \tag{19}$$

де

$$\Theta = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^{-}(0,s)f_1(s)ds + \\ + \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^{-}(0,\tau_i)b_i + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,\tau_i)b_i + b_0$$

Доведення. Аналогічно як для диференціально-алгебраїчної системи без імпульсів, запишемо загальний розв'язок системи (1), (2) обмежений на півосях у вигляді

$$x(t,\xi) = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} \Omega^{+}(t,0)\xi + \\ + \int\limits_{0}^{t} \Omega^{+}(t,s)f_1(s)ds - \\ - \int\limits_{t}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(t,s)f_1(s)ds + \\ + \sum\limits_{i=1}^{j} \Omega^{+}(t,\tau_i)b_i - \\ - \sum\limits_{i=j+1}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(t,\tau_i)b_i, \\ r(t) \end{array}\right] & t \geq 0 \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{\Omega}^{-}(t,0)\xi + \\ + \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega^{-}(t,s)f_1(s)ds - \\ - \int\limits_{t}^{0} \tilde{\Omega}^{-}(t,s)f_1(s)ds + \\ + \sum\limits_{i=-\infty}^{-(j+1)} \Omega^{-}(t,\tau_i)b_i - \\ - \sum\limits_{i=-j}^{-1} \tilde{\Omega}^{-}(t,\tau_i)b_i, \\ r(t) \end{array}\right] & t \leq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Припускаємо, що розв'язок неперервний у точці $t = 0$

$$x(0+,\xi) - x(0-,\xi) = b_0,$$

тобто розв'язок (20) буде обмежений на $\mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ задовольняє умову

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^{-}(0,s)f_1(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,\tau_i)b_i + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^{-}(0,\tau_i)b_i + b_0. \tag{21}$$

Ця система, в свою чергу, розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D^*}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^{-}(0,s)f_1(s)ds + \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,s)f_1(s)ds + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,\tau_i)b_i + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^{-}(0,\tau_i)b_i + b_0 \right\} = 0.$$

В цьому випадку, розв'язок системи (1), (2) обмежений на $\mathbb{R}$ буде мати вигляд (20), де сталий вектор ξ визначається з системи (21) наступним чином:

$$\xi = P_D c + D^{+}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^{-}(0,s)f_1(s)ds + \right. \\ + \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,s)f_1(s)ds + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^{+}(0,\tau_i)b_i + \\ \left. + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^{-}(0,\tau_i)b_i + b_0 \right\}. \tag{22}$$

Оскільки $P_{D^*}D = 0$, отримаємо $P_{D^*}V = P_{D^*}(I-U)$. Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку (1), (2) має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^{-}(0,s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^{-}(0,\tau_i)b_i + b_0 = 0.$$

Покажемо, що розв'язок (19) обмежений. Розглянемо перші $n-s$ рядків цього розв'язку у випадку коли $t > 0$ і доведемо збіжність відповідних інтегралів і сум.

$$\left\|\Omega^{+}(t,0)P_D c\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} P_D c = K_3 e^{-\alpha_1 t},$$

$$\|\Omega^{+}(t,0)D^{+}\Theta\| \leq \\ \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} D^{+}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} K_2 e^{\alpha_2 s}\|f_1(s)\| ds + \right. \\ + \int\limits_{0}^{\infty} K_1 e^{-\alpha_1 s}\|f_1(s)\| ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{-1} K_2 e^{\alpha_2 \tau_i}\|b_i\| + \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} K_1 e^{-\alpha_1 \tau_i}\|b_i\| + \|b_0\| \right\} \leq \\ \leq K_4 e^{-\alpha_1 t}\left\{ \left[\frac{K_2}{\alpha_2} + \frac{K_1}{\alpha_1}\right]\|f_1(t)\| + \right. \\ \left. + \left[\frac{K_2}{1-e^{\alpha_2}} + \frac{K_1}{1-e^{-\alpha_1}}\right]\|b_i\| + \|b_0\| \right\},$$

$$\left\| \int_0^t \Omega^+(t,s) f_1(s) ds - \int_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t,s) f_1(s) ds \right\| \le$$
$$\le \int_0^t K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \|f_1(s)\| ds +$$
$$+ \int_t^\infty K_1 e^{-\alpha_1(s-t)} \|f_1(s)\| ds \le \tfrac{2K_1}{\alpha_1} \|f_1(t)\|$$

В силу (3), будь-який проміжок осі t довжини l містить не більше як q точок послідовності $\{\tau_i\}$. Тоді для $j \ge i$ маємо

$$j - i + 1 \le q\left(\left[\tfrac{\tau_j - \tau_i}{l} + 1\right]\right) \le$$
$$\le q\left(\tfrac{\tau_j - \tau_i}{l} + 1\right),$$

звідки

$$\tau_j - \tau_i \le l\left(\frac{1}{q} - 1\right) + \frac{1}{q}(j-1).$$

Тому

$$\left\| \sum_{i=1}^{j} \Omega^+(t,\tau_i) b_i - \sum_{i=j+1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t,\tau_i) b_i \right\| \le$$
$$\le K_1 \left\{ \sum_{\tau_i \le t} e^{-\alpha_1(t-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > t} e^{\alpha_1(t-\tau_i)} \right\} \|b_i\| \le$$
$$\le K_1 \left\{ \sum_{\tau_i \le \tau_j} e^{-\alpha_1(\tau_j-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > \tau_j} e^{\alpha_1(\tau_j-\tau_i)} \right\} \|b_i\| \le$$
$$\le 2K_1 e^{\alpha_1 l\left(1-\frac{1}{q}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_1 l m}{q}} \|b_i\| =$$
$$= \tfrac{2K_1 e^{\alpha_1 l\left(1-\frac{1}{q}\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha_1 l}{q}}} \|b_i\|$$

Обмеженість інших s рядків випливає з умов накладених на функцію $f_2(t)$. Аналогічним чином доводиться збіжність інтегралів і сум для випадку коли $t < 0$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Campbell,S., Petzold,L.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1983,Volume 4, 517-521 pp.

2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.- К.: Вища шк., 2000. - 294 с.

3. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. - 223с.

4. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. - Новосибирск: Наука, 2003 - 320с.

5. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary value problems. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317p.

6. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К.: Вища шк., 1987. - 228 с.