УДК 517.53

©2016 р. І. Овчар, Я. Савчук, О. Скасків

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
Львівський національний університет імені Івані Франка

ТЕОРЕМА ТИПУ ВІМАНА-ВАЛІРОНА ДЛЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНОЮ КОМПЛЕКСНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ПОКАЗНИКІВ

У цій статті доведено теорему типу Вімана-Валірона про оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з довільною необмеженою комплексною послідовністю показників λ_n через максимальний член цього ряду, а також отримано новий опис за плоскою мірою $\tau_2(E)=\int_E \frac{dxdy}{|z|^2}<+\infty$, $z=x+iy$ виняткової множини E.

In this article a Wiman-Valiron's type theorem about estimation of a general term of entire Dirichlet Series with arbitrary complex exponents λ_n by means of its maximum term is proved. Additionally, a new statement concerning the plane measure $\tau_2(E)=\int_E \frac{dxdy}{|z|^2}<+\infty$, $z=x+iy$ of an exclusive set E is obtained.

1. Вступ і огляд результатів

Розглянемо цілі функції F, задані в класі $D^{+\infty}$ абсолютно збіжними у всій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda=(\lambda_n)$ — довільна послідовність попарно різних невід'ємних дійсних чисел, тобто $\lambda_n\neq\lambda_k$ $(n\neq k)$, $\{\lambda_n : n\geq 0\}\subset\mathbb{R}_+\overset{def}{=}[0,+\infty)$. Через D_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a=\{z: Rez<a\},\quad a\leq+\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (1), де $\{\lambda_n : n\geq 0\}\subset\mathbb{R}_+$.

Для $F\in D_a$, $a\leq+\infty$, та $x<a$ позначимо

$$M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\},$$

$$\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n\geq 0\}.$$

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій;
L_1 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(t)}{t}dt=O(\Phi(x))\quad(x\to+\infty),$$

$\mathcal{L}_0$ – клас функцій $\Phi\in\mathcal{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(t)}{t}dt=O(\Phi(x))$ $(x\to+\infty)$,
L_2 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати

$$(\forall c>0):\quad \varphi(ct)=O(\varphi(t))\quad(t\to+\infty).$$

Через $D_*^{+\infty}$ позначимо підклас класу $D^{+\infty}$, в який входять лише ті функції $F\in D^{+\infty}$, для яких виконуються умови

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\mu(x,F)}{x}=0, \tag{2}$$

$$\mu(0,F)=\max\{|a_n|\colon n\geq 0\}=1.$$

Логарифмічною мірою вимірної множини $E\subset[1,+\infty)$ називаємо величину

$$\ln-\mathrm{meas}(E)\overset{def}{=}\int_E d\ln x.$$

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta>0$ така, що $x_m\leq\delta x_n$ для всіх $n\geq n_1$ і $m\geq n+1$.

Зрозуміло, що кожна незростаюча додатна послідовність є майже монотонно спадна. Для того, щоб у цьому переконатись досить вибрати $\delta=1$.

У статті [12] отримано оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу D через максимальний член цього ряду.

Теорема 1. *[12] Нехай функція $F \in D_*^{+\infty}$, така що $\Phi_1 \in \mathcal{L}_0$, де $x\Phi_1(x) = \ln \mu(x, F)$. Якщо $v(t)$ – невід'ємна на $[0, +\infty)$, додатна при $t \to +\infty$ функція, така, що $\int\limits_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$ і виконується умова $\ln n = o(\ln |a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то існують функція $c_1(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, для якої виконується умова $\int_0^{+\infty} c_1(t)v(4t)dt < +\infty$, і множина $E \subset \mathbb{R}_+$ така, що*

$$\ln -meas\,(E) \le 2 \cdot \int\limits_0^{\infty} c_1(t)v(4t)dt < +\infty \quad (3)$$

і для всіх $n \ge 0$ та $x > 0$ $(x \notin E)$ виконується нерівність

$$|a_n|e^{x\lambda_n} \le \mu(x, F)\times \quad (4)$$

$$\times \exp\Big\{ - xe^{-2K_F} \int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)} v(4t)dt \Big\},$$

де $\mu_n = -\ln |a_n|$, $\varphi(t)$ — обернена функція до функції $\Phi(t) = \ln \mu(t, F)$

$$K_F \stackrel{def}{=} \sup\big\{\frac{1}{\Phi_1(x)} \int_0^x \frac{\Phi_1(t)}{t} dt \colon x \ge x_0\big\} <$$

$$< +\infty,\ \Phi_1(x) := \frac{\ln \mu(x, F)}{x},\ F \in D^{+\infty},$$

$\nu = \nu(x, F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$ — центральний індекс ряду (1).

