УДК 517.968.21

©2016 р. Н.О. Козлова, В.А. Ферук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Інститут математики НАН України

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З КЕРУВАННЯМ

Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності та загальний вигляд розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з керуванням.

We obtain necessary and sufficient conditions for the solvability and the general form of the solution of a Fredholm integral equation with control.

Різноманітним задачам оптимального керування для функціонально-диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем присвячено багато публікацій. Одним із напрямків дослідження таких задач є підхід, що ґрунтується на залученні апарату теорії псевдообернених операторів [1-3]. У даній роботі, в межах цього підходу, встановлено необхідні і достатні умови розв'язності інтегрального рівняння Фредгольма з керуванням та знайдено загальний вигляд його розв'язку.

1. Постановка задачі. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ інтегральне рівняння з керуванням

$$x(t)-\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = \\ = f(t)+\int\limits_a^b K_1(t,s)u(s)ds. \tag{1}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f\in L_2[a,b]$, $x\in L_2[a,b]$, $u\in L_2[a,b]$. Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ та функція f – відомі, а функції x та u – потрібно визначити.

Будемо вважати, що породжуюче інтегральне рівняння без керування

$$x(t)-\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) \tag{2}$$

при деяких неоднорідностях $f\in L_2[a,b]$ не має розв'язку.

Ставиться задача знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину рівняння (2) керування $\int\limits_a^b K_1(t,s)u(s)ds$, рівняння (1) стає розв'язним.

2. Зв'язок інтегрального рівняння (1) зі зліченновимірною системою алгебраїчних рівнянь з керуванням. Як і в роботі [4], рівняння (1) можна звести до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ - повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо до розгляду величини

$$x_i=\int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt,\ f_i=\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \\ u_i=\int\limits_a^b u(t)\varphi_i(t)dt, \tag{3}$$

$$a_{ij}=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \\ \tilde a_{ij}=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds. \tag{4}$$

Тоді від рівняння (1) приходимо до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь з керуванням

$$x_i-\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=f_i+\sum_{j=1}^{\infty}\tilde a_{ij}u_j,\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty}|u_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо систему (5) у векторному вигляді

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 v, \tag{6}$$

де

$$\Lambda = I - A, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} z = col\left(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_i, \ \ldots\right) \in \ell_2, \\ g = col\left(f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_i, \ \ldots\right) \in \ell_2, \\ v = col\left(u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_i, \ \ldots\right) \in \ell_2, \end{gathered} \tag{8}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1i} & \ldots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \ldots & \tilde{a}_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Операторна система без керування для системи (6) має вигляд

$$\Lambda z = g. \tag{11}$$

Зазначимо, що оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ - це компактний оператор і, як відомо, для оператора Λ справедливою є альтернатива Фредгольма [5, с. 188]. Ядро та коядро оператора Λ є скінченновимірними та мають однакову розмірність ($dimker\Lambda = dimker\Lambda^* = r < \infty$), отже оператор Λ є фредгольмовим. Для системи (11) справедливим є наступне твердження [1, с. 69].

Теорема 1. *Однорідна система (11)* ($g = 0$) *має r-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$

$$z = P_{\Lambda_r} c, \quad \forall c \in \mathbb{R}^r. \tag{12}$$

Неоднорідна система (11) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується r лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0 \tag{13}$$

та має r-параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$ *вигляду*

$$z = P_{\Lambda_r} c + \Lambda^+ g, \quad \forall c \in \mathbb{R}^r. \tag{14}$$

Тут P_{Λ_r} - матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних стовпчиків матриці P_Λ, $P_{\Lambda_r^*}$ - матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних рядків матриці P_{Λ^*}, P_Λ та P_{Λ^*} – проектори на $N(\Lambda)$ та $N(\Lambda^*)$ відповідно, Λ^+ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Λ матриця.

Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину системи (11) керування $\Lambda_1 v$, зробити систему (6), а, отже і вихідне рівняння (1), розв'язними? Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язку неоднорідного рівняння (1), при умові, що породжуюче рівняння (2), а, отже і операторна система (11), не мають розв'язків.

