

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ДОБУТОК ДВОХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО L -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ Є ФУНКЦІЄЮ З ТОГО Ж КЛАСУ

Узагальнено результати А. Д. Кузика та М. М. Шеремети про властивості цілих функцій обмеженого l -індексу на випадок цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком. Зокрема, доведено, що клас цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком є замкненим відносно операції множення функцій.

We generalize the results of A. D. Kuzyk and M. M. Sheremeta on properties of entire functions of bounded l -index for entire functions of bounded L -index in direction. In particular, it is proved that a class of entire functions of bounded L -index in direction is closed under the operation of multiplication of functions.

1. Вступ. А. Кузик та М. Шеремета ([1]-[2]) зробили важливий внесок у побудову теорії цілих функцій обмеженого l -індексу у випадку однієї змінної. Нами спільно із О. Скасківим узагальнено їхнє означення для цілих функцій декількох змінних, замінивши у ньому звичайну похідну на похідну за напрямком. Відповідно такі функції називаються функціями обмеженого L -індексу за напрямком (див. означення нижче). Їхні властивості досліджені у багатьох статтях ([3]-[6]). Підсумком цих досліджень є монографія [7]. Зазначимо, що наявний інший підхід до введення поняття обмеженого індексу у \mathbb{C}^n через заміну похідної на частинні похідні (див., наприклад, статті М. Салмасі, М. Бордуляк, М. Шеремети, Ф. Нурая та Р. Патерсона [8]-[12]).

У цій статті ми доведемо один критерій обмеженості L -індексу за напрямком для цілих функцій у \mathbb{C}^n , а також те, що добуток цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком є функцією обмеженого L -індексу за напрямком. Г. Фріке [13] отримав відповідний критерій для цілих функцій обмеженого індексу, а М. Шеремета [14] його узагальнив для цілих функцій обмеженого l -індексу. Використовуючи опис поведінки логарифмічної похідної та розподілу нулів цих функцій Г. Фріке [15] довів, що клас цілих функцій обмеженого індексу є замкненим відносно множення. Для l -індексу від-

повідне твердження отримали М. Шеремета та А. Кузик [2]. Водночас зауважимо, що сума двох цілих функцій обмеженого індексу може не бути функцією обмеженого індексу [17]. У кінці статті наведено подібний приклад для цілих функцій обмеженого індексу за напрямком.

2. Основні поняття та позначення. Нехай $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Наведемо основне означення.

Означення 1. [3] Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$* , якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$

$$\left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \leq k \leq m_0 \right\},$$

де $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} := F(z)$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \text{grad} F, \bar{\mathbf{b}} \rangle$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}} \right)$, $k \geq 2$.

Найменше таке $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L -індексом за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ цілої функції $F(z)$* і позначається $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$.

Якщо $L(z) \equiv 1$, то $F(z)$ називається *функцією обмеженого індексу за напрямком \mathbf{b}* та $N_{\mathbf{b}}(F) = N_{\mathbf{b}}(F, 1)$.

У випадку $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$ та $L = l$ ми отримаємо означення цілої функції обмеженого l -індексу (див. [1,2,14]); а якщо ж ще й $L(z) \equiv 1$, то воно зводиться до означення

цілої функції обмеженого індексу, яке запропоноване Б. Лепсоном [16].

Нам будуть потрібні деякі позначення. Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ визначимо $\lambda_1^b(\eta) = \inf_{z \in \mathbb{C}^n} \inf_{t_0 \in \mathbb{C}} \inf \left\{ \frac{L(z+tb)}{L(z+t_0b)} : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z+t_0b)} \right\}$, $\lambda_2^b(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup_{t_0 \in \mathbb{C}} \sup \left\{ \frac{L(z+tb)}{L(z+t_0b)} : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z+t_0b)} \right\}$. Через Q_b^n позначимо клас функцій L , які задовольняють умову $(\forall \eta \geq 0) : 0 < \lambda_1^b(\eta) \leq \lambda_2^b(\eta) < +\infty$.

Нехай $L^*(z)$ — додатна неперервна функція у \mathbb{C}^n . Ми пишемо $L \asymp L^*$, якщо для деяких θ_1, θ_2 , $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < +\infty$, та усіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконуються нерівності $\theta_1 L(z) \leq L^*(z) \leq \theta_2 L(z)$.