Метою цієї роботи є доведення одного варіанту теореми типу Вімана-Валірона в класі абсолютно збіжних у всій комплексній площині рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких (λ_n), взагалі кажучи, є довільною послідовністю комплексних чисел, для якої нескінченність є точкою скупчення, тобто $\lambda_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ і $\overline{\lim}_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty$. Відзначимо, що подібне твердження анонсовано у 2003 р. в [10].

2. Основні результати

Через S_a позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a = \{z\colon \text{Re } z < a\},\ a \le +\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (1), де $\{\lambda_n\colon n \ge 0\} \subset [0, +\infty)$.

Через $\mathcal{S}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всій комплексній площині $\mathbb{C}$ (цілих) рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких $\{\lambda_n\colon n \ge 0\} \subset \mathbb{C}$.

Для $F \in \mathcal{S}$ і $z \in \mathbb{C}$ позначимо

$$\mu(z, F) \stackrel{def}{=} \sup\{|a_n|e^{\text{Re}(z\lambda_n)}\colon n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

У випадку дійсної послідовності показників дане означення переходить в означення максимального члена ряду Діріхле з класу S.

Для вимірної за Лебегом (наприклад, для Борелевої) множини $E \subset \mathbb{C}$ та $\alpha > 0$ позначимо

$$\tau_\alpha(E) \stackrel{def}{=} \int_{E\cap\{z\colon |z|\ge 1\}} \frac{dxdy}{|z|^\alpha}, \quad z = x + iy.$$

Зауважимо, що для круга $D_R = \{z\colon |z| \le R\}$ і кругового сектора $B_R = \{z\colon |z| \le R, \alpha_1 \le \arg z \le \alpha_2\}$

$$\tau_2(D_R) = 2\pi \ln R, \quad \tau_2(B_R) = (\alpha_2 - \alpha_1) \ln R$$

$$(R \ge 1).$$

Для функції $F \in \mathcal{S}$ і фіксованого $z \in \mathbb{C}$ визначимо функцію

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty),$$

а через $\varphi_z(t)$ — обернену до неї.

Для функції $F \in \mathcal{S}$ визначимо, відповідно, конус зростання і конус її швидкого зростання

$$\gamma(F) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C}\colon \lim_{t\to+\infty} \Phi_z(t) = +\infty\},$$

$$\gamma_+(F) \stackrel{def}{=} \{z \in \gamma(F)\colon \ \Phi_z \in L_1\}.$$

Твердження 1. *Для кожної функції $F \in \mathcal{S}$*

$$z \in \gamma(F) \iff (\forall\ r > 0)\colon\ (rz) \in \gamma(F),$$

а також

$$z \in \gamma_+(F) \iff (\forall\ r > 0)\colon\ (rz) \in \gamma_+(F).$$

Справді, для $r > 0$, оскільки $\Phi_{rz}(t) = r\Phi_z(rt)$, то перше твердження очевидне. Звідси, досить довести, що $z \in \gamma(F) \implies (\forall\ r > 0)\colon\ (rz) \in \gamma(F)$. Маємо

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi_{rz}(t)}{t} dt = r \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi_z(rt)}{rt} d(rt) =$$

$$= r \int\limits_{rx_0}^{rx} \frac{\Phi_z(u)}{u} d(u) = O(\Phi_z(rx)) = O(\Phi_{rz}(x))$$

$$(x \to +\infty).$$

У статті [11] доведене таке твердження.

Твердження 2 ([11]). *Для кожної функції $F \in \mathcal{S}$*

$$\gamma(F) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \sup\{\mathrm{Re}(z\lambda_n)\colon$$
$$n \in \mathbb{Z}_+\} = +\infty\}.$$

Зауважимо тепер, що, якщо $z \notin \gamma(F)$, то у випадку, коли

$$\beta(z) \overset{def}{=} \sup\{\mathrm{Re}(z\lambda_n)\colon\ n \in \mathbb{Z}_+\} > 0,$$

за Твердженням 1 для

$$\mathfrak{M}(z, F) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)}$$

маємо

$$\ln \mathfrak{M}(tz, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(tz, F) =$$
$$= (1 + o(1))\beta(z)t \quad (t \to +\infty).$$

Якщо ж $z \in \gamma_+(F)$, то за твердженням 3 до $\mathfrak{M}(z, F)$ можна застосувати Теорему 1, за якою

$$\ln \mathfrak{M}(tz, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(tz, F)$$

при $t \to +\infty$ зовні деякої множини E_z скінченної логарифмічної міри.

