

## ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ РЕГУЛЯРНИМИ ПОЧАТКОВИМИ РОЗПОДІЛАМИ ТИПУ $S'$

Для параболічних типу Шилова рівнянь із змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості та невід'ємним родом встановлено розв'язність задачі Коші в класі необмежених початкових даних, які є регулярними розподілами типу  $S'$ .

The solvability of the Cauchy problem for the Shilov-type parabolic systems with coefficients of bounded smoothness and of nonnegative kind are established for the class of unlimited initial data. The initial data are regular distributions of type  $S'$ .

**Вступ.** У [1] Я.І. Житомирський досліджуючи проблему розширення класу параболічних за Г.Є. Шиловим систем рівнянь із сталими коефіцієнтами, означає новий клас параболічних систем типу Шилова із молодшими коефіцієнтами, залежними лише від просторової змінної, які є параболічно стійкими до зміни своїх коефіцієнтів. Для таких систем методом послідовних наближень він установив існування розв'язку задачі Коші з гладкими обмеженими початковими даними, а відтак, і коректну розв'язність цієї задачі в класі обмежених функцій. Подальше дослідження задачі Коші для параболічних систем типу Шилова проводиться в [2–6]. Тут для систем із невід'ємним родом коефіцієнти яких вже можуть залежати і від  $t$  (неперервно), є обмеженими та нескінченно диференційовними за просторовою змінною, розвинено теорію задачі Коші у просторах типу  $S$  та  $S'$  Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. Зокрема, знайдено фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та досліджено його основні властивості, встановлено коректну розв'язність цієї задачі у зазначених просторах, досліджено якісні властивості розв'язків, описано класи граничних значень гладких розв'язків, які є елементами просторів типу  $S$  та  $S'$ , тощо.

У [7] розглядаються параболічні рівняння типу Шилова із невід'ємним родом, коефіцієнти яких мають скінченний ступінь гладкості, тобто є скінченно диференційовними за просторовою змінною. Для таких

рівнянь побудовано ФРЗК та досліджено його властивості.

У пропонованій роботі для розглянутих у [7] параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами досліджуються питання про існування класичних розв'язків задачі Коші в класі необмежених початкових даних, які є регулярними розподілами типу Жевре.

**1. Постановка задачі.** Нехай  $T > 0$  – фіксоване дійсне число;  $\mathbb{N}$  – множина натуральних чисел;  $\mathbb{R}^n$  – дійсний  $n$ -вимірний простір із скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та нормою  $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ ,  $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$ ;  $\mathbb{Z}_+^n$  – множина всіх  $n$ -вимірних мультиіндексів,  $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$ ;  $\Pi_M := \{(t, x) \mid t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $M \subset \mathbb{R}$ ;  $i$  – уявна одиниця,  $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$ ;  $|z|_+ := |z_1| + \dots + |z_n|$ ,  $z^l := z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n}$ , якщо  $z \in \mathbb{R}^n$  і  $l \in \mathbb{Z}_+^n$ . Через  $S$  позначимо простір Л. Шварца нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}^n$  швидкоспадаючих функцій, а через  $S_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , – простір типу  $S$  Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. [8]:

$$S_\alpha := \{\phi \in S \mid \exists \delta > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial_x^k \phi(x)| \leq c_k e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}\};$$

$S'$  і  $S'_\alpha$  – відповідні топологічно спряжені простори.

Згідно з критерієм збіжності у просторі  $S_\alpha$ , послідовність  $\{\phi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_\alpha$  збігається до  $\phi$  із  $S_\alpha$  у цьому просторі, тобто,  $\phi_\nu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S_\alpha} \phi$ , якщо [8]:

1)  $\forall q \in \mathbb{Z}_+^n \forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n :$

$$|\partial_x^k(\phi_\nu(x) - \phi(x))| \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} 0$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність на кожному компактні  $\mathbb{K}$ );

2)  $\forall \delta > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\forall \nu \in \mathbb{N} : |\partial_x^k \phi_\nu(x)| \leq c_k e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}.$$

Співвідношення між просторами типу  $S$  і топологічно спряженими з ними характеризують наступні неперервні вкладення:

$$S_\alpha \subset S_\beta \subset S \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset S' \subset S'_\beta \subset S'_\alpha,$$

$$0 < \alpha < \beta,$$

де  $L_2(\mathbb{R}^n)$  – відповідний простір Лебега.