Для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо $g_{z^0}(t) := F(z^0 + tb)$. Якщо $g_{z^0}(t) \neq 0$ для усіх $t \in \mathbb{C}$, то покладемо $G_r^b(F, z^0) := \emptyset$; якщо $g_{z^0}(t) \equiv 0$, то $G_r^b(F, z^0) := \{z^0 + tb : t \in \mathbb{C}\}$. І нарешті коли $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та (a_k^0) є послідовністю нулів функції $g_{z^0}(t)$, тоді $G_r^b(F, z^0) := \bigcup_k \left\{ z^0 + tb : |t - a_k^0| \leq \frac{r}{L(z^0 + a_k^0 b)} \right\}$, $r > 0$. Нехай $G_r^b(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} G_r^b(F, z^0)$. Зауважимо, що при $L(z) \equiv 1$, то $G_r^b(F) \subset \{z \in \mathbb{C}^n : \text{dist}(z, Z_F) < r|b|\}$, де Z_F — нульова множина функції F . Через $n(r, z^0, t_0, 1/F) = \sum_{|a_k^0 - t_0| \leq r} 1$ позначимо лічильну функцію послідовності нулів (a_k^0) .

2. Допоміжні твердження. Нам будуть потрібні три наступні твердження, отримані у [3].

Теорема 1. Нехай $L \in Q_b^n$, $L \asymp L^*$. Ціла функція $F(z)$ є функцією обмеженого L^* -індексу за напрямком b тоді і тільки тоді, коли F є обмеженого L -індексу за напрямком b .

Теорема 2. Нехай $L \in Q_b^n$. Ціла функція $F(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком b тоді і тільки тоді, коли існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{|\frac{\partial^{p+1} F(z)}{\partial b^{p+1}}|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max_{0 \leq k \leq p} \frac{|\frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k}|}{L^k(z)}. \quad (1)$$

Теорема 3. Нехай F — ціла функція у \mathbb{C}^n , $L \in Q_b^n$. $F(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком b тоді і тільки тоді, коли

1) для кожного $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для усіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^b(F)$

$$\left| \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial b} \right| \leq PL(z); \quad (2)$$

2) для будь-якого $r > 0$ існує $\tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ такого, що $F(z^0 + tb) \not\equiv 0$, та усіх $t_0 \in \mathbb{C}$

$$n\left(\frac{r}{L(z^0 + t_0 b)}, z^0, t_0, \frac{1}{F}\right) \leq \tilde{n}(r). \quad (3)$$

3. Основні теореми. Використовуючи теорему 2, доведемо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $L \in Q_b^n$. Ціла функція F має обмежений L -індекс за напрямком $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $C \in (0, +\infty)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що для усіх $z \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{k=0}^N \frac{\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k} \right|}{k! L^k(z)} \geq C \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k} \right|}{k! L^k(z)}. \quad (4)$$

Доведення. Нехай $0 < \theta < 1$. Якщо ціла функція F має обмежений L -індекс за напрямком b , то за теоремою 1 вона є обмеженого L^* -індексу за напрямком b , де $L^*(z) = \theta L(z)$. Позначимо $N^* = N_b(L^*, F)$. Таким чином, можна вивести (див. також доведення теореми 2.9, [7, с.38-39]), що

$$\max_{0 \leq k \leq N_b(L^*, F)} \frac{\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k} \right|}{k! L^k(z)} \geq \theta^{N_b(L^*, F) - j} \frac{\left| \frac{\partial^j F(z)}{\partial b^j} \right|}{j! L^j(z)}$$

для усіх $j \geq 0$ та

$$\sum_{j=N_b(L^*, F)+1}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^j F(z)}{\partial b^j} \right|}{j! L^j(z)} \leq \frac{\theta}{1 - \theta} \sum_{k=0}^{N_b(L^*, F)} \frac{\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k} \right|}{k! L^k(z)},$$

тобто отримали (4) із $N = N^*$ та $C = \frac{1-\theta}{\theta}$.

Тепер доведемо достатність. Міркуючи подібно, як у статті Г. Фріке [13], з (4) виводимо, що

$$\frac{\left| \frac{\partial^{N+1} F(z)}{\partial b^{N+1}} \right|}{(N+1)! L^{N+1}(z)} \leq \frac{N+1}{C} \max_{0 \leq k \leq N} \frac{\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial b^k} \right|}{k! L^k(z)}.$$

Застосовуючи тепер теорему 2, отримуємо потрібний висновок.

Наведемо застосування теореми 3.

