УДК 517.98

©2016 р. **В.К. Маслюченко, В.С. Мельник**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій

Для опуклої множини $E \subseteq \mathbb{R}$ отримано різні умови, при виконанні яких для опуклих вгору і вниз функцій $g, h : E \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на E, існує афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E.

Given a convex set $E \subseteq \mathbb{R}$, we obtain different conditions that imply the existence of an such affine function $f : E \to \mathbb{R}$ such that $g(x) \le f(x) \le h(x)$ for all $x \in E$ and for every convex upward and convex downward functions $g, h : E \to \mathbb{R}$ possessing the inequality $g(x) \le h(x)$ for all $x \in E$.

1. Вступ.

Добре відомо [1, с. 105], що для нормального простору X, неперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ і неперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Це твердження, яке для метричних просторів довів ще Г. Ган [2], називають теоремою про проміжну функцію. Г. Тонґ [3] і М. Катетов [4] узагальнили результат Гана на випадок нормальних просторів і показали, що теорема про проміжну функцію є характеристичною для нормальності у класі T_1-просторів. Після цього з'явилося багато модифікацій і узагальнень цієї теореми (див. [5] і вказану там літературу). Недавно в [6] був знайдений новий аналог теореми про проміжну функцію: для зростаючої неперервної зверху функції $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ і зростаючої неперервної знизу функції $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на $[a, b]$, існує така зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на $[a, b]$. У зв'язку з цим постало природне питання: для яких ще властивостей функцій, крім зростання, можна встановити подібні аналоги теореми про проміжну функцію. Тут ми обговорюємо різні аналоги теореми про проміжну функцію для опуклих функцій. Попередні варіанти отриманих тут результатів були анонсовані в [10].

2. Опуклі та вгнуті функції, підграфіки та надграфіки.

Нагадаємо, що функція $f : E \to \mathbb{R}$, яка визначена на опуклій підмножині E деякого дійсного векторного простору X, називається *опуклою* або *опуклою вниз*, якщо для довільних елементів x_1 і x_2 з E і будь-яких скалярів λ_1 і $\lambda_2 \ge 0$, таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, виконується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Якщо завжди виконується протилежна нерівність $\ge$, то функція називається *вгнутою* або *опуклою вгору*. Легко перевірити, що функція $f : E \to \mathbb{R}$ буде опуклою /вгнутою/ тоді і тільки тоді, коли її *строгий надграфік*

$$Gr^+(f) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y > f(x)\}$$

/*строгий підграфік*

$$Gr^-(f) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y < f(x)\}/$$

буде опуклою множиною в добутку $X \times \mathbb{R}$.

3. Відокремлення опуклих множин у ТВП.

Нехай X — дійсний векторний простір (ВП), f — ненульовий дійсний лінійний функціонал на X і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді $H_\alpha = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ — це гіперплощина в X. Множини

$$G_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

і

$$G^\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

називають відкритими півпросторами простору X, а множини

$$F_\alpha = \{x \in X : f(x) \le \alpha\}$$

і
$$F^\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$
замкненими півпросторами.

Якщо X — це топологічний векторний простір (ТВП) і функціонал f до того ж неперервний, то відкриті /замкнені/ півпростори є відкритими /замкненими/ множинами в X, а гіперплощина H_α замкнена в X.

Кажуть, що підмножини A і B простору X *відокремлюються* гіперплощиною H_α або функціоналом f, якщо $A \subseteq F_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$ або навпаки, і *строго відокремлюються* цією гіперплощиною, якщо $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq G^\alpha$ або навпаки. Підмножини A і B простору X *напівстрого відокремлюються* гіперплощиною H_α, якщо $A \subseteq F_\alpha$ і $B \subseteq G^\alpha$ або $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$.

Добре відома наступна теорема про відокремлення опуклих множин [7, с. 32]

Теорема 1. Нехай A і B — непорожні опуклі множини в ТВП X, причому множина A відкрита і $A \cap B = \varnothing$. Тоді існують ненульовий лінійний неперервний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що $A \subseteq G_\alpha$, $B \subseteq F^\alpha$, зокрема, A і B напівстрого відокремлюються гіперплощиною $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$.

4. Афінні функції.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ на дійсному ВП X називається *афінною*, якщо існують лінійний функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що
$$f(x) = \varphi(x) + \gamma$$
на X. Афінна функція на множині E — це звуження на E деякої афінної функції на X.

