УДК 123.456

©2016 р. І.А. Бондар

Інститут математики НАН України

УМОВИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НИХ

Розглянуто неоднорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром, яка є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Вводячи керування зведено дану систему до розв'язної. Знайдено вигляд такого керування та критерій розв'язності системи. Розглянуто аналогічну проблему для крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь.

We consider an inhomogeneous system of integro-differential equations with degenerate kernel that is not solvable at all inhomogeneities. The given system is reduced to a solvable one by adding a control. We find an expansion for such a control and provide with a solvability test for the system. A similar problem to the boundary-value problem for a system of integro-differential equations is considered.

1. Незавжди розв'язні інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром. Розглянемо неоднорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds =$$

$$= f(t), \quad t\epsilon[a,b], \quad (1)$$

у припущені, що вона є не розв'язною при $\forall f(t) \in L_2[a,b]$.

Використовуватимемо позначення з [1–3]: $A(t), B(t)$—$m\times n$, $\Phi(t)$ —$n\times m$, $f(t)$—$n\times 1$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; стовпчики матриць $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$,

Будемо шукати розв'язок системи (1) у класі вектор-функцій $x(t)$, таких що:

$$x(t) \in D_2[a,b], \ \dot{x}(t) \in L_2[a,b].$$

У роботі [3] розглядається схожа проблема, коли система (1) є не розв'язною, тоді шляхом збуреня лінійної частини даної системи та використовуючи метод Вішика–Люстерника, теорію псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць, знайдено достатні умови існування розв'язку лінійної слабкозбуреної системи інтегро-диференціальних рівнянь та побудовано загальний вигляд розв'язку такої системи у вигляді частини сингулярного ряду з полюсом в точці $\varepsilon = 0$.

Нижче буде представлено ще один метод, який дозволяє не розв'язну систему (1) звести до розв'язної. Для цього введемо у систему (1) керування $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds =$$

$$= f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)dsu \quad (2)$$

Знайдемо керування при якому здача (2) буде розв'язною.

Використовуючи критерій розв'язності лінійної неоднорідної системи інтегро-диференціальних рівнянь (Теорема 1, [1]) дослідимо систему (2), розв'язність якої залежить від побудованої $m\times(m+n)$-вимірної матриці

$$D = \Big[I_m - \int\limits_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]ds,$$

$$- \int\limits_a^b A(s)ds\Big].$$

Сформулюємо критерій розв'язності для системи (1).

Теорема [1]. Нехай $rankD = n_1$. Система інтегро-диференціальних рівнянь (1) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли неоднорідність $f(t) \in L_2[a,b]$ задовольняє умову:

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \ d = m - n_1. \tag{3}$$

При виконанні цієї умови система (1) має r-параметричну сім'ю розв'язків:

$$x(t) = X_r(t)c_r + F(t), \ c_r \in R^r, \tag{4}$$
$$r = m + n - n_1 > 0,$$

$$F(t) = \int\limits_a^t f(s)ds + \Psi_0(t)D^+\tilde{b},$$

$$\Psi(t) = \int\limits_a^t \Phi(s)ds, \ \Psi_0(t) = \Big[\Psi(t), I_n\Big]$$

$$\tilde{b} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s f(\tau)d\tau + B(s)f(s)\Big]ds.$$

Тут I_n—одинична матриця порядку n, D^+ —псевдообернена за Муром-Пенроузом до D матриця; $X_r(t) = \Psi_0(t)P_{D_r}$, $X_r(t)$ — $n \times r$-вимірна матриця; P_D, P_{D^*} — $(m+n) \times (m+n)$-, $m \times m$-вимірні матриці, ортопроектори, які діють з $\mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbb{R}^m$ у ядро та коядро матриці D, відповідно. Матриця $P_{D_r}(P_{D^*_d})$ складається із повної системи r (d) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$.

Припускаємо, що система (1) не розв'язна, отже умова (3) не виконується, тоді застосувавши теорему до системи (2) та врахувавши, що неоднорідність має вигляд $f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)ds\, u$, $u \in \mathbb{R}^n$, отримаємо:

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s \Big(f(\tau) + \int\limits_a^b K(\tau,s)ds\, u\Big)d\tau +$$
$$+ B(s)\Big(f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau u\Big)\Big]ds = 0. \tag{5}$$

Враховуючи, що керування u є постійною величиною, маємо