Теорема 5. Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $F(z)$ — ціла функція обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\Phi(z)$ — ціла функція у \mathbb{C}^n та $\Psi(z) = F(z)\Phi(z)$. Функція $\Psi(z)$ є функцією обмеженого L -індексу за напрямком \mathbf{b} тоді і тільки тоді, коли функція $\Phi(z)$ є функцією обмеженого L -індексу за напрямком \mathbf{b} .

Доведення. Позаяк ціла функція $F(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} , за теоремою 3 для кожного $r > 0$ існує $\tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для усіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, при яких $F(z^0 + t\mathbf{b}) \neq 0$, та усіх $t_0 \in \mathbb{C}$ $n\left(\frac{r}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{F}\right) \leq \tilde{n}(r)$. Звідси,

$$\begin{aligned} n\left(\frac{r}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{F}\right) &\leq \\ &\leq n\left(\frac{r}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{\Psi}\right) \leq \\ &\leq n\left(\frac{r}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{\Phi}\right) + \tilde{n}(r). \end{aligned}$$

Таким чином, умова 2 теореми 3 виконується або не виконується одночасно для обох функцій $\Psi(z)$ та $\Phi(z)$. Якщо $\Phi(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} , то для кожного $r > 0$ існують числа $P_F(r) > 0$ та $P_\Phi(r) > 0$ такі, що $\left|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq P_F(r)L(z)$, $\left|\frac{1}{\Phi(z)} \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq P_\Phi(r)L(z)$ для усіх $z \in (\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)) \cap (\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Phi))$. Оскільки

$$\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Psi) \subset (\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)) \cap (\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Phi)),$$

$$\left|\frac{1}{\Psi(z)} \frac{\partial \Psi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq \left|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| + \left|\frac{1}{\Phi(z)} \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right|,$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Psi)$ ми маємо $\left|\frac{1}{\Psi(z)} \frac{\partial \Psi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq (P_F(r) + P_\Phi(r))L(z)$, тобто за теоремою 3 функція $\Psi(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Навпаки, нехай $\Psi(z)$ є функцією обмеженого L -індексу за напрямком \mathbf{b} і $r > 0$. Спершу ми покажемо, що для кожного $\tilde{z}^0 = z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$ ($r > 0$) та усіх $\tilde{d}^k = z^0 + d_k^0\mathbf{b}$, де d_k^0 є нулями функції $\Phi(z^0 + t\mathbf{b})$, маємо

$$|\tilde{z}^0 - \tilde{d}^k| > \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\tilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0, r)} \geq \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\tilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}. \quad (5)$$

З іншої сторони, нехай існують $\tilde{z}^0 = z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Phi)$ та $\tilde{d}^k = z^0 + d_k^0\mathbf{b}$ такі, що $|\tilde{z}^0 - \tilde{d}^k| \leq \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\tilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0, r)}$. Тоді за визначенням $\lambda_2^{\mathbf{b}}$ є справедливою така оцінка $L(\tilde{d}^k) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0, r)L(\tilde{z}^0)$. Звідси, $|\tilde{z}^0 - \tilde{d}^k| = |\mathbf{b}| \cdot |t_0 - d_k^0| \leq \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\tilde{d}^k)}$, тобто $|t_0 - d_k^0| \leq \frac{r}{2L(\tilde{d}^k)}$, а це суперечить тому, що $\tilde{z}^0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(\Phi)$.

Розглянемо $\bar{K}_0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - t_0| \leq \frac{r}{2L(\tilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right\}$. Ця множина не містить нулів функції $\Phi(z^0 + \mathbf{b})$, але може містити нулі $\tilde{c}^k = z^0 + c_k^0\mathbf{b}$ функції $\Psi(z^0 + t\mathbf{b})$. Позаяк $\Psi(z)$ є обмеженого L -індексу за напрямком \mathbf{b} , то множина \bar{K}_0 за теоремою 3 містить щонайбільше $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_1\left(\frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)$ нулів c_k^0 функції $\Psi(z^0 + t\mathbf{b})$. Для усіх $c_k^0 \in \bar{K}_0$, використовуючи означення $Q_{\mathbf{b}}^n$, ми отримаємо таку нерівність $L(z^0 + c_k^0\mathbf{b}) \geq \lambda_1^{\mathbf{b}}\left(\frac{r}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)L(z^0 + t_0\mathbf{b})$. Тому, кожна множина $m_k^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_k^0| \leq \frac{r_1}{L(z^0 + c_k^0\mathbf{b})}\right\}$ з $r_1 = \frac{r\lambda_1^{\mathbf{b}}\left(\frac{r}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)}{4(\tilde{n}_1+1)\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}$ міститься у множині $s_k^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_k^0| \leq \frac{r_1}{\lambda_1^{\mathbf{b}}\left(\frac{r}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)L(z^0 + t_0\mathbf{b})}\right\}$. Загальна сума діаметрів цих множин не перевищує

$$\begin{aligned} \frac{2\tilde{n}_1 r_1}{\lambda_1^{\mathbf{b}}\left(\frac{r}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)L(z^0 + t_0\mathbf{b})} &= \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0 + t_0\mathbf{b})} \times \\ &\times \frac{\tilde{n}_1}{(\tilde{n}_1 + 1)} < \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0 + t_0\mathbf{b})}. \end{aligned}$$

