УДК 517.9

©2016 р. О. Є. Лаврова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

В роботі отримано аналог принципу максимума Понтрягіна для рівнянь на часових шкалах. Розглядається випадок, коли множина допустимих керувань не обов'язково замкнена (але опукла), а множина обмежень не обов'язково опукла.

In this paper, an analogue of the Pontryagin Maximum Principle for equations on time scales is given. We consider the case where a certain set of admissible values of the control is not necessarily closed (but convex), and the attainable set is not necessarily convex.

Вступ. Оптимальне керування є однією з найважливіших областей теорії екстремальних задач. Вивчення проблем оптимального керування на часових шкалах останнім часом викликає великий інтерес. Це пов'язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в [2] ввів поняття Δ–похідної, що дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз. Основи теорії часових шкал викладено в монографії [3].

Стосовно методу динамічного програмування Беллмана на часових шкалах слід відзначити роботу [4], в якій отримані рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана в одновимірному випадку для оптимального керування системою, яка містить лінійну частину, а також роботу [5], де розглянуто загальний випадок. Відносно принципу максимума Понтрягіна вкажемо на роботу [6], в якій встановлена слабка версія принципу максимума Понтрягіна і [1], в якій отримано сильну версію принципу максимуму Понтрягіна, з використанням Ekeland's Variational Principle. У зв'язку з цим авторам довелося накласти деякі обмеження на задачу, а саме: множина обмежень вважалась опуклою, а множина значень керувань замкненою. В даній роботі, базуючись на іншому підході, пов'язаному з "пакетом голок", зняті вказані вище обмеження роботи [1].

Сама робота складається зі вступу і двох розділів. В першому розділі приведено основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал (підрозділ 1.1). В підрозділі 1.2 розглядається постановка задачі і формулюється теорема, яка дає необхідні умови оптимальності. Другий розділ присвячений доведенню основного результату. У підрозділі 2.1 побудований "пакет голок"– варіацій оптимального керування і наведені деякі твердження, щодо побудованого пакета. Доведення основного результату наведено в підрозділі 2.2.

1.1 Основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, тобто довільна, непорожня, замкнена підмножина $\mathbb{R}^1$. Для кожної підмножини A з $\mathbb{R}$ позначимо $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$. Вважаємо, що $\sup \mathbb{T} = +\infty$.

Визначимо прямий і обернений оператори стрибка $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ як $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t\}$. Функція зернистості $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ визначається наступним чином $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in \mathbb{T}$ називається *ліво-граничною* (*ліво-розсіяною*, *право-граничною* або *право-розсіяною*), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ або $\sigma(t) > t$). Визначимо поняття Δ–похідної.

Означення 1. *Функція $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^1$ має Δ–похідну в $t \in \mathbb{T}$, якщо існує $\alpha \in \mathbb{R}^1$, що для $\varepsilon > 0$ існує окіл B точки t такий, що*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \le \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

для всіх $s \in B \cap \mathbb{T}$. При цьому $f^{\Delta}(t) = \alpha$.

Позначимо через RS (RD, LS, LD) відповідно множину всіх право-розсіяних (право-граничних, ліво-розсіяних, ліво-граничних точок) з часової шкали $\mathbb{T}$. Для всіх $a, b \in \mathbb{T}$, $a \neq b$ і всіх $s \in [a, b)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RD}$, визначимо

$$\mathcal{V}_s^b = \{\beta \geq 0,\ s + \beta \in [s, b)_{\mathbb{T}}\},$$

і для кожного $s \in (a, b]_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{LD}$, визначимо

$$\mathcal{V}_a^s = \{\beta \geq 0,\ s - \beta \in (a, s]_{\mathbb{T}}\}.$$

Нехай t_0, t_1 – фіксовані точки з $\mathbb{T}$ і $t_0 < t_1$. Важливу роль в подальшому відіграватимуть властивості часових шкал в сенсі наступного означення.

Означення 2. *Скажемо, що в точці* $s \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RD}$ *виконується умова щільності, якщо*

$$\frac{\mu(s+\beta)}{\beta} \to 0,\ \text{при } \beta \to 0, \tag{1}$$

для кожного $\beta \in \mathcal{V}_s^{t_1}$. *Аналогічно, в точці* $s \in (t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{LD}$ *виконується умова щільності, якщо*

$$\frac{\mu(s-\beta)}{\beta} \to 0,\ \text{при } \beta \to 0, \tag{2}$$

для кожного $\beta \in \mathcal{V}_{t_0}^s$.

1.2 Постановка задачі. Нехай t_0, t_1 – фіксовані точки з $\mathbb{T}$ і $t_0 < t_1$. Розглянемо наступну задачу оптимального керування на інтервалі $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$:

$$\Phi_0(x(t_0), x(t_1)) \to \inf, \tag{3}$$

$$x^{\Delta} = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \Phi_i(x(t_0), x(t_1)) = 0,\ i = \overline{1, k}, \\ \Phi_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0,\ i = \overline{k+1, n}. \end{gathered} \tag{5}$$

Тут $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в $\mathbb{R}^d$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U – опукла множина. Функції f, f'_x, f'_u визначені при $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, $x \in D$, $u \in U$ і неперервні за сукупністю аргументів. Функції $\Phi_i\ (i = \overline{0, n})$ визначені в області $D \times D$ і гладкі за своїми аргументами.