Далі, сукупність усіх регулярних узагальнених функцій із  $S'_\alpha$  позначимо через  $\hat{S}'_\alpha$ . Зазначимо, що  $f$  із  $S'_\alpha$  належить до  $\hat{S}'_\alpha$ , якщо його дія визначається рівністю

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \phi(x) dx \quad (\forall \phi \in S_\alpha) \quad (1)$$

за допомогою деякої вимірної за Лебегом функції  $f(\cdot)$ , для якої майже скрізь на  $\mathbb{R}^n$  виконується оцінка

$$|f(x)| \leq c_\delta e^{\delta \|x\|^{1/\alpha}} \quad (2)$$

при кожному  $\delta > 0$ . Прикладом регулярної узагальненої функції із  $S'_\alpha$  є функціонал  $f_P$ , породжений многочленом  $P(\cdot)$  довільно фіксованого степеня, який на елементах  $\phi \in S_\alpha$  визначається рівністю (1) при  $f(\cdot) = P(\cdot)$ .

Розглянемо диференціальне рівняння порядку  $p$  вигляду

$$\begin{aligned} \partial_t u(t; x) &= \sum_{|q|_+ \leq p} a_q(t; x) i^{|q|_+} \partial_x^q u(t; x), \\ (t; x) &\in \Pi_{(0, T]}, \end{aligned} \quad (3)$$

права частина якого допускає зображення

$$\begin{aligned} \sum_{|q|_+ \leq p} a_q(t; x) i^{|q|_+} \partial_x^q u(t; x) &= \{P_0(t; i\partial_x) + \\ &+ P_1(t, x; i\partial_x)\} u(t; x), \end{aligned}$$

де

$$P_0(t; i\partial_x) := \sum_{|q|_+ \leq p} a_q(t) i^{|q|_+} \partial_x^q u(t; x),$$

$$P_1(t, x; i\partial_x) := \sum_{|k|_+ \leq p_1} a_k(t; x) i^{|k|_+} \partial_x^k u(t; x),$$

причому рівняння

$$\partial_t u(t; x) = P_0(t; i\partial_x) u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (4)$$

є параболічним за Г.Є. Шиловим у шарі  $\Pi_{(0, T]}$  з показником параболічності  $h$ ,  $0 < h \leq p$ , зведеним порядком  $p_0$  та невід'ємним родом  $\mu$  [9].

Для рівняння (3) припускатиемо виконання ще таких умов:

(А)  $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu/p_0)$ ,  $0 \leq \mu$ ;

(В) коефіцієнти  $a_q(t; x)$  на множині  $\Pi_{[0, T]}$  є неперервними за змінною  $t$  рівномірно по  $x$ , неперервно диференційовними за змінною  $x$  до порядку  $\alpha_* \geq p$  включно і обмеженими разом із своїми похідними комплексно значними функціями.

**Прикладом** рівняння (3) при  $n = 1$ , для якого виконуються умови (А) і (В) із  $\alpha_* = 3$  є таке рівняння

$$\begin{aligned} \partial_t u(t; x) &= \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t} \partial_x + \frac{t \sqrt[3]{x^{10}}}{(1 + x^2)^2} \right\} \times \\ &\times u(t; x), \quad t \in (0; T], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Відповідним параболічним за Шиловим рівнянням є

$$\begin{aligned} \partial_t u(t; x) &= \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t} \partial_x \right\} u(t; x), \\ t &\in (0; T], \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

для якого  $p = p_0 = 3$ ,  $h = 2$ , а  $\mu \geq 0$ .

Зазначимо, що наведене рівняння не відноситься до класу рівнянь, параболічних за Петровським, ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим.

Наведемо тепер важливі для подальших наших досліджень відомості про ФРЗК для рівнянь (3) і (4).