Зауважимо, що якщо знайдеться така стала $A < +\infty$, що для кожного $z \in \gamma(F),\ |z| = 1$

$$\ln -\mathrm{meas}(E_z) \le A,$$

то для множини $E = \bigcup_{z\in\gamma(F),\ |z|=1} E_z$ негайно отримаємо, що

$$\tau_2(E) = \int_{\psi\colon e^{i\psi}\in\gamma(F)} \Big(\int_{E_{e^{i\psi}}} \frac{dt}{t}\Big) d\psi \le A \cdot \theta,$$

де θ — кутова міра множини $\{z\colon z \in \gamma(F), |z| = 1\}$.

Наведені вище міркування, дозволяють вважати доведеним таке твердження.

Теорема 2. *Нехай функція $F \in \mathcal{S}$, а $v(u)$ – невід'ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $u \to +\infty$ функція, така, що $\int_0^{+\infty} v(u)du < +\infty$. Якщо $\ln n = = o(\ln |a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то для кожного $z \in \gamma_+(F), |z| = 1$ існує функція $c_z(u) \uparrow +\infty \quad (u \to +\infty)$ така, що для всіх $n \ge 0$ і для всіх $t > 0 \quad (t \notin E_z, \ln -\mathrm{meas}(E_z) < +\infty)$ виконується нерівність*

$$|a_n| e^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_n)} \le \mu(tz, F)\times \tag{5}$$

$$\times \exp\left\{ -t \int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - u) \frac{c_z(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u) du \right\}.$$

де $\mu_n = -\ln |a_n|$, а $\nu = \nu(tz, F) = \max\{n\colon |a_n| e^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$ – центральний індекс ряду (1), а функція $\varphi_z^*(u)$ — обернена функція до функції $\Phi_z^*(t) = \ln \mu(tz, F)$.

Однак, звідси не випливає, що $\tau_2(E) < +\infty$. Насправді правильне дещо сильніше твердження, тобто, доведемо таку теорему.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 2, то функцію c_z можна для всіх z вибрати одну і ту ж, тобто, $c_z(u) \equiv c_1(u)$, а для множини*

$$E = \bigcup_{z\in\gamma(F),\ |z|=1} E_z$$

виконується $\tau_2(E) < +\infty$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in \gamma_+(F), |z| = 1$. Зауважимо спочатку, що з того, що $F(0) \ne \infty$ випливає, що $|a_n| \to 0$ $(n \to +\infty)$, звідки $\mu_n = -\ln |a_n| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Не зменшуючи загальності, припускатимемо, що $\mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, тобто, послідовність (μ_n) монотонно зростає до $+\infty$.

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} v(u)du$ збіжний, то $l(x) \stackrel{def}{=} \int_x^{+\infty} v(u)du \downarrow 0$ $(x \to +\infty)$, а також $c_1(x) \stackrel{def}{=} (l(x))^{-1/2} \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$. Крім того,

$$M = \int\limits_0^{+\infty} c_1(u)v(4u)du \leq -\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} (l(x))^{-\frac{1}{2}} dl(x) = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{l(0)} < +\infty.$$

Виберемо тепер

$$\alpha(t) = -\int\limits_t^{+\infty} \frac{1}{\varphi_z^*(u)} c_1(u)v(4u)du.$$

Зауважимо, що з (6) випливає, що

$$\alpha(t) = o\left(\frac{1}{\varphi_z^*(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{7}$$

Позначимо

$$\alpha_n = \exp\left\{-\int\limits_0^{\mu_n} \alpha(t)dt\right\}, \quad \tau_n = \alpha(\mu_n),$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} \mathrm{e}^{s\mu_n}, \tag{8}$$

з $b_n = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)}$. Покажемо, що функція $f \in S_0$. Справді, з того, що $F \in \mathcal{S}$, випливає

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} = +\infty,$$

тому $\mathrm{Re}(z\lambda_n) = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$. Звідси та з (6)

$$\ln\frac{b_n}{\alpha_n} = \mathrm{Re}(z\lambda_n) - \int\limits_0^{\mu_n}\int\limits_t^{+\infty} \frac{c(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u)du = o(\mu_n)$$
$$(n \to +\infty).$$

Оскільки за умовою $\ln n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$, то за теоремою Валірона для абсциси абсолютної збіжності ряду (8) маємо

$$\sigma_a(f) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln(b_n/\alpha_n)}{\mu_n} = 0.$$

Отже, $f \in S_0$.