Означення 3. *Пара* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *називається керованим процесом в задачі (2)–(5), якщо:*

1) *керування* $u(\cdot) : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \to U$ *– кусково неперервна (неперервна справа) функція;*

2) *фазова траєкторія* $x(\cdot) : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \to D$ *неперервна;*

3) *для всіх точок* $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ *за винятком, можливо, точок розриву керування* $u(\cdot)$, *функція* $x(\cdot)$, *задовольняє диференціальному рівнянню*

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

і у всіх точках $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ *інтегральному рівнянню*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{[t_0, t_1)_{\mathbb{T}}} f(s, x(s), u(s)) \Delta s.$$

Зазначимо, якщо задовольняється умова (5), тоді пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ називається допустимим керованим процесом.

Означення 4. *Керований допустимий процес* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *називається (локально) оптимальним, якщо існує* $\varepsilon > 0$, *що для кожного допустимого керованого процесу* $(x(\cdot), u(\cdot))$, *такого що* $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$, *для всіх* $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ *виконується нерівність*

$$\Phi_0(x(t_0), x(t_1)) \geq \Phi_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)). \tag{6}$$

Означення 5. *Лінійна система диференціальних рівнянь*

$$\Psi^{\Delta} = -\left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^* \Psi^{\sigma}. \tag{7}$$

називається спряженою до системи (3). Тут $*$ *означає транспонування.*

Означення 6. *Функція* $H(t, \Psi, x, v) = (\Psi, f(t, x, v)) = \sum_{i=1}^d (\Psi_i, f_i(t, x, v))$ *називається функцією Понтрягіна, а функція* $L(\lambda, x(t_0), x(t_1)) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \Phi_i(x(t_0), x(t_1))$ *– функція Лагранжа задачі (2)–(5),* $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$ *– множники Лагранжа.*

Основним результатом роботи є наступна теорема, яка дає необхідні умови оптимальності в задачі (2)–(5).

Теорема 1. *(Принцип максимума Понтрягіна). Нехай для функцій f і $\Phi_i\,(i = \overline{0,n})$ виконуються умови постановки задачі (2)–(5), а для точок $s \in [t_0,t_1)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RD}$ і $s \in (t_0,t_1]_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{LD}$ виконуються відповідні умови щільності (1) і (2). Тоді якщо $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ – оптимальний процес для задачі (2)–(5), то існує ненульовий вектор $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – множники Лагранжа і вектор $\Psi(t) = (\Psi_1(t),\ldots,\Psi_d(t))^*$ – розв'язок спряженої системи такі, що виконуються умови:*

1) невід'ємності:

$$\lambda_i \geq 0, i = 0, i = \overline{k+1,n};$$

2) доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_i\Phi_i(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)) = 0,\; i = \overline{k+1,n};$$

3) умови трансверсальності:

$$\Psi(t_0) = L_{x_0};\; \Psi(t_1) = -L_{x_1},\;\; \text{де}$$

$$L_{x_0} = \frac{\partial L}{\partial x(t_0)};\; L_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial x(t_1)};$$

4) умова максимума:

a) слабка умова максимума:

для кожної ізольованої точки $r \in [t_0,t_1)_{\mathbb{T}}$ виконується наступна умова

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\left(r,\Psi^{\sigma}(r),\hat{x}(r),\hat{u}(r)\right), v - \hat{u}(r)\right)_{\mathbb{R}^n} \leqslant 0, \tag{8}$$

для всіх $v \in U$. Для точки t_0 ця умова виконується, якщо $t_0 \in \mathrm{RS}$;

b) сильна умова максимума:

якщо $s \in [t_0,t_1) \cap \mathrm{RD}$, тоді

$$\begin{aligned}&\max_{v\in U} H\left(s,\Psi(s),\hat{x}(s),v\right) = \\ &= H\left(s,\Psi(s),\hat{x}(s),\hat{u}(s)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Дана умова виконується також в довільній точці $s \in (t_0,t_1] \cap \mathrm{LD}$, що є точкою неперервності керування $\hat{u}(t)$.

2. Доведення основного результату.

2.1 "Пакет голок". Для доведення теореми 1 включимо оптимальний процес $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ в деяку спеціальну сім'ю керованих процесів – "пакет"варіацій. Подальші викладки проводимо для право-розсіяних і право-граничних точок. Для ліво-розсіяних і ліво-граничних точок міркування проводяться аналогічно.

Потрібна нам сім'я керованих процесів залежить від наступних параметрів:

1) початкові дані $x(t_0) = x_0$;
2) набір $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$, де всі α_i достатньо малі і $\alpha = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$;
3) набір $\bar{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_N)$, $\tau_i \in (t_0,t_1)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RD}$, $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_N < t_1$;
4) набір $\bar{v} = (v_1,\ldots,v_N)$, $v_i \in U$;
5) набір $\bar{r} = (r_1,\ldots,r_\nu)$, $r_i \in (t_0,t_1)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RS}$, $t_0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_\nu < t_1$;
6) набір $\bar{z} = (z_1,z_2,\ldots,z_\nu)$, $z_i \in U$,
7) набір $\bar{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu)$, $\gamma_i \geqslant 0$ і достатньо малі.