Нехай  $G(t, \tau; \cdot)$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$ , – ФРЗК для рівняння (4). Відомо [10], що

$$G(t, \tau; \cdot) = F^{-1} [\Theta_\tau^t(\xi)] (t, \tau; \cdot),$$

$$\Theta_{\tau}^t(\xi) := e^{\int_{\tau}^t P_0(\beta; \xi) d\beta} \times e^{-\delta_3 \left( \frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad (7)$$

(тут  $F$  – оператор перетворення Фур'є, а  $P_0(\beta; \cdot)$  – символ диференціального виразу  $P_0(\beta; i\partial_x)$ ), причому правильні такі оцінки:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c > 0 \quad \forall t \in (\tau; T] \quad \forall \tau \in [0; T)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |\partial_x^k G(t, \tau; x)| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|_+}{h}} \times e^{-\delta \left( \frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \alpha := \mu/p_0.$$

Згідно з [7] ФРЗК для (3) має структуру

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t, \tau; x - \xi) + W(t, x; \tau, \xi), \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$W(t, x; \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \times \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy.$$

Тут  $\Phi(t, x; \tau, \xi) := \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t, x, \tau, \xi)$  – функціональний ряд, у якому

$$K_1(t, x, \tau, \xi) := P_1(t, x; i\partial_x) G(t, \tau; x - \xi),$$

$$K_l(t, x, \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x, \beta, y) \times K_{(l-1)}(\beta, y, \tau, \xi) dy, \quad l > 1.$$

Умови (А) і (В) для функції  $Z(t, x; \tau, \xi)$  забезпечують її диференційовність за змінною  $t$  та неперервну диференційовність за змінною  $x$  до порядку  $\alpha_*$  включно, а також, виконання для всіх  $t \in (\tau; T]$ ,  $\tau \in [0; T)$ ,  $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$  і  $|q|_+ \leq \alpha_*$  таких оцінок [7]:

$$|\partial_t Z(t, x; \tau, \xi)| \leq c_1(t-\tau)^{-\frac{n+p}{h}} \times e^{-\delta_1 \left( \frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \quad (5)$$

$$|\partial_x^q Z(t, x; \tau, \xi)| \leq c_2(t-\tau)^{-\frac{n+|q|_+}{h}} \times e^{-\delta_2 \left( \frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \quad (6)$$

$$|\partial_x^q \Phi(t, x; \tau, \xi)| \leq c_3(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|q|_+}{h}} \times$$

(тут оціночні сталі  $c_j$ ,  $\delta_j$  не залежать від  $t$ ,  $\tau$ ,  $x$  і  $\xi$ , а  $\delta_j$  – ще й від  $q$ ).

Далі, задамо для рівняння (3) початкову умову

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in S'_{1-\alpha}, \quad (8)$$

яку розумітимемо як слабку збіжність у просторі  $S'_{1-\alpha}$ , тобто

$$\langle u(t; \cdot), \phi(\cdot) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow +0} \langle f, \phi(\cdot) \rangle \quad (\forall \phi \in S_{1-\alpha})$$

**Означення.** Розв'язком задачі Коші (3), (8) назвемо звичайну функцію  $u(t; x)$ , визначену на множині  $\Pi_{(0;T]}$ , яка задовольняє рівняння (3) у класичному розумінні, а початкову умову (8) у сенсі слабкої збіжності в просторі  $S'_{1-\alpha}$ .

**2. Розв'язування задачі Коші.** Оцінки (6) дозволяють у кожній фіксованій точці  $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$  продовжити дію узагальненої функції  $f$  із класу  $\hat{S}'_{1-\alpha} \subset S'_{1-\alpha}$  не фундаментальний розв'язок  $Z(t, x; 0, \cdot)$  рівняння (3) за правилом (1):

$$\langle f, Z(t, x; 0, \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} Z(t, x; 0, \xi) d\xi, \\ (t; x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

А це означає, що функція

$$u(t; x) = \langle f, Z(t, x; 0, \cdot) \rangle, \quad f \in S'_{1-\alpha}, \quad (9)$$

є коректно визначеною на множині  $\Pi_{(0;T]}$ .

Дослідимо властивості цієї функції  $u$ .

**Лема 1.** На множині  $\Pi_{(0;T]}$  функція  $u(t; x)$ , яка визначається рівністю (9), є диференційовною один раз за змінною  $t$ , а за змінною  $x$  – до порядку  $\alpha_*$  включно, при цьому:

$$\partial_t u(t; x) = \langle f, \partial_t Z(t, x; 0, \cdot) \rangle;$$

$$\partial_x^q u(t; x) = \langle f, \partial_x^q Z(t, x; 0, \cdot) \rangle, \quad |q|_+ \leq \alpha_*. \quad (10)$$

**Доведення.** З огляду на властивості функції  $Z$  стосовно змінних  $t$  і  $x$ , доведення зводиться до обґрунтування можливості

внесення відповідної похідної під знак інтеграла у рівності (9).