3. Знаходження розв'язку інтегрального рівняння з керуванням. Припустимо, що $P_{\Lambda_r^*} g \neq 0$, тобто умова (13) не виконується. Згідно наведеної теореми 1 неоднорідна система (6) є розв'язною тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 v) = 0. \tag{15}$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 v = -P_{\Lambda_r^*} g.$$

Ввівши позначення

$$D := P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1, \tag{16}$$

отримаємо

$$Dv = -P_{\Lambda_r^*} g. \tag{17}$$

За умови

$$P_{D_{r_1}^*} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad r_1 \leq r \tag{18}$$

алгебраїчна система (17) буде розв'язною відносно v, та її розв'язок матиме вигляд [1]

$$v = P_D c - D^+ P_{\Lambda_r^*} g, \quad \forall c \in \ell_2. \tag{19}$$

Тут P_D - матриця-проектор на $N(D)$, $P_{D_{r_1}^*}$ - матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*}, що є проектором на $N(D^*)$, D^+ - псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до D матриця.

Зазначимо, що за умови $P_D = 0$, система (17) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$v = -D^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{20}$$

Підставивши у систему (6) замість v вираз (20), отримаємо

$$\Lambda z = g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{21}$$

За теоремою 1, система (21) буде розв'язною тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g) = 0 \tag{22}$$

і її розв'язок має вигляд

$$z = P_{\Lambda_r} c + \Lambda^+(g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g),\ \forall c \in \mathbb{R}^r. \tag{23}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\Lambda_r} = 0$ розв'язок системи (21) є єдиним. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай операторна система (11) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{D^*_{r_1}} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g) = 0,$$

то система (6) буде мати хоча б один розв'язок z вигляду (23), а керування v визначається представленням (19). Якщо виконуються умови $P_D = 0$, $P_{\Lambda_r} = 0$, то розв'язок z системи (6) та керування v будуть єдиними.

Використовуючи отримані результати для системи алгебраїчних рівнянь з керуванням (6), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідного інтегрального рівняння (1). Для цього використаємо перехід, описаний у роботі [4]. Якщо система (6) має хоча б один розв'язок $z = col\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_i,\ \ \ldots\right)$, то згідно теореми Ріса-Фішера, існує елемент $x \in L_2[a,b]$ такий, що має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{24}$$

де

$$\Phi(t) = \left(\varphi_1(t),\ \ \varphi_2(t),\ \ \ldots,\ \ \varphi_i(t),\ \ \ldots\right),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ - повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

Аналогічним чином визначається керування $u(t)$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i(t) = \Phi(t) v. \tag{25}$$

Пара $\{x(t), u(t)\}$, що визначається співвідношеннями (24), (25), і є шуканим розв'язком вихідного рівняння (1) [6, с. 266].

Теорема 3. *Нехай інтегральне рівняння без керування (2) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{D^*_{r_1}} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g) = 0,$$

то інтегральне рівняння з керуванням (1) буде мати хоча б один розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ (24), (25). За додаткових умов $P_D = 0$, $P_{\Lambda_r} = 0$ розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ рівняння (1) буде єдиним.

4. Приклад. Розглянемо інтегральне рівняння з керуванням

$$\begin{aligned} x(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds = \\ = f(t) + \int_0^{\pi} K_1(t,s) u(s) ds \end{aligned} \tag{26}$$

за умови, що рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds = f(t) \tag{27}$$

не має розв'язку.

Ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t$, $\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t$ є власними функціями оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s) w(s) ds,$$

які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (26) та (27) до рівнянь (6) та (11). Використавши позначення (3), (4), отримаємо

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 v, \tag{28}$$

$$\Lambda z = g, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{30}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t) \cos t dt,$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t) \sin t dt,$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \cos t dt,$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt,$$

$$\begin{gathered} \tilde{a}_{11} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \cos s dt ds, \\ \tilde{a}_{12} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \sin s dt ds, \\ \tilde{a}_{21} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \cos s dt ds, \\ \tilde{a}_{22} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \sin s dt ds, \end{gathered} \tag{31}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi u(t) \cos t dt,$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi u(t) \sin t dt.$$

Скориставшись відомими формулами [1, с. 60], [2], [7, с. 501], отримаємо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Використовуючи теорему 1, отримаємо твердження:

Однорідна система (29) ($g = 0$) *має розв'язок*

$$z = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Неоднорідна система (29) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_0^\pi f(t) \cos t dt = 0 \tag{34}$$

та має розв'язок

$$z = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що при $f(t) = \sin t$ умова розв'язності (34) виконується, а, наприклад, при $f(t) = \cos t + \sin t$ умова (34) не виконується, тобто неоднорідне рівняння (29) не має розв'язку. Знайдемо керування $\int\limits_a^b K_1(t,s) u(s) ds$, при якому рівняння (26) буде розв'язним. Для цього скористаємося теоремою 2, тобто перевіримо виконання умов (18), (22). Згідно (16), (30), (32) маємо

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}.$$

Отже, матимемо

$$\begin{gathered} D^+ = \gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}, \quad P_{D^*_{r_1}} = 0, \\ P_D = \gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}_{12}^2 & -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} \\ -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11}^2 \end{pmatrix}, \\ \gamma = \frac{1}{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2}. \end{gathered} \tag{36}$$

Можливі два випадки:

1) $D = D^+ = 0$ $(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 = 0)$. Тоді керування v не існуватиме і алгебраїчна система (28) не буде мати розв'язку z.

2) $D \neq 0$ та $D^+ \neq 0$ $(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 \neq 0)$. Оскільки $P_{D^*_{r_1}} = 0$, то умова (18) виконується завжди, тобто алгебраїчна система (28) завжди буде розв'язною відносно v. Перевіримо виконання умови (22)

$$P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 D^+ P_{\Lambda_r^*} g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \tilde{a}_{11} \\ \gamma \tilde{a}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2) - f_1(\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}\tilde{a}_{12}) \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, (22) виконується для будь-якої матриці Λ_1 та алгебраїчна система (28) завжди буде розв'язною відносно z.

Знайдемо явний вигляд керування v та розв'язку z системи (28). Нехай $K_1(t, s) = 2\cos t \cos s$. Скориставшись формулами (31), (36), (32), маємо

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ g = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} \pi & 0 \end{pmatrix},$$
$$D^+ = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ P_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (18) виконується, а умова $P_D = 0$ не виконується, то керування v буде визначатися не єдиним чином і матиме вигляд

$$v = P_D c - D^+ P_{\Lambda_r^*} g =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 - \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1 \in \mathbb{R}.$$

У нашому випадку $P_{\Lambda_r} \neq 0$, тому система (28) буде мати сім'ю розв'язків

$$z = P_{\Lambda_r} c + \Lambda^+ (g + \Lambda_1 v) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$
$$\left. \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ c_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c_2 \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}, \ \forall c_2 \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись формулами (24) та (25), знайдемо явний вигляд керування $u(t)$ та розв'язку $x(t)$ інтегрального рівняння (1)

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \left(c_1 \sqrt{2\pi} \sin t - \cos t \right), \ \forall c_1 \in \mathbb{R},$$

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(c_2 \sqrt{8} \cos t + \sqrt{\pi} \sin t \right), \ \forall c_2 \in \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.

2. *Самойленко А.М., Бойчук А.А., Бойчук Ан.А.* Ограниченные на всей оси решения слабо возмущенных линейных систем // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, N11. – С. 1517-1530.

3. *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes, 2016, Volume 17. (In Print, 16 p.)

4. *Козлова Н.О., Ферук В.А.* Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, N1. – С. 58-66.

5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. школа, 1982. — 271 с.

6. *Гильберт Д.* Избранные труды. — М.: Факториал, 1998. — 608 с.

7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.