В подальшому $\bar{\tau},\bar{v},\bar{r},\bar{z}$ вважаються фіксованими, а $x_0,\bar{\alpha},\bar{\gamma}$ – змінні, за якими ми будемо диференціювати різні функції.

Пакет голок, який ми хочемо побудувати, буде складатись з двох видів елементарних голок: варіацій по право-граничним точкам і по право-розсіяним точкам. При $N = 1$, $\nu = 0$ такий пакет скаладається з однієї голки для право-граничних точок і співпадає з голчатою варіацією $II = (s,z)$ з підрозділу 3.2 роботи [1]. В нашому випадку $II = (\tau_i,v_i)$. Якщо $N = 0$, $\nu = 1$, такий пакет складається з однієї голки для право-розсіяних точок і співпадає з голчатою варіацією $\Pi = (r,y)$ з підрозділу 3.2 роботи [1]. В нашому випадку $\Pi = (r_i,z_i)$.

Однак, конструкція нашого пакету складніша. В ньому об'єднується довільне скінченне число елементарних голок як першого так і другого виду. Нехай серед голок першого виду є повторювані набори голок

$$(\tau_i,v_{1,i}),(\tau_i,v_{2,i}),\cdots,(\tau_i,v_{q_i,i}). \tag{10}$$

Тут q_i – кількість повторень голок з однаковим τ_i. Таких наборів в пакеті може бути декілька. Для кожного з них визначимо наступні неперетинні інтервали

$$\Delta_{s,i} = [\tau_i + (s-1)\bar{\alpha}_i, \tau_i + (s-1)\bar{\alpha}_i + \alpha_{s,i})_{\mathbb{T}},$$

тут $s=\overline{1,q_i}$, $\bar{\alpha}_i=\sum_{s=1}^{q_i}\alpha_{s,i}$ і $\alpha_{s,i}\geqslant 0$.

Кожному інтервалу $\Delta_{s,i}$ припишемо керування $v_{s,i}$ з набору (10). Позначимо $\Delta_i=\cup_{s=1}^{q_i}\Delta_{s,i}$. Оскільки різних пар елементарних голок (τ_i,v_i) N штук, то і інтервалів $\Delta_{s,i}$ також N штук.

Перенумеруємо тепер всі $\alpha_{s,i}$ і перепозначимо їх як α_i, $i=\overline{1,N}$. В результаті для голок першого виду ми отримаємо наступну варіацію оптимальнго керування $\hat{u}(\cdot)$:

$$u(t,\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{v})=\begin{cases}\hat{u}(t), t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\Delta_i,\\ v_{s,i}, t\in\Delta_{s,i}, s=\overline{1,q_i},\ i=\overline{1,N}.\end{cases}\tag{11}$$

Перейдемо до голок другого виду. Якщо серед них є повторювані голки виду: $(r_i,z_1),(r_i,z_2),\cdots,(r_i,z_{l_i})$, тоді відповідна варіація має вигляд:

$$u(t,\bar{\gamma},\bar{r},\bar{z})=\begin{cases}\hat{u}(r_i)+\gamma_{1,i}(z_1-\hat{u}(r_i))+\cdots+\\ +\gamma_{l_i,i}(z_{l_i}-\hat{u}(r_i)), t=r_i,\ i=\overline{1,\nu},\\ \hat{u}(t), t\neq r_i, i=\overline{1,\nu}.\end{cases}\tag{12}$$

Тут $\gamma_{p,i}\geqslant 0$, $p=\overline{1,l_i}$, l_i – кількість повторень голок з однаковими r_i в пакеті, $i=\overline{1,\nu}$. Тепер об'єднаємо пакети (11) і (12) в один пакет і побудуємо наступну варіацію оптимального керування $\hat{u}(\cdot)$. В подальшому позначимо $\hat{x}_0=\hat{x}(t_0)$ і $u(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma})=u(t,\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{v},\bar{\gamma},\bar{r},\bar{z})$. Тоді отримаємо

$$u(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma})=\begin{cases}\hat{u}(t),\ t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}\setminus\cup_{i=1}^{N}\Delta_i\setminus\cup_{i=1}^{\nu}\{r_i\},\\ v_{s,i},\ t\in\Delta_{s,i},\ s=\overline{1,q_i},\ i=\overline{1,N},\\ \hat{u}(r_i)+\sum_{p=1}^{l_i}\gamma_{p,i}\left(z_p-\hat{u}(r_i)\right), t=r_i,\\ i=\overline{1,\nu}.\end{cases}\tag{13}$$

Тепер керування $u(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma})$ для кожного $t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ з (13) визначене коректно і $u(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma})\in U$ для кожного $t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$.

Позначимо через $x(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0)$ $(x(t_0,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0))=x_0\in D)$ сім'ю фазових траєкторій, визначених як розв'язок задачі Коші

$$x^{\Delta}(t)=f(t,x(t),u(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma})),\ x(t_0)=x_0.\tag{14}$$

Означення 7. *Система лінійних рівнянь вигляду*

$$y^{\Delta}(t)=\frac{\partial f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x}y(t)\tag{15}$$

називається системою рівнянь у варіаціях, яка відповідає оптимальній парі $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$.