Зафіксуємо довільну точку  $(t_0, x_0)$  із  $\Pi_{(0;T]}$  і розглянемо множину  $Q := [t_0/2; T] \times \mathbb{K}_r(x_0)$ , де  $\mathbb{K}_r(x_0)$  – куля у  $\mathbb{R}^n$  з центром у т.  $x_0$  скінченного радіуса  $r$ . Тоді згідно з оцінками (2), (5) і (6) для всіх  $(t; x) \in Q$  маємо:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_t Z(t, x; 0, \xi) d\xi \right| \leq c_\delta c_1 \left( \frac{2}{t_0} \right)^{\frac{n+p}{h}} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta \|\xi\|^{1-\alpha}} e^{-\delta_1 \left( \frac{\|x-\xi\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\xi \leq \\ & \leq c_\delta c_1 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \left\{ e^{-\frac{\delta_1}{2} \left( \frac{\|x-\xi\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha} + \delta \|\xi\|^{1-\alpha}} \right\} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_1}{2} \left( \frac{\|\eta\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\eta; \\ & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_x^q Z(t, x; 0, \xi) d\xi \right| \leq c_\delta c_2 \left( \frac{2}{t_0} \right)^{\frac{n+|q|_+}{h}} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta \|\xi\|^{1-\alpha}} e^{-\delta_2 \left( \frac{\|x-\xi\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\xi \leq \\ & \leq c_\delta c_1 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \left\{ e^{-\frac{\delta_2}{2} \left( \frac{\|x-\xi\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha} + \delta \|\xi\|^{1-\alpha}} \right\} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_2}{2} \left( \frac{\|\eta\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\eta, \quad |q|_+ \leq \alpha_*. \end{aligned}$$

Оскільки при достатньо малому  $\delta > 0$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \left\{ e^{-\frac{\delta_2}{2} \left( \frac{\|x-\xi\|}{T^\alpha} \right)^{1-\alpha} + \delta \|\xi\|^{1-\alpha}} \right\} < +\infty,$$

то попередні оцінки характеризують рівномірну збіжність на множині  $Q$  формально продиференційованих інтегралів

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_t Z(t, x; 0, \xi) d\xi$$

і

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_x^q Z(t, x; 0, \xi) d\xi, \quad |q|_* \leq \alpha_*.$$

А це, у свою чергу, обґрунтовує існування  $\partial_t u(t; x)$  у т.  $t = t_0$  при кожному фіксованому  $x \in \mathbb{R}^n$  і  $\partial_x^q u(t; x)$ ,  $|q|_* \leq \alpha_*$ , у т.  $x = x_0$  при кожному фіксованому  $t \in (0; T]$ , та правильність формул (10).

Лема доведена.

**Лема 2.** При кожному фіксованому  $t \in (0; T]$  функція  $u(t; \cdot)$ , що визначається рівністю (9), є елементом класу  $\hat{S}'_{1-\alpha}$ .

**Доведення.** З диференційовності функції  $u(t; \cdot)$ ,  $t \in (0; T]$ , випливає її належність до  $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ .

Урахувавши співвідношення

$$\begin{aligned} \|\xi\|^\beta &= \|\xi - x + x\|^\beta \leq (\|x - \xi\| + \|x\|)^\beta \leq \\ &\leq 2^\beta (\|x - \xi\|^\beta + \|x\|^\beta), \quad \beta > 0, \quad \{x; \beta\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