Лема 1. Нехай X — дійсний ТВП, E — множина в X з непорожньою внутрішністю, $f_0 : E \to \mathbb{R}$ — неперервна афінна функція, причому $f_0 = f|_E$, де f — афінна функція на X. Тоді і функція f неперервна.

Доведення. Оскільки функція f афінна, то існує лінійний функціонал φ на X, такий, що $f(x) = \varphi(x) + \gamma$ на X для деякого числа $\gamma \in \mathbb{R}$. Ясно, що $f_0 = \varphi_0 + \gamma$, де $\varphi_0 = \varphi|_E$. При цьому функція $\varphi_0 = f_0 - \gamma$ є неперервною, оскільки f_0 неперервна. За умовою існує $x_0 \in \mathrm{int}E$. Тоді існує такий окіл нуля U, що $U_{x_0} = x_0 + U \subseteq E$ і $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 1$, як тільки $x \in U_{x_0}$. Нехай $u \in U$. Тоді $x = x_0 + u \in U_{x_0}$, а значить:
$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 1.$$
Але $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0+u) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0) + \varphi(u) - \varphi(x_0) = \varphi(u)$. Таким чином,
$$|\varphi(u)| \leq 1 \text{ на } U.$$
А отже, φ — неперервний функціонал. А тоді неперервним буде і функціонал $f = \varphi + \gamma$.

5.Лінійні функціонали на добутку $X \times \mathbb{R}$.

Нехай X — дійсний векторний простір. Тоді добуток $X \times \mathbb{R} = \{p = (x, \lambda) : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ — це теж дійсний векторний простір відносно покомпонентного додавання і множення на скаляр. Якщо X — ТВП, то і добуток $X \times \mathbb{R}$ з топологією добутку — це теж ТВП.

Ми будемо використовувати наступний опис спряжених з простором $X \times \mathbb{R}$.

Лема 2. а) Для дійсного векторного простору X функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде лінійним тоді і тільки тоді, коли існують лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що
$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \gamma\lambda$$
на $X \times \mathbb{R}$.

б) Для дійсного ТВП X відображення $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде лінійним неперервним функціоналом тоді і тільки тоді, коли існують лінійний неперервний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що
$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \gamma\lambda$$
на $X \times \mathbb{R}$.

Доведення. $=>$) Нехай $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал. Покладемо $\psi(x) = \varphi(x, 0)$ для кожного $x \in X$ і $\gamma = \psi(0, 1)$. Ясно, що $\psi : X \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал, який буде неперервним, якщо φ неперервний. При цьому.
$$\varphi(x, \lambda) = \varphi((x, 0) + (0, \lambda)) =$$
$$= \varphi(x, 0) + \varphi(\lambda(0, 1)) = \psi(x) + \lambda\gamma.$$
для довільної точки $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$.

$<=$). Перевірка очевидна.

6. Зв'язок між відокремністю графіків та існуванням проміжної афінної функції.

Теорема 2. Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \le h(x)$ на E, та множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ напівстрого відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E. Якщо ж X — ТВП, а множини A і B напівстрого відокремлюються замкненою гіперплощиною, то існує така афінна неперервна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E.

Доведення. Припустимо, що $E \neq \emptyset$, бо коли $E = \emptyset$, твердження тривіальне. Нехай існують лінійний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що $\varphi(p) < \alpha$ на A і $\varphi(p) \ge \alpha$ на B. Виберемо $x_0 \in E$ і розглянемо числа $\lambda_1 = g(x_0) - 1$ і $\lambda_2 = h(x_0) + 1$. Ясно, що $\lambda_1 < g(x_0)$, а $\lambda_2 > h(x_0)$. Тому точки $p_1 = (x_0, \lambda_1)$ і $p_2 = (x_0, \lambda_2)$ належать до множин A і B відповідно. В такому разі

$$\varphi(p_1) < \alpha \le \varphi(p_2). \qquad (\star)$$

За лемою 2 існують такий лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, що

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma$$

для кожного $x \in X$ і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо X — ТВП і функціонал φ неперервний, то і ψ буде неперервним. Нерівність $(\star)$ переписується в еквівалентному вигляді так:

$$\psi(x_0) + \lambda_1\gamma < \alpha \le \psi(x_0) + \lambda_2\gamma.$$

Звідси випливає, що

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\gamma > 0.$$

Але $\lambda_2 - \lambda_1 = h(x_0) + 1 - g(x_0) + 1 = 2 + h(x_0) - g(x_0) \ge 2 > 0$. Тому і $\gamma > 0$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$ і довільну точку $x \in E$. Для чисел $\lambda = g(x) - \varepsilon$ і $\mu = h(x) + \varepsilon$, очевидно, будемо мати, що $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$. Тому