Через $\Omega(t,s)$ позначимо матрицант системи (15). Важливу роль грає наступна лема.

Лема 1. *(Про пакет голок). Нехай відносно функції f виконуються умови постановки задачі (2)–(5), а для точок $s\in[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}\cap\mathrm{RD}$ виконується умова щільності (1). Тоді:*

1) *при достатньо малому $\varepsilon_0>0$, розв'язок задачі Коші (14) такий, що $|x_0-\hat{x}_0|<\varepsilon_0$, $0\leqslant\alpha_i<\varepsilon_0$, $0\leqslant\gamma_k<\varepsilon_0$, $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,\nu}$ визначений для $t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$;*

2) *якщо $x_0\to\hat{x}_0$ при $\alpha_i\to 0+$, $\gamma_k\to 0+$, $(i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,\nu})$, тоді $x(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0)\to\hat{x}(t)$ рівномірно на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$;*

3) *відображення $(x_0,\bar{\alpha},\bar{\gamma})\to x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0)$ визначене по x_0 в деякому околі точки $\hat{x}_0$, а по α_i і γ_k $(i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,\nu})$ в деякому правому околі нуля і диференційовне в точці $(\hat{x}_0,\bar{0},\bar{0})$, тобто має місце наступне зображення:*

$$\begin{gathered}x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},\hat{x}_0+h)-\hat{x}(t_1)=\\ =\frac{\partial x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},\hat{x}_0+h)}{\partial\bar{\alpha}}\Big|_{\bar{\alpha}=0,\bar{\gamma}=0,h=0}\bar{\alpha}+\\ +\frac{\partial x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},\hat{x}_0+h)}{\partial\bar{\gamma}}\Big|_{\bar{\gamma}=0,\bar{\alpha}=0,h=0}\bar{\gamma}+\\ +\frac{\partial x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},\hat{x}_0+h)}{\partial x_0}\Big|_{\bar{\alpha}=0,\bar{\gamma}=0,h=0}h+\\ +o(\bar{\alpha},\bar{\gamma},h),\ \text{при}\ \bar{\alpha},\ \bar{\gamma},\ h\to 0,\end{gathered}\tag{16}$$

(тут частинні похідні $\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_i}$ і $\dfrac{\partial x}{\partial\gamma_k}$ як елементи матриць Якобі $\dfrac{\partial x}{\partial\bar{\alpha}}$ і $\dfrac{\partial x}{\partial\bar{\gamma}}$ розуміються як похідні справа). При цьому

$$\frac{\partial x(t_1,\bar{0},\bar{0},x_0)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\hat{x}_0}=\Omega(t_1,t_0),\tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial x(t_1,\alpha_i,\bar{0},\hat{x}_0)}{\partial\alpha_i}\Big|_{\alpha_i=0}=\Omega(t_1,\tau_i)*\\ *\left[f(\tau_i,\hat{x}(\tau_i),v_i)-f(\tau_i,\hat{x}(\tau_i),\hat{u}(\tau_i))\right],\end{gathered}\tag{18}$$

$$\frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \gamma_k, \hat{x}_0)}{\partial \gamma_k}\Big|_{\gamma_k=0} = \Omega(t_1, \sigma(r_k)) *$$
$$* \mu(r_k) \frac{\partial f(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))}{\partial u} \left(z_k - \hat{u}(r_k)\right). \tag{19}$$

Доведення. Для достатньо малих $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ і h через $x(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h)$ позначимо розв'язок задачі Коші (14). Оскільки допустиме керування $u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ – неперервне справа на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, тоді справедлива оцінка

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} |u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})| \leqslant \sup_{t \in [t_0, t_1]\mathbb{T}} |\hat{u}(t)| + \\ + \sum_{i=1}^{N} |v_i| + \sum_{i=1}^{\nu} |z_k|. \tag{20}$$

З (13) випливає існування функції $\varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$, що $\varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \to 0$ при $\bar{\alpha} \to 0, \bar{\gamma} \to 0$ і справедлива оцінка:

$$\int_{[t_0, t_1)_{\mathbb{T}}} |u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) - \hat{u}(t)| \, \Delta t \leqslant \varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}). \tag{21}$$

Тоді твердження 1) і 2) леми 1 випливають з леми 3 [1] і оцінки (21). Доведемо тепер твердження 3) цієї леми. Розглянемо приріст

$$x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - \hat{x}(t_1) = \\ = x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - x(t_1, 0, 0, \hat{x}_0) \tag{22}$$

Розглянемо наступний доданок

$$x(t_1, 0, \ldots, 0, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - \\ - x(t_1, 0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h). \tag{23}$$

Далі позначимо

$$x_k(t) = x(t, 0, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h), \\ u_k(t) = u(t, 0, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_N, \bar{\gamma}).$$

Можливі наступні два варіанти.