згідно з оцінками (2) і (6) для всіх  $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$  і  $\delta \in \left(0; \delta_2 / \left(2 \left(2t^\alpha\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right)$ , де  $\delta_2$  – константа з (6), маємо

$$\begin{aligned} |u(t; x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| |Z(t, x; 0, \xi)| d\xi \leq \\ &\leq c_\delta c_2 t^{-\frac{n+p_1}{h}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\delta \|\xi\|^{1-\alpha}} e^{-\delta_2 \left( \frac{\|x-\xi\|}{t^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\xi \leq \\ &\leq c_\delta c_2 t^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{\delta(2\|x\|)^{1-\alpha}} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\delta_2/(2t^{1-\alpha}) - \delta_2 t^{1-\alpha}) \|x-\xi\|^{1-\alpha}} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{\delta_2}{2} \left( \frac{\|x-\xi\|}{t^\alpha} \right)^{1-\alpha}} d\xi \leq c_\delta c_2 t^{\alpha n - \frac{n+p_1}{h}} \times \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_2}{2} \|\eta\|^{1-\alpha}} d\eta \right) e^{\delta(2\|x\|)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Отже, при кожному фіксованому  $t \in (0; T]$  для функції  $u(t; \cdot)$  на  $\mathbb{R}^n$  виконується відповідна оцінка (2) із довільним  $\delta > 0$ .

Зазначимо також, що оцінка (11) забезпечує визначеність та неперервність лінійного функціонала  $u_t$  типу функції  $u(t; \cdot)$  на елементах  $\phi \in S_{1-\alpha}$  за правилом

$$\langle u_t, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(t; x)} \phi(x) dx, \quad t \in (0; T].$$

Таким чином,  $u_t \in \hat{S}'_{1-\alpha}$  при кожному  $t \in (0; T]$ .

Лема доведена.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

**Теорема.** *Нехай виконуються умови (A) і (B), а початковий розподіл  $f$  із  $S'_{1-\alpha}$  є елементом класу  $\hat{S}'_{1-\alpha}$ , тоді розв'язком задачі Коші (3), (8) є відповідна функція*

$$u(t; x) = \langle f, Z(t, x; 0, \cdot) \rangle, \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]},$$

яка на множині  $\Pi_{(0; T]}$  є диференційовною за змінною  $t$ , а також, диференційовною за змінною  $x$  до порядку  $\alpha_*$  включно, причому для її похідних справджуються формули (10).

**Доведення.** З лінійності функціонала  $f$  та твердження леми 1 знаходимо, що

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial_t - \sum_{|q| \leq p} a_q(t; x) i^{|q|} \partial_x^q \right\} u(t; x) = \\ & = \langle f, \left\{ \partial_t - \sum_{|q| \leq p} a_q(t; x) i^{|q|} \partial_x^q \right\} Z(t, x; 0, \cdot) \rangle = \\ & = \langle f, 0 \rangle = 0, \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}. \end{aligned}$$

Отже, зазначена функція  $u$  є класичним розв'язком рівняння (3) на множині  $\Pi_{(0; T]}$ .

З'ясуємо тепер виконання початкової умови (8). Передусім зазначимо, що твердження леми 2 забезпечує коректність постановки цієї умови для функції  $u$ .

Користуватимемося тут зображенням

$$\begin{aligned} u(t; x) &= \langle f, G(t, 0; x - \cdot) \rangle + \langle f, W(t, x; 0, \cdot) \rangle \equiv \\ & \equiv u_G(t; x) + u_W(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \end{aligned}$$

яке одержується безпосередньо із структури  $Z$  та лінійності  $f$ .

Оскільки  $f \in S'_{1-\alpha}$ , а  $G$  – ФРЗК для рівняння (4), то, як встановлено в [10],  $u_G$  є розв'язком задачі Коші (4), (8), тому

$$\begin{aligned} \langle u_G(t; x), \phi(x) \rangle & \xrightarrow{t \rightarrow +0} \langle f, \phi(x) \rangle \\ & (\forall \phi \in S_{1-\alpha}). \end{aligned}$$

Таким чином обґрунтування виконання умови (8) зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\langle u_W(t; x), \phi(x) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0 \quad (\forall \phi \in S_{1-\alpha}). \quad (12)$$

Змінивши порядок інтегрування згідно з теоремою Фубіні, одержимо

$$\begin{aligned} & \langle u_W(t; x), \phi(x) \rangle = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \overline{W(t, x; 0, \xi)} \phi(x) dx \right) d\xi \equiv \\ & \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) I_W(t; \xi) d\xi, \quad t \in (0; T]. \end{aligned}$$

Тоді для встановлення (12) досить переконатися у правильності таких тверджень:

- а)  $I_W(t; \xi) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{\xi \in \mathbb{K}} 0 \quad (\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n)$ ;  
 б)  $\exists \delta > 0 \exists \varepsilon \in (0; 1) \exists c > 0 \forall t \in (0; \varepsilon)$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : |I_W(t; \xi)| \leq c e^{-\delta \|\xi\|^{1-\alpha}}.$$

Ще раз скориставшись теоремою Фубіні та структурою  $W$ , дістанемо зображення

$$I_W(t; \xi) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G(t, \beta; x - y)} \phi(x) dx \right) \overline{\Phi(\beta, y; 0, \xi)} dy \\ & \equiv \int_0^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \overline{J(t - \beta; y)} \overline{\Phi(\beta, y; 0, \xi)} dy, \\ & (t; \xi) \in \Pi_{(0; T]}, \end{aligned}$$

у якому

$$J(t; y) = G(t, 0; y) * \overline{\phi(y)},$$

$$0 < t \leq T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \phi \in S_{1-\alpha}.$$

Згідно з твердженням леми 3 із [3], для  $J$  справджується граничне співвідношення

$$J(t; \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{S_{1-\alpha}} \phi(\cdot),$$

яке гарантує обмеженість за  $t$  (при  $0 < t \ll 1$ ) сукупності  $J(t; \cdot)$  у просторі  $S_{1-\alpha}$ , тобто  $\exists \delta > 0 \exists \varepsilon \in (0; 1) \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall t \in (0; \varepsilon)$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\partial_\xi^k J(t; \xi)| \leq c_k e^{-\delta \|\xi\|^{1-\alpha}}$$

(див. критерій збіжності в просторах типу  $S$ ).

Звідси та з оцінки (7), а також, з існування сталих  $\delta_0 > 0$  і  $\delta_1 > 0$ , з якими виконується нерівність

$$\|x + \xi\|^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq \delta_0 \|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha}} - \delta_1 \|x\|^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

одержуємо, що

$$\begin{aligned} |I_W(t; \xi)| &\leq c_0 c_3 \times \\ &\times \int_0^t \left( \beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta \|\xi + \eta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_3 \left(\frac{\|\eta\|}{\beta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta \right) d\beta \leq \\ &\leq c_0 c_3 e^{-\tilde{\delta}_0 \|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^t \left( \beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \times \right. \\ &\times \left. \int_{\mathbb{R}^n} e^{\tilde{\delta}_1 \|\eta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_3 \left(\frac{\|\eta\|}{\beta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta \right) d\beta \leq \\ &\leq c_0 c_3 e^{-\tilde{\delta}_0 \|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^t \beta^{\alpha_0 - 1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_3}{2} \|y\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} dy = \\ &= ct^{\alpha_0} e^{-\tilde{\delta}_0 \|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad 0 < t \ll 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (13) \end{aligned}$$

(тут оціночні сталі  $c$  і  $\tilde{\delta}_0$  не залежать від  $t$  і  $\xi$ , а  $\alpha_0 := \alpha n + 1 - \frac{n+p_1}{h} > 0$  згідно з умовою (A)).

З огляду на оцінку (13), твердження а) і б) стають очевидними.

Теорема доведена.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – **23**. – С. 925–932.
2. *Литовченко В.А., Довжичука І.М.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболических систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, N 4. – С. 516–552.
3. *V.A. Litovchenko, I.M. Dovzhytska* Cauchy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Cent. Eur. J. Math. 2012. – **10**, N 3. – P. 1084–1102.

4. *Литовченко В.А., Довжичука І.М.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сиб. мат. журн. – **55**, N 2. – С. 341–349.
5. *Довжичука І.М., Литовченко В.А.* Задача Коші для параболических рівнянь типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2012. – **2**, N 1. – С. 24–31.
6. *Довжичука І.М.* Задача Коші для параболических систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом // Автореферат дис. ... к. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Чернівці, 2014. – 20 с.
7. *Литовченко В.А., Унгуриян Г.М.* Фундаментальный розв'язок задачі Коші для одного класу параболических рівнянь із коефіцієнтами обмеженої гладкості // Математичне і комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Вип. 10. – Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2014. – с.128–139.
8. *Гельфанд І.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
9. *Гельфанд І.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
10. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, N 4. – С. 809–821.