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma < \alpha$$

і

$$\varphi(x, \mu) = \psi(x) + \mu\gamma \ge \alpha,$$

тобто

$$\lambda\gamma < \alpha - \psi(x) \le \mu\gamma$$

звідки, поділивши на додатне число γ, отримуємо, що

$$\lambda < \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi(x) \le \mu.$$

Формулою $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi$ визначається афінний функціонал на просторі X, адже $\frac{1}{\gamma}\psi$ — це лінійний функціонал на X. Він буде неперервним, якщо ψ неперервний. Для f і фіксованого $x \in E$ виконується нерівність

$$g(x) - \varepsilon < f(x) \le h(x) + \varepsilon.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Таким чином f — це шукана проміжна афінна функція, яка буде неперервною коли функціонал φ неперервний.

Теорема 3. Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута, а $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \le h(x)$ на E, причому існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E. Тоді множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ строго відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Якщо ж X — ТВП і внутрішність E непорожня, а проміжна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$ неперервна, то множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ строго відокремлюються деякою замкненою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$.

Доведення. Для афінної функції $f : E \to \mathbb{R}$ існують лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\beta \in \mathbb{R}$, такі, що $f(x) = \psi(x) + \beta$ на X. Якщо ж X — ТВП і f до того ж неперервна, то згідно з лемою 1 і функціонал ψ буде неперервним.

Для довільних $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$ виконуються нерівності

$$\lambda < g(x) \le f(x) \le h(x) < \mu.$$

Зауважимо, що функція

$$\varphi(x, \xi) = \xi - \psi(x) - \beta$$

є афінною на $X \times \mathbb{R}$ і неперервною, якщо f неперервна. При цьому функція

$$\varphi(x, \xi) = \xi - f(x)$$

задана на $E \times \mathbb{R}$. Але

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda - f(x) < 0 \text{ на } A$$

і

$$\varphi(x, \mu) = \mu - f(x) > 0 \text{ на } B.$$

отже, A і B строго відокремлюються гіперплощиною $\xi - \psi(x) = \beta$, яка буде замкненою для неперервної функції f.

7. Існування проміжної афінної неперервної функції.

Теорема 4. Нехай E — відкрита непорожня опукла множина в дійсному топологічному векторному просторі X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, і одна з функцій g чи h неперервна. Тоді існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.

Доведення. Нехай функція g неперервна. Підграфік $G = \{(x; \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda < g(x)\}$ вгнутої неперервної функції g — це відкрита непорожня опукла множина в добутку $P = X \times \mathbb{R}$, а надграфік $H = \{(x; \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda > h(x)\}$ — це непорожня опукла підмножина в P і $G \cap H = \emptyset$.

За теоремою 1 існує такий лінійний ненульовий неперервний функціонал $\varphi : P \to \mathbb{R}$, що $G \subseteq G_\alpha = \{(x; \lambda) : \varphi(x; \lambda) < \alpha\}$ і $H \subseteq F^\alpha = \{(x; \lambda) : \varphi(x; \lambda) \geq \alpha\}$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. А отже, G та H напівстрого відокремлюються замкненою гіперплощиною $\varphi^{-1}(\alpha)$. Таким чином, за теоремою 2, існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.

8. Застосування C-внутрішніх точок.

У першому томі відомої праці Н. Данфорда і Дж. Шварца [9, с. 446] подано теорему про відокремлення опуклих множин, яка використовує поняття C-внутрішньої точки. Ми дамо тут своє доведення цієї теореми, подібне до доведення теореми Мазура [7, с. 23].

Нехай X — векторний простір над $\mathbb{R}$, $M \subseteq X$ і $a \in X$. Тоді a називається C-*внутрішньою точкою* для M, якщо для довільного $x \in X$ існує таке $\varepsilon > 0$, що з умови $|\delta| \leq \varepsilon$, випливає, що $a + \delta x \in M$. Зрозуміло, що кожна C-внутрішня точка a в M входить в M. При цьому a буде C-внутрішньою точкою в M тоді і тільки тоді, коли множина $M - a$ буде радіальною в X.

Лема 3. Нехай X — векторний простір над $\mathbb{R}$, A — опукла підмножина X, $0 \notin A$, a — C-внутрішня точка в A. Тоді існує лінійний ненульовий функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$, такий, що $\varphi(x) \geq 0$ на A.

Доведення. Нехай $U = A - a$. Оскільки U — радіальна множина, то формулою $p(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda U\}$ визначена функція $p : X \to [0, +\infty)$. Оскільки множина U опукла, то з того, що $x \in \lambda U$, $x \in \mu U$ для $\lambda, \mu \geq 0$ випливає, що $x + y \in \lambda U + \mu U = (\lambda + \mu)U$, а отже, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Окрім того, виконується рівність $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $\lambda \geq 0$.

Очевидно, що $\{x : p(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x : p(x) \leq 1\}$, а отже, $\{x : p(x - a) < 1\} \subseteq A = \{x : x - a \in U\} \subseteq \{x : p(x - a) \leq 1\}$. На лінійному підпросторі $X_0 = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ простору X визначимо лінійний функціонал $f_0(\lambda a) = -\lambda$.

Доведемо, що $f_0(x) \leq p(x)$ на X_0. Нехай $x \in X_0$ і $x = \lambda a$. Якщо $\lambda \geq 0$, то $f_0(x) = -\lambda \leq 0$, а $p(x) \geq 0$, а отже, $f_0(x) \leq p(x)$. Нехай $\lambda < 0$. Оскільки $0 \notin A$, то $p(-a) \geq 1$, а отже, $f_0(x) = -\lambda \leq -\lambda p(-a) = p(\lambda a) = p(x)$. Таким чином, $f_0(x) \leq p(x)$ всюди на X_0.

З аналітичної форми теореми Гана-Банаха [7, с. 11] випливає, що існує лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, такий, що $f|_{X_0} = f_0$ і $f(x) \leq p(x)$ всюди на X. Нехай $x \in A$. Тоді $p(x - a) \leq 1$, а отже, оскільки $f(x - a) \leq p(x - a)$, то $f(x - a) = f(x) - f(a) \leq 1$. Тому $f(x) \leq 1 + f(a) = 1 + f_0(a) = 1 - 1 = 0$. Таким чином, $f(x) \leq 0$ всюди на A. Поклавши $\varphi(x) = -f(x)$, отримуємо шуканий лінійний функціонал на X.

Зауважимо, що $a \in X_0$ і

$$f(a) = f_0(a) = -1,$$

отже, $f \neq 0$, а значить, і $\varphi = -f \neq 0$.

Теорема 5. Нехай A і B — диз'юнктні опуклі підмножини дійсного ВП X, причому A має C-внутрішню точку, а $B \neq \emptyset$. Тоді існує ненульовий лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, що відокремлює A від B.

Доведення. Позначимо $C = A - B$. Нехай a — C-внутрішня точка в A. Тоді для довільного $x \in X$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного δ з того, що $|\delta| < \varepsilon$, випливає, що $a + \delta x \in A$, а отже, для довільного $b \in B$ відповідно $a + \delta x - b \in A - B = C$, тому точка $a - b = c$ є C-внутрішньою для множини C.

Очевидно, що $0 \notin C$, інакше існувала б така точка x, що належала б і до A, і до B. Згідно з лемою 3, існує ненульовий лінійний функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$, такий, що $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in C$.

Таким чином, для довільних $x \in A$ та $y \in B$:

$$\varphi(x) \geq \varphi(y)$$

а отже, числа $\gamma = \inf\{\varphi(x) : x \in A\}$ і $\beta = \sup\{\varphi(y) : y \in B\}$ дійсні і для них $\gamma \geq \beta$. Можна вибрати $\alpha \in \mathbb{R}$, таке, що $\gamma \geq \alpha \geq \beta$. Таким чином, гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ відокремлює опуклі множини A та B.

Теорема 6. Нехай X — дійсний векторний простір, $g : X \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : X \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X, і одна з множин $A = Gr^- g$ чи $B = Gr^+ h$ має C-внутрішню точку в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

Доведення. Нехай $A = Gr^- g$ має C-внутрішню точку. Оскільки $B \neq \emptyset$, то за теоремою 5, існують ненульовий лінійний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ відокремлює A і B. За лемою 2 існують лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що

$$\varphi(x, \xi) = \psi(x) + \gamma\xi$$

на $X \times \mathbb{R}$.