1. α_k і α_{k+1} відповідають різним значенням $\tau_k \neq \tau_{k+1}$ в (13). Тоді, згідно (13), отримаємо

$$x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \\ = \int_{[\tau_k, \tau_k + \alpha_k)_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), v_k) - \\ - f(s, x_{k+1}(s), \hat{u}(s))] \Delta s + \\ + \int_{[\tau_k + \alpha_k, t_1)_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), u_{k+1}(s)) - \\ - f(s, x_{k+1}(s), u_{k+1}(s)) \Delta s] = \\ = I_1 + I_2. \tag{24}$$

Можна показати, що перший доданок в (24) має вигляд:

$$[f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))] \alpha_k + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \tag{25}$$

при $\bar{\alpha} \to 0, \bar{\gamma} \to 0, h \to 0$. Другий доданок в (24) з використанням формули Лагранжа має вигляд

$$I_2 = \int_{[\tau_k + \alpha_k, t_1)_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x} \left(s, \theta(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), u_{k+1}(s)\right) * \\ * \left(x_k(s) - x_{k+1}(s)\right) \Delta s, \tag{26}$$

де $\theta(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h) = x_{k+1}(t) + \theta(x_k(t) - x_{k+1}(t)) \in \mathbb{R}^d$ для деякого $\theta \in [0, 1]$.

Однак, як випливає з пропозиції 2 [1] вираз $\dfrac{x_k(t) - x_{k+1}(t)}{\alpha_k}$ рівномірно збігається до $\dfrac{\partial x_k(t)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0}$ на $[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}$ при $\alpha_k \to 0$, де $\dfrac{\partial x_k(t)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0}$ – розв'язок на $[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}$ лінійної системи

$$y^{\Delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{k+1}(t), u_{k+1}(t)) y(t), \tag{27}$$

з початковими умовами

$$\frac{\partial x_k(\tau_k)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0} = f(\tau_k, x_{k+1}(\tau_k), v_k) - \\ - f(\tau_k, x_{k+1}(\tau_k), u_{k+1}(\tau_k)). \tag{28}$$

Покажемо, що розв'язок задачі Коші (27)–(28) рівномірно на $[\tau_k, t_1)_{\mathbb{T}}$ збігається до розв'язку спряженої системи (15) з початковою умовою

$$f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k)), \tag{29}$$

при $\bar\alpha \to 0, \bar\gamma \to 0, h \to 0$.

Позначимо розв'язок задачі Коші (27)–(28) як $y_k(t)$, а розв'язок задачі Коші (15), (29) як $y(t)$. Відмітимо, що оскільки $u_{k+1}(t) = \hat u(t)$ при $t \in [t_0, \tau_{k+1})_{\mathbb{T}}$, тоді $x_{k+1}(t) = \hat x(t)$ при $t \in [t_0, \tau_{k+1})_{\mathbb{T}}$. Тому початкові умови (28) і (29) співпадають. Неважко показати, що

$$\sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}} |y_k(t) - y(t)| \to 0, \tag{30}$$

при $\bar\alpha \to 0, \bar\gamma \to 0, h \to 0$.

Повертаючись тепер до формули (24), враховуючи (25) для $x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1)$ отримаємо:

$$\begin{gathered} x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \\ = [f(\tau_k, \hat x(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat x(\tau_k), \hat u(\tau_k))]\alpha_k + \\ + \int_{[\tau_k,t_1)_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \hat x(s), \hat u(s)) y(s)\Delta s \cdot \alpha_k + \\ + o(\bar\alpha, \bar\gamma, h) = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar 0, \hat x_0)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0} \cdot \alpha_k + \\ + o(\bar\alpha, \bar\gamma, h), \text{ при } \bar\alpha \to 0, \bar\gamma \to 0, h \to 0. \end{gathered} \tag{31}$$

2. Нехай α_k і α_{k+1} відповідають одному і тому τ_k. Без обмеження загальності і спрощення викладок, розглянемо пакет голок $(\bar\alpha, \bar\tau, \bar v, \bar\gamma, \bar r, \bar z)$, який містить три голки вигляду (τ_k, v_k), (τ_k, v_{k+1}), (τ_k, v_{k+2}), які відповідають одному і тому ж τ_k. Для іншої кількості голок доведення аналогічне.

За керуванням $u_{k+1}(t)$ побудуємо керування $u_{sh}(t)$, в якому дію голки (τ_k, v_{k+1}) змістимо на α_k вправо, а дію голки (τ_k, v_{k+2}) змістимо вправо на $2\alpha_k$. Покладемо $\alpha = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}$. Матимемо

$$u_{sh}(t) = \begin{cases} \hat u(t), t \in [\tau_k, \tau_k + \alpha)_{\mathbb{T}} \cup \\ \cup [\tau_k + \alpha + \alpha_{k+1}, \tau_k + 2\alpha)_{\mathbb{T}}, \\ v_{k+1}, t \in [\tau_k + \alpha, \tau_k + \alpha + \alpha_{k+1})_{\mathbb{T}}, \\ v_{k+2}, t \in [\tau_k + 2\alpha, \tau_k + 2\alpha + \alpha_{k+2})_{\mathbb{T}}, \\ u_{k+1}(t), \text{ в інших точках.} \end{cases} \tag{32}$$