Для того, щоб можна було застосувати міркування, подібні як при доведенні теореми 2 з [12], досить показати, що центральний індекс $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$. Це випливає з того, що $\mu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$. Останнє співвідношення є рівносильне до умови

$$\sup\left\{\frac{b_n}{\alpha_n} :\ n \geq 0\right\} = +\infty. \tag{9}$$

Покажемо, що ця умова виконується. Справді, $0 \leq \ln\mu(tz, F) = -\mu_\nu + t\,\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)$ $(t \geq t_0)$, $\nu = \nu(tz-0, F)$, звідки $\mu_\nu \leq t\,\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)$. Оскільки, $\Phi_z^*(t) = t\Phi_z(t) = \ln\mu(tz, F) \leq t\,\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)$ $(t \geq t_0)$, то $t \leq \varphi_z(\mathrm{Re}(z\lambda_\nu))$, де φ_z – обернена функція до функції Φ_z. Тому

$$t \leq \varphi_z(\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)) \Longrightarrow \mu_\nu \leq t\,\mathrm{Re}(z\lambda_\nu) \leq \tag{10}$$
$$\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)\varphi_z(\mathrm{Re}(z\lambda_\nu)) \quad (t \geq t_0),$$

де $\nu = \nu(tz-0, F)$. Залишилося зауважити, що функція $t/\varphi_z^*(t)$ є оберненою до функції $t\varphi_z(t)$, де φ_z – функція обернена до функції $\Phi_z(t) = \frac{\Phi_z^*(t)}{t}$, тому

$$\mathrm{Re}(z\lambda_\nu) \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} \quad (t \geq t_0) \quad \nu = \nu(tz-0, F).$$

Звідси

$$\ln\frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} - \int\limits_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)|dt, \quad \nu = \nu(\sigma-0, F).$$

З умови $\Phi_z \in L_1$ випливає, що $t/\varphi_z^*(t) = \Phi_z(\varphi_z^*(t)) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, а також

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\varphi_z^*(t)} = \frac{x}{\varphi_z^*(x)} + \int\limits_0^{\varphi_z^*(x)} \frac{\Phi_z^*(u)}{u^2}du + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\varphi_z^*(x)} + O\left(\frac{\Phi_z^*(\varphi_z^*(x))}{\varphi_z^*(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\varphi_z^*(x)}\right)$$
$$(x \to +\infty).$$

Тому, застосовуючи (7), отримуємо

$$\int\limits_0^{\mu_\nu} |\alpha(u)|du = o\big(\mu_\nu/\varphi_z^*(\mu_\nu)\big) \quad (t \to +\infty),$$

$$\nu=\nu(tz-0,F),$$

звідки, остаточно одержуємо

$$\ln\frac{b_\nu}{\alpha_\nu}\geq(1+o(1))\frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)}\to+\infty\quad(t\to+\infty),$$

$$\nu=\nu(tz-0,F),$$

тобто виконується (9) і тому $\nu(x,f)\to+\infty$ $(x\to-0)$.

Нехай (s_j) – послідовність точок стрибка центрального індекса $\nu(s,f)$ занумерована у такий спосіб, що $\nu(s,f)=j$ для $s\in[s_j,s_{j+1})$ і, якщо $\nu(s_{j+1}-0,f)=j$ і $\nu(s_{j+1},f)=j+p$, то $s_{j+1}=s_{j+2}=\dots=s_{j+p}<s_{j+p+1}$. Зрозуміло, що $s_j\to-0$ $(j\to+\infty)$.