Нехай $A \cap H_\alpha \neq \emptyset$ та $B \cap H_\alpha \neq \emptyset$. Виберемо відповідно $a = (x_1, \lambda) \in A \cap H_\alpha$ та $b = (x_2, \mu) \in B \cap H_\alpha$. Тоді $g(x_1) > \lambda$ та $h(x_2) < \mu$ і

$$\varphi(a) = \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha = \psi(x_2) + \mu\gamma = \varphi(b).$$

Розглянемо точки $a_1 = (x_1, \frac{\lambda + g(x_1)}{2})$ та $b_1 = (x_2, \frac{\mu + h(x_2)}{2})$. Ясно, що $a_1 \in A$ і $b_1 \in B$. Нехай $\gamma > 0$. Тоді

$$\varphi(a_1) = \psi(x_1) + \frac{\lambda + g(x_1)}{2}\gamma > \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha.$$

Оскільки , $\lambda - 1 < \lambda < g(x_1)$, то і $a_2 = (x_1, \lambda - 1) \in A$. Але

$$\varphi(a_2) = \psi(x_1) + (\lambda - 1)\gamma < \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha.$$

Таким чином, множина A не міститься в жодному з замкнених півпросторів, породжених гіперплощиною $\varphi^{-1}(\alpha)$, що неможливо.

Нехай тепер $\gamma < 0$. Тоді

$$\varphi(b_1) = \psi(x_2) + \frac{\mu + h(x_2)}{2}\gamma > \psi(x_2) + \mu\gamma = \alpha.$$

Але точка $b_2 = (x_2, \mu + 1) \in B$ і

$$\varphi(b_2) = \psi(x_2) + (\mu + 1)\gamma < \psi(x_2) + \mu\gamma = \alpha.$$

Тепер уже множина B не міститься в жодному з замкнених півпросторів, породжених гіперплощиною $\varphi^{-1}(\alpha)$, а це не так.

Розглянемо тепер випадок, коли $\gamma = 0$. Тоді для довільних $x \in X$ та $\xi \in \mathbb{R}$ маємо, що $\varphi(x, \xi) = \psi(x)$. Оскільки функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ненульовий, то і $\psi \neq 0$. Але гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ відокремлює множини A і B, отже, $\varphi(x) \leq \alpha$ на A або $\varphi(x) \geq \alpha$ на A. Разом з тим ненульовий лінійний функціонал ψ набуває всіх дійсних значень. У випадку $A \subseteq \varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$ візьмемо таку точку $x_0 \in X$, що $\psi(x_0) > \alpha$. Тоді і $\varphi(x_0, \lambda) = \psi(x_0) > \alpha$ для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$. Але для $\lambda_0 = g(x_0) - 1$ ми будемо мати, що $(x_0, \lambda_0) \in A$, отже, $\varphi(x_0, \lambda_0) \leq \alpha$, що неможливо. Якщо ж $A \subseteq \varphi^{-1}([\alpha, +\infty))$, то вибираємо таку точку $x_0 \in X$, що $\psi(x_0) < \alpha$. Тоді $\varphi(x_0, \lambda_0) = \psi(x_0) < \alpha$ для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$. Але для числа $\lambda_0 = g(x_0) - 1$ будемо мати, що $(x_0, \lambda_0) \in A$, отже, $\varphi(x_0, \lambda_0) \geq \alpha$, що знову приводить до суперечності.

Таким чином, виходить, що жодний з випадків $\gamma > 0$, $\gamma > 0$ і $\gamma = 0$ неможливий, але це не так. Тому наше припущення про те, що $A \cap H_\alpha \neq \emptyset$ і $B \cap H_\alpha \neq \emptyset$ хибне, отже, $A \cap H_\alpha = \emptyset$ або $B \cap H_\alpha = \emptyset$. Звідси негайно випливає, що множини A і B напівстрого відокремлюються гіперплощиною H_α. Тоді на основі теореми 2 існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

9. Уточнення теореми 2 та інше доведення теореми 6.

Зауважимо, що теорему 2 можна уточнити.

Теорема 7. Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ відокремлюються деякою гіперплощиною H в добутку $X \times \mathbb{R}$, причому $A \nsubseteq H$ або $B \nsubseteq H$. Тоді існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E. Якщо ж X — ТВП, а множини A і B відокремлюються замкненою гіперплощиною H, і $A \nsubseteq H$ або $B \nsubseteq H$, то існує така афінна неперервна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.