Тепер в керуванні $u_k(t)$ і $u_{sh}(t)$ голки (τ_k, v_{k+1}) і (τ_k, v_{k+2}) діють на однакових інтервалах. Позначимо через $x_{sh}(t)$ розв'язок задачі Коші (14) з $x_0 = \hat x_0 + h$, що відповідає керуванню (32). Тоді маємо

$$\begin{gathered} x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = x_k(t_1) - x_{sh}(t_1) + \\ + x_{sh}(t_1) - x_{k+1}(t_1). \end{gathered} \tag{33}$$

До першого доданку в (33) застосовуємо всі міркування випадку 1 з різними τ_k і τ_{k+1}. Тому

$$\begin{gathered} x_k(t_1) - x_{sh}(t_1) = \\ = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar 0, \hat x_0)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0} \alpha_k + o(\bar\alpha, \bar\gamma, h), \end{gathered} \tag{34}$$

при $\bar\alpha \to 0, h \to 0$.

Неважко показати, що

$$x_{sh}(t_1) - x_{k+1}(t_1) = o(\bar\alpha, \bar\gamma, h), \tag{35}$$

при $\bar\alpha \to 0$, $\bar\gamma \to 0$, $h \to 0$. Звідси, використовуючи (33),(34), отримаємо

$$\begin{gathered} x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar 0, \hat x_0)}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_k=0} + \\ + o(\bar\alpha, \bar\gamma, h), \bar\alpha \to 0, \bar\gamma \to 0, h \to 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Перейдемо тепер до розгляду голок другого виду. Розглянемо в формулі (22) приріст вигляду

$$\begin{gathered} x(t_1, \bar 0, 0, \cdots, 0, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_\nu, \hat x_0 + h) - \\ - x(t_1, \bar 0, 0, \cdots, 0, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_\nu, \hat x_0 + h). \end{gathered} \tag{37}$$

Аналогічно попередньому позначимо $x_k(t) = x(t_1, \bar 0, \cdots, 0, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_\nu, \hat x_0 + h)$ – розв'язок задачі Коші (14) з початковою умовою $x_k(t_0) = \hat x_0 + h$, що відповідає керуванню $u_k(t) = u(t, \bar 0, \gamma_k, \cdots, \gamma_\nu)$.

Нехай деякому r_k в нашому пакеті відповідає декілька голок. Вважатимемо, без обмежень загальності, що вихідний пакет містить дві голки (r_k, z_1), (r_k, z_2). Тоді, враховуючи, що $x_k(r_k) = x_{k+1}(r_k) = \hat x(r_k)$ і $u_k(s) = u_{k+1}(s)$ при $s \in [\sigma(\tau_k), t_1)_{\mathbb{T}}$, маємо

$$\begin{gathered} x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \mu(r_k) * \\ * [f(r_k, \hat x(r_k), u_k(r_k)) - f(r_k, \hat x(r_k), u_{k+1}(r_k))] + \\ + \int_{[\sigma(r_k),t_1)_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), u_{k+1}(s)) - \\ - f(s, x_{k+1}(s), u_{k+1}(s))]\Delta s. \end{gathered} \tag{38}$$

Перший доданок в (38) згідно з формулою Лагранжа і в силу рівномірної неперервності $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ набуває вигляду

$$\mu(r_k)\frac{\partial f}{\partial u}(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))(z_1 - \hat{u}(r_k))\gamma_k + \\ +o(\bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\gamma} \to 0, h \to 0. \tag{39}$$

Розглянемо другий доданок в (38).

$$\int_{[\sigma(\tau_k),t_1)_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \theta(s, \bar{\gamma}, h), u_{k+1}(s)) * \\ * \frac{x_k(s) - x_{k+1}(s)}{\gamma_k}\Delta s \cdot \gamma_k. \tag{40}$$

Однак, як випливає з пропозиції 1 [1], вираз $\dfrac{x_k(t) - x_{k+1}(t)}{\gamma_k}$ рівномірно збігається до $\dfrac{\partial x_k(t)}{\partial \gamma_k}\Big|_{\gamma_k=0}$ на $[\sigma(\tau_k), t_1)_{\mathbb{T}}$, при $\alpha_k \to 0$, причому $\dfrac{\partial x_k}{\partial \gamma_k}\Big|_{\gamma_k=0}$ – розв'язок на $[\sigma(\tau_k), t_1)_{\mathbb{T}}$ лінійної системи

$$y^{\Delta}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{k+1}(t), u_{k+1}(t))y(t)$$

з початковою умовою

$$y(\sigma(r_k)) = \mu(r_k)\frac{\partial f}{\partial u}(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))(z_1 - \hat{u}(r_k)). \tag{41}$$

Тепер, аналогічно викладкам з однією голкою першого виду, маємо

$$x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \frac{\partial x(t_1, \bar{\alpha}, \gamma_k, \hat{x}_0)}{\partial \gamma_k}\Big|_{\gamma_k=0}\gamma_k + \\ +o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\alpha} \to 0, \bar{\gamma} \to 0, h \to 0. \tag{42}$$

Розглянемо в формулі (22) останній доданок. Оскільки розв'язок $x(t, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h)$ неперервно-диференційовний за h в точці $h = 0$, то маємо

$$x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h) - \hat{x}(t_1) = \\ = \frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h)}{\partial h}\Big|_{h=0} h + o(|h|), \tag{43}$$

при $h \to 0$. Враховуючи тепер (31), (36), (42), (43), з (22) отримаємо (16).