Якщо $x\in[s_k+\tau_k,s_{k+1}+\tau_k)\stackrel{def}{=}E_k^*\subset(-\infty;0)$, то $\nu(x-\tau_k,f)=k$ і за означенням $\mu(x-\tau_k,f)$ подібно, як і у доведенні теореми 2 з [2] та теореми 1 з [12] для всіх $n\geq0$ одержуємо

$$\frac{b_n}{\alpha_n}\mathrm{e}^{(x-\tau_k)\mu_n}\leq\mu(x-\tau_k,f).$$

Звідси, при $n\neq k$

$$\frac{b_n}{b_k}\mathrm{e}^{x(\mu_n-\mu_k)}\leq\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathrm{e}^{\tau_k(\mathrm{Re}(z\lambda_n-z\lambda_k))}=$$

$$=\exp\left\{-\int\limits_{\mu_k}^{\mu_n}(\alpha(u)-\alpha(\mu_k))du\right\}<1.$$

Підставляючи тут $x=-\frac{1}{t},t>0$, одержуємо

$$\frac{|a_n|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_n)}}{|a_k|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_k)}}=\left(\frac{b_n\mathrm{e}^{x\mu_n}}{b_k\mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^t<1\quad(n\neq k),\tag{11}$$

тобто $\nu(tz,F)=k$ і $\mu(tz,F)=|a_k|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_k)}$ при $t\in[-(s_k+\tau_k)^{-1},-(s_{k+1}+\tau_k)^{-1})$. Тому для всіх $t>0$ таких, що $x=-t^{-1}\in\bigcup_{k\in J}E_k^*$, де $J\subset\mathbb{N}\cup\{0\}$ – множина значень центрального індексу $\nu(x,f)$, і для всіх $n\geq0$ з (11) маємо

$$\frac{|a_n|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_n)}}{|a_k|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_k)}}=\left(\frac{b_n\mathrm{e}^{x\mu_n}}{b_k\mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^t\leq\tag{12}$$

$$\leq\exp\left\{-t\int\limits_{\mu_k}^{\mu_n}(\mu_n-u)\alpha'(u)du\right\}$$

при $t=-\frac{1}{x}>0$. Звідси, для всіх $t\in\bigcup\limits_{k\in J}\widetilde{E}_k\stackrel{def}{=}\widetilde{E}$, де $\widetilde{E}_k\subset(0,+\infty)$ – образ множини E_k^* при відображенні $t=-\frac{1}{x}$, одержуємо (5).

Оцінимо логарифмічну міру множини

$$E_z=[-s_1^{-1},+\infty)\setminus\widetilde{E}=$$

$$=\bigcup_{k=1}^{+\infty}[-(s_k+\tau_{k-1})^{-1},-(s_k+\tau_k)^{-1}).$$

Зауважимо, що оскільки $(\forall\ n)(\forall\ t)\colon-\mu_n+t\,\mathrm{Re}(z\lambda_n)\leq\ln\mu(tz,F)$, то при $t=\varphi_z^*(\mu_n)$ отримаємо

$$\mathrm{Re}(z\lambda_n)\leq\frac{\mu_n+\Phi_z^*(t)}{t}=\frac{2\mu_n}{\varphi_z^*(\mu_n)}.\tag{13}$$

Звідси і з (10) виводимо

$$t\leq\varphi_z(\mathrm{Re}(z\lambda_{\nu(tz-0,F)}))\leq\varphi_z\left(\frac{2\mu_{\nu(tz-0,F)}}{\varphi_z^*(\mu_{\nu(tz-0,F)})}\right)\leq\tag{14}$$

$$\leq c\varphi_z^*(\mu_{\nu(tz-0,F)}),$$

останню нерівність виводимо за допомогою умови $\Phi_1\in L_1$, тут $c<+\infty$. Справді нехай $K\in(0,+\infty)$ таке, що

$$\int\limits_{t\mathrm{e}^{-2K}}^{t}\frac{\Phi_z(u)}{u}du\leq\int\limits_0^t\frac{\Phi_z(u)}{u}du\leq K\Phi_z(t).$$

Тоді, $2\Phi_z\left(t\mathrm{e}^{-2K}\right)\leq\Phi_z(t)$. Звідси, (14) одержуємо з $c=\mathrm{e}^{2K}$.

Нехай тепер $k\in J$. Тоді

$$\nu(s_k+\tau_{k-1}-0,f)=$$

$$=\nu\left(-(s_k+\tau_{k-1}-0)^{-1}z,F\right)\leq k-1$$

і, отже, застосовуючи (14), маємо

$$|s_k+\tau_{k-1}|^{-1}=-(s_k+\tau_{k-1})^{-1}\leq c\varphi_z^*(\mu_{k-1}).\tag{15}$$

Звідси за означенням τ_k отримуємо

$$|s_k+\tau_{k-1}|^{-1}(|\tau_{k-1}|-|\tau_k|)\leq c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k}c_1(u)v(4u)du,$$

а також при $k\to+\infty$

$$\ln-\mathrm{meas}(\widetilde{E}_k)=$$

$$= \ln - \operatorname{meas}\left(\left([|s_k+\tau_{k-1}|^{-1}, |s_k+\tau_k|^{-1})\right)\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{s_k+\tau_{k-1}}{s_k+\tau_k}\right| \leq \frac{|\tau_{k-1}|-|\tau_k|}{|s_k+\tau_k|} \leq$$

$$\leq\leq \frac{|\tau_{k-1}|-|\tau_k|}{|s_k+\tau_{k-1}|-(|\tau_{k-1}|-|\tau_k|)} \leq$$

$$\leq c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du\left(1-c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du\right)^{-1} \leq$$

$$\leq 2c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du,$$

де стала $c>0$ визначена вище. Якщо ж тепер $j\notin J$ і $k,p\in J$ такі, що $p<j<k$, $s_p<s_{p+1}=s_j=s_k<s_{k+1}$, то

$$\bigcup_{j=p+1}^{k}\widetilde{E}_k = \bigcup_{j=p+1}^{k}[|s_j+\tau_{j-1}|^{-1}; |s_j+\tau_j|^{-1}) =$$

$$= [|s_{p+1}+\tau_p|^{-1}, |s_k+\tau_k|^{-1})$$

і, отже,

$$\ln - \operatorname{meas}\left(\bigcup_{j=p+1}^{k}\widetilde{E}_k\right) \leq \ln\frac{|s_{p+1}+\tau_p|}{|s_{p+1}+\tau_k|} \leq$$

$$\leq \frac{|\tau_p|-|\tau_k|}{|s_{p+1}+\tau_p|-(|\tau_p|-|\tau_k|)}.$$

Застосовуючи (15), при $p\to+\infty$ маємо

$$\ln - \operatorname{meas}\left(\bigcup_{j=p+1}^{k}\widetilde{E}_k\right) \leq 2c\int\limits_{\mu_p}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du.$$

Тому, остаточно

$$\ln - \operatorname{meas}(E_z) = \ln - \operatorname{meas}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}\widetilde{E}_j\right) \leq$$

$$\leq 2c\int\limits_{0}^{\infty} c_1(u)v(4u)du \leq c\sqrt{l(0)} < +\infty.$$

Звідси негайно отримаємо, що

$$\tau_2(E) = \int_{\psi:\, e^{i\psi}\in\gamma(F)}\Big(\int_{E_{e^{i\psi}}}\frac{dt}{t}\Big)d\psi \leq c\sqrt{l(0)}\cdot\theta.$$

Теорему 3 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию*// Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, №1. – С. 41-47.
2. Скаскив О.Б. *О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости*// Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №11. – С. 1532-1541.
3. Скаскив О.Б. *О росте в полуполосах аналитических функций, педставленных рядами Дирихле*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №5. – С. 681-694.
4. Шеремета М.Н. *Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №6. – С. 843-853.
5. Скаскив О.Б., Стасюк Я.З. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей*// Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №5. – С. 117-128.
6. Скасків О.Б. *Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле*// Матем. студії. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 37-46.
7. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле*// Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, №1. – С.100-106.
8. Сало Т., Скасків О. *Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле*// Матем. Вісник НТШ. – 2007. – Т. 3. – С. 764-574.
9. Долинюк М., *Про правильне зростання суперпозиції ряду Діріхле і зростаючої функції*// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 45-51.
10. Lutsyshyn M.R., Skaskiv O.B. *Borel relation for entire Dirichlet series with complex exponents*// Complex Analysis and its Applications: Book of abstracts. – Internationale conf. (Lviv, May 26-29, 2003). – Lviv, 2003. – P.45.
11. Луцишин М.Р. *Про максимальний член цілого ряду Діріхле з комплексними показниками і монотонними коефіцієнтами*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С.33–36.
12. Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2010. – Вип.72. – С.232–242.