Тому, існує таке $r^* \in \left(0, \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}\right)$, що для всіх t з кола $\{t : |t - t_0| = \frac{r^*}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}\}$ точка $z^0 + t\mathbf{b} \notin G_{r_1}^{\mathbf{b}}(\Psi)$, а тому $z^0 + t\mathbf{b} \notin G_{r_1}^{\mathbf{b}}(F)$. За теоремою 3 для усіх таких точок $z^0 + t\mathbf{b}$ справджується

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\Phi(z^0 + t\mathbf{b})} \frac{\partial \Phi(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| &\leq \\ &\leq \left|\frac{1}{\Psi(z^0 + t\mathbf{b})} \frac{\partial \Psi(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| + \\ &+ \left|\frac{1}{F(z^0 + t\mathbf{b})} \frac{\partial F(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq (P_{\Psi}^* + P_F^*)L(z^0 + t\mathbf{b}), \quad (6)$$

де P_{Ψ}^* та P_F^* залежать тільки від r_1 , тобто лише від r . Але функції $\frac{1}{\Phi(z)} \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}$ є аналітичними у \bar{K}_0 . Отож, застосовуючи принцип максимуму модуля до функції $\frac{1}{\Phi(z^0 + t\mathbf{b})} \frac{\partial \Phi(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}$ як функції змінної t , ми отримуємо, що модуль такої функції у точці t_0 не перевищує максимуму її модуля на колі $\left\{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| = \frac{r^*}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}\right\}$. Це означає, що нерівність (6) виконується для $z^0 + t_0\mathbf{b}$. Отже, ми довели, що перша умова теореми 3 виконується. Вище ми перевірили, що друга умова теореми 3 також виконується. З огляду на теорему 3 функція $\Phi(z)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Нижче наведено приклад функцій обмеженого індексу за напрямком, сума яких є функцією необмеженого індексу за тим самим напрямком. Наша побудова базуватиметься на ідеях зі статті [17] (див. також [14, с.36]).

Приклад 1. Нехай $F(z) = \cos\langle z, c \rangle + \cosh\langle z, c \rangle$, де $c \in \mathbb{C}^n$ вибране так, що $\langle c, \bar{\mathbf{b}} \rangle = 1$. Позаяк $\frac{\partial^4 F(z)}{\partial \mathbf{b}^4} \equiv F(z)$, для $p \geq 4$ маємо

$$\frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| \leq \frac{G(z)}{4}, \quad (7)$$

де $G(z) = \max \left\{ \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \leq k \leq 3 \right\}$. Отже, $F(z)$ — обмеженого індексу за напрямком \mathbf{b} і $N_{\mathbf{b}}(F) = 3$.

Повторюючи міркування з [17], отримуємо, що

$$(\forall z \in \mathbb{C}^n): G(z) \geq A \exp\{0, 5|\langle z, c \rangle|\}, \quad (8)$$

де $A = \text{const} > 0$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \langle z, c \rangle 2^{-j})^j.$$

Як відомо, вона є функцією необмеженого індексу за кожним напрямком \mathbf{b} таким, що $\langle \mathbf{b}, c \rangle \neq 0$, бо кратність її нулів необмежена (див. також приклад 1.4 [7, с.19]). Позначивши $t = \langle z, c \rangle$, отримуємо функцію

$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t2^{-j})^j$, яка є функцією однієї комплексної змінної. Для неї у статті [17] отримані такі співвідношення

$$\frac{|\varphi^{(p)}(t)|}{p!} \leq BM(2r, \varphi), \quad (9)$$

$$M(2r, \varphi) \leq C \exp\{0, 5|\langle z, c \rangle|\} \leq C'G(z), \quad (10)$$

де $|t| = r$, $B = M(2, \varphi) \geq 1$, $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(t)| : |t| = r\}$, C та C' — додатні сталі.

Нехай $\varepsilon > 0$ досить мала стала, $H(z) = F(z) + \varepsilon\Phi(z)$. Тоді з врахуванням (7), (9), (10) для $n \geq 4$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| &\leq \frac{G(z)}{4} + \varepsilon BM(2r, \varphi) \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon BC' \right) G(z). \end{aligned} \quad (11)$$

А для $n \leq 3$ з (9) та (10) випливає

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| &\geq \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| - \varepsilon BM(2r, \varphi) \geq \\ &\geq \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| - \varepsilon BC'G(z), \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq p \leq 3} \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| &\geq G(z) - \varepsilon BCG(z) = \\ &= (1 - \varepsilon BC')G(z). \end{aligned} \quad (12)$$

З (11) та (12) при $\varepsilon = \frac{3}{8BC'}$ тепер отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| &\leq \frac{1/4 + \varepsilon BC'}{1 - \varepsilon BC'} \max_{0 \leq k \leq 3} \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k H(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| = \\ &= \max \left\{ \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k H(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \leq k \leq 3 \right\}. \end{aligned}$$

Отже, H — функція обмеженого індексу за напрямком \mathbf{b} і $N_{\mathbf{b}}(H) = 3$. Водночас, F — функція обмеженого індексу за напрямком \mathbf{b} , але $\Phi(z) = \frac{H(z) - F(z)}{\varepsilon}$ — необмеженого індексу за напрямком \mathbf{b} .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. Целые функции ограниченного l -распределения значений // Матем. заметки. – 1986. – **39**, N1. – С. 3-13. Engl. transl. in: *Kuzyk A.D., Sheremeta M.M.* Entire functions of bounded l -distribution of values. Math. notes. – 1986. – **39**, N1. – P. 3-8.
2. Шеремета М. Н., Кузык А. Д. О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l -индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, N2. – С. 142-150. Engl.transl. in: *Sheremeta M. N., Kuzyk A. D.* Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l -index // Sib. Math. J. – 1992. – **33**, N2. – P. 304-312.
3. Бандура А. І., Скасків О. Б. Цілі функції обмеженого L -індексу за напрямком // Mat. Stud. – 2007. – **27**, N1. – P. 30-52.
4. Бандура А. І. Достатні умови обмеженості L -індексу за напрямком для цілих функцій з "плоскими" нулями роду p // Матем. вісник НТШ. – 2009. – **6**. – P. 44-49.
5. Bandura A.I., Skaskiv O.B. Boundedness of L -index in direction of functions of the form $f(\langle z, m \rangle)$ and existence theorems // Mat. Stud. – 2014. – **41**, N1. – P. 45–52.
6. Bandura A. I., Skaskiv O. B. Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, N1. – P. 103–109. [dx.doi.org/10.15330/ms.43.1.103-109](https://doi.org/10.15330/ms.43.1.103-109).
7. Bandura A. I., Skaskiv O. B. Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Chyslo, 2016. – 130 p. <https://arxiv.org/abs/1508.07486> (accepted for publication in <http://chyslo.com.ua/>)
8. Salmassi M. Functions of bounded indices in several variables // Indian J. Math. – 1989. – **31**, N3. – P. 249–257.
9. Бордуляк М. Т., Шеремета М. М. Обмеженість L -індексу цілої функції багатьох змінних // Доп. НАН України. – 1993. – **9**. – С. 10–13.
10. Бордуляк М. Т. Простір цілих в \mathbb{C}^n функцій обмеженого L -індексу // Матем. студії. – 1995. – **4**. – С. 53–58.
11. Nuray F., Patterson R. F. Entire bivariate functions of exponential type // Bull. Math. Sci. – 2015. – **5**, N2. – С. 171–177. [dx.doi.org/10.1007/s13373-015-0066-x](https://doi.org/10.1007/s13373-015-0066-x)
12. Nuray F., Patterson R. F. Multivalence of bivariate functions of bounded index // Le Matematiche. – 2015. – **70**, N2. – С. 225–233. [dx.doi.org/10.4418/2015.70.2.14](https://doi.org/10.4418/2015.70.2.14)
13. Fricke G.H. Entire functions of locally slow growth // J. Anal. Math. – 1975. – **28**, N1. – P. 101–122.
14. Sheremeta M. Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.
15. Fricke G. H. Functions of bounded index and their logarithmic derivatives // Math. Ann. – 1973. – **206**. – С. 215-223.
16. Lepson B. Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. – 1968. – **2**. – P. 298–307.
17. Pugh W. J. Sums of functions of bounded index // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **22**. – P. 319-323.