Доведення. Будемо використовувати позначення доведення теореми 2. Припустимо, що $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал і α — дійсне число, такі, що $\varphi(p) \leq \alpha$ на A, $\varphi(p) \geq \alpha$ на B, $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ і $A \nsubseteq H$. Тоді існує елемент $p_1 = (x_0, \lambda_1) \in A \backslash H$. Для цієї точки $\lambda_1 < g(x_0)$ і $\varphi(p_1) < \alpha$. Покладемо $\lambda_2 = h(x_0) + 1$ і $p_2 = (x_0, \lambda_2)$. Ясно, що $p_2 \in B$, тому $\varphi(p_2) \geq \alpha$. Таким чином,

$$\varphi(p_1) < \alpha \leq \varphi(p_2)$$

Як і в доведенні теореми 2 звідси легко виводиться що число γ з зображення $\varphi(x, \xi) = \psi(x) + \gamma\xi$ обов'язково додатне. На основі цього, як і в теоремі 2, будується афінна функція $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\psi}{\gamma}$, яка і є шуканою. Вона буде неперервною, якщо гіперплощина H є замкненою в ТВП X.

Так само розглядається випадок, коли $B \nsubseteq H$.

Тепер можна на основі теореми 7 подати коротше доведення теореми 6.

За теоремою 5 існують лінійний ненульовий функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що гіперплощина $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ відокремлює A і B, а саме, $\varphi(p) \leq \alpha$ на A і $\varphi(p) \geq \alpha$ на B. За лемою 2 існують лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що

$$\varphi(x, \xi) = \psi(x) + \gamma\xi$$

на $X \times \mathbb{R}$.

Доведемо , що $A \nsubseteq H$, тобто, що $A \cap G_\alpha \neq \emptyset$, де $G_\alpha = \{p \in X \times \mathbb{R} : \varphi(p) < \alpha\}$. Нехай $A \cap G_\alpha = \emptyset$. Тоді $A \subseteq H$. Виберемо $x_0 \in X$ і покладемо $\lambda_0 = g(x_0) - 1$, $\lambda_1 = g(x_0) - 2$, $p_0 = (x_0, \lambda_0)$, і $p_1 = (x_0, \lambda_1)$. Ясно, що $\{p_0, p_1\} \subseteq A$, отже, $\{p_0, p_1\} \subseteq H$, і тому

$$\varphi(p_0) = \psi(x_0) + \gamma\lambda_0 = \alpha = \psi(x_0) + \gamma\lambda_1.$$

Звідси випливає, що $\gamma = \gamma(\lambda_0 - \lambda_1) = 0$. Тоді для довільних $x \in X$ та $\xi \in \mathbb{R}$ маємо, що $\varphi(x, \xi) = \psi(x)$. Оскільки функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ненульовий, то і $\psi \neq 0$. За побудовою $\psi(x) \leq \alpha$ для всіх $x \in X$, що неможливо, бо ненульовий лінійний функціонал ψ на дійсному векторному просторі X набуває всіх дійсних значень.

Таким чином, $A \cap G_\alpha \neq \emptyset$. Тоді за теоремою 7 отримуємо, що існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

10. Відокремлення довільних опуклих множин.

У "Математичній енциклопедії"[8, ст. 797] без доведення і посилань подано такий результат.

Теорема 8. Нехай A і B — довільні диз'юнктні опуклі множини у дійсному ВП X. Тоді існує ненульовий лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, який відокремлює A від B.

З нього так само як в доведенні теореми 6 негайно випливає таке твердження.

Теорема 9. Нехай X дійсний ВП X, $g : X \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : X \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X. Тоді існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Энгелькинг Р. *Общая топология.* — М.: Мир, 1986. — 752 с.

2. Hahn H. *Uber halbstetige und unstetige Functionen* // Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien. Math. - naturwiss. Kl. Abt. IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

3. Tong H. *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces* // Duke Math. J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

4. Katetov M. *On real-valued functions in topological spaces* // Fund. Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

5. Маслюченко В. К., Мельник В. С. *Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — Київ: Інститут математики НАН України. — 2014. — **11**,№3 — С.173-181.

6. Маслюченко В.К., Петей С.П. *Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації* // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№2. — С.64-71.

7. Маслюченко В.К. *Елементи теорії двоїстості.* — Чернівці: Рута, 2005. — 160 с.

8. *Математическая энциклопедия. Т.1.* — М.:1977. — 1152 ст.

9. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

10. Маслюченко В.К, Мельник В.С. *Теореми про проміжну функцію для опуклих функцій*// Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 24-27 лютого 2016. (тези доповідей), — Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника 2016. — С.98-100.