Для ліво-граничних точок міркування проводяться аналогічно, тільки в голках першого виду інтервали $\Delta_{s,i}$ потрібно вибирати наступним чином

$$\Delta_{s,i} = [\tau_i - (s-1)\bar{\alpha}_i - \alpha_{s,i}, \tau_i - (s-1)\bar{\alpha}_i)_{\mathbb{T}}.$$

Зауваження 1. *Основна відмінність і складність доведення цієї леми від класичної леми "про пакет голок" полягає в тому, що в нашому випадку функція $x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0)$, взагалі кажучи, не має частинних похідних за α_i при $\alpha_i \neq 0$.*

Далі наведемо результат про зв'язок розв'язків лінійної системи

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) \tag{44}$$

і спряженої системи

$$y^{\Delta}(t) = -A^*(t)y(\sigma(t)), \tag{45}$$

де $d \times d$ – вимірна матриця $A(t)$ неперервна на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$.

З теореми 1 [7] випливає, що задача Коші з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ для (44) має єдиний розв'язок на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Позначимо через $\Omega(t, \tau)$ $(t \geqslant \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}})$ матрицант системи (44). В свою чергу з теореми 4 [7] також випливає, що задача Коші з початковою умовою $y(t_1) = y_0 \in \mathbb{R}^d$ для (45) має єдиний розв'язок на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Через $\Omega_*(t, \tau)$ $(t \leqslant \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}})$ позначимо матрицант системи (45). Безпосередньою перевіркою отримується наступний результат.

Лема 2. *Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – довільні розв'язки систем (44) і (45) відповідно на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Тоді при $t \geqslant \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо:*

$$\Omega^*(t, \tau)y(t) = y(\tau), \; \Omega_*^*(\tau, t)x(\tau) = x(t). \tag{46}$$

Доведення. З формули (2) [1] маємо

$$(x(t), y(t))^{\Delta} = (x^{\Delta}(t), y(\sigma(t))) + \\ +(x(t), y^{\Delta}(t)) = (A(t)x(t), y(\sigma(t))) + \\ +(x(t), -A^*(t)y(\sigma(t))) = 0.$$

Тому, для довільних розв'язків (44) і (45)

$$(x(t), y(t)) \equiv const. \tag{47}$$

Співвідношення (46) випливає з того, що стовбці матрицантів $\Omega(t, \tau)$ і $\Omega_*(\tau, t)$ складається з розв'язків (44) і (45) відповідно.

2.2 Доведення основного результату. В силу першого твердження леми 1, розв'язок $x(t,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) = x(t)$ при $t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ лежить в області D, якщо $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant \gamma_k < \varepsilon$, $|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon_0$ для всіх $t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ при достатньо малому ε_0. Тоді пара $(x(t), u(t,\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{v},\bar{\gamma},\bar{r},\bar{z}))$, де $u(\cdot)$ визначено в (13) являється керованим процесом задачі (2)–(5). Введемо наступну функцію:

$$I_i(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) = \Phi_i(x(t_0,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0), x(t_1,\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0)),$$

при $i = \overline{0,n}$. В силу неперервної диференційовності функції Φ_i за своїми аргументами і третього твердження леми 1, функції I_i – диференційовні в точці $(\bar{0},\bar{0},\hat{x}_0)$.

Розглянемо наступну скінченномірну екстремальну задачу

$$\begin{cases} I_0(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) \to \inf, \\ I_i(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) = 0,\ i = \overline{1,k}, \\ I_i(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) \leqslant 0,\ i = \overline{k+1,n}, \\ \alpha_m \geqslant 0,\ m = \overline{1,N}, \\ \gamma_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,\nu}, \end{cases} \tag{48}$$

до якої застосуємо правило множників Лагранжа. Отже, існують такі множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_N)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_\nu)$, які одночасно не дорівнюють нулю, що для функції Лагранжа

$$\begin{gathered} \Lambda(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0,\lambda,\mu,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i(\bar{\alpha},\bar{\gamma},x_0) - \\ -\sum_{i=1}^{N}\mu_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{\nu}\beta_i\gamma_i \end{gathered} \tag{49}$$

виконуються наступні умови:

1) $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0$, $i = \overline{k+1,n}$, $\mu_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,N}$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,\nu}$;
2) $\lambda_i\Phi_i(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)) = 0$, $i = \overline{k+1,n}$;
3) $\hat{\Lambda}_{x_0} = 0$;
4) $\hat{\Lambda}_{\alpha_i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,N}$, $\hat{\Lambda}_{\gamma_i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,\nu}$,

тут

$$\hat{\Lambda}_{x_0} = \Lambda_{x_0}(\bar{0},\bar{0},\hat{x}_0,\lambda,\mu,\beta),$$
$$\hat{\Lambda}_{\alpha_i} = \Lambda_{\alpha_i}(\bar{0},\bar{0},\hat{x}_0,\lambda,\mu,\beta),$$
$$\hat{\Lambda}_{\gamma_i} = \Lambda_{\gamma_i}(\bar{0},\bar{0},\hat{x}_0,\lambda,\mu,\beta).$$

Умови 1) і 2) означають виконання умов 1) і 2) теореми 1. Розглянемо тепер умови 3) і 4) з використанням формули диференціювання суперпозиції і леми 1. Тоді маємо

$$\begin{gathered} \hat{\Lambda}_{x_0} = \Lambda_{x_0}(\bar{0},\bar{0},x_0,\lambda,\mu,\beta)\Big|_{x_0\hat{x}_0} = \\ = L^*_{x_0} + L^*_{x_1}\frac{\partial x(t_1,\bar{0},\bar{0},x_0)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\hat{x}_0} = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Тут $L = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\Phi_i(x(t_0),x(t_1))$ – функція Лагранжа задачі (2)–(5). Співвідношення (50), враховуючи (17) буде мати вигляд

$$L^*_{x_0} + L^*_{x_1}\Omega(t_1,t_0) = 0. \tag{51}$$

Позначимо через $\Psi(t)$ – розв'язок системи (7) з початковою умовою

$$\Psi(t_1) = -L_{x_1}. \tag{52}$$

Тоді (51) приймає наступний вигляд

$$L^*_{x_0} - \Psi^*(t_1)\Omega(t_1,t_0) = 0.$$

Використовуємо лему 2, покладемо у першому співвідношені (46) $t = t_1, \tau = t_0$. Тоді останнє співвідношення приймає вигляд $L^*_{x_0} - \Psi(t_0) = 0$, а це разом з (52) означає виконання умов трансверсальності 3) теореми 1. Розглянемо тепер умову 4).

$$\begin{gathered} \hat{\Lambda}_{\alpha_i} = \Lambda_{\alpha_i} = -\mu_i + \\ + \left(L_{x_1}, \frac{\partial x(t_1,\alpha_i,\bar{0},\hat{x}_0)}{\partial\alpha_i}\Big|_{\alpha_i=0}\right) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Останнє з урахуванням (18) приймає вигляд

$$(L_{x_1}, \Omega(t_1,\tau_i)\Delta f(\tau_i)) - \mu_i \geqslant 0, \text{ де} \tag{53}$$

$$\Delta f(\tau_i) = f(\tau_i,\hat{x}(\tau_i),v_i) - f(\tau_i,\hat{x}(\tau_i),\hat{u}(\tau_i)).$$

Тоді ми маємо

$$(\Omega^*(t_1,\tau_i)L_{x_1}, \Delta f(\tau_i)) \geqslant \mu_i,\ i = \overline{1,N}. \tag{54}$$

З останньої формули випливає, що якщо всі $\lambda_i = 0$, тобто функція Лагранжа L задачі (2)–(5) тотожньо дорівнює нулю, тоді $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,N}$.

Враховуючи перше співвідношення (46) при $t = t_1, \tau = \tau_i$ і (52), (54) переписується у вигляді $(\Psi(\tau_i), \Delta f(\tau_i)) \leqslant 0$, що в термінах функції Понтрягіна означає виконання умови 4b) теореми 1 в точці τ_i.

Аналогічно, з урахуванням (19)

$$\hat{\Lambda}_{\gamma_i} = (L_{x_1}, \Omega(t_1, \sigma(r_i))\mu(r_i) * \\ * \frac{\partial f(r_i, \hat{x}(r_i), \hat{u}(r_i))}{\partial u} (z_i - \hat{u}(r_i))) - \beta_i \geqslant 0. \quad (55)$$

Якщо всі $\lambda_i = 0$, то і $\beta_i = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Таким чином, не всі λ_i дорівнюють нулю. Тоді з (55) маємо

$$\mu(r_i) \left(\Psi^{\sigma}(r_i), \frac{\partial f(r_i, \hat{x}(r_i), \hat{u}(r_i))}{\partial u} (z_i - \hat{u}(r_i)) \right) \leqslant 0,$$

а це означає виконання умови 4a) теореми 1 в точці r_i.

Отримані множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, а отже і вектор Ψ залежить від вибраного "пакету голок". Існування "універсальних" і незалежних множників Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ доводиться аналогічно класичному випадку ($\mathbb{T} = \mathbb{R}^1$) з використанням відомої леми про центровану систему компактів.

Теорема 1 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bourdin L., Trelat E.* Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales // SIAM Control Optim. – 2013. – **51**, N5. – P. 3781-3813.

2. *Hilger S.* Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.

3. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. — 369 p.

4. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales // Math. Comput. Modelling. –2009. – **49**, N1. – P. 2019-2028.

5. *Ластівка Л.О., Лаврова О.Є.* . Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах // Вісник Київського національного університету ім.Т. Шевченка. –2014. – N2. – С. 71-76.

6. *Hilscher R., Zeidan V.* Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales // Nonlinear Anal. –2009. – **70**, N9. – P. 3209-3226.

7. *Bourdin L., Trelat E.* General Cauchy-Lipschits theory for Δ–Cauchy problems with Caratheodory dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. – 2014. – **20**, N4. – P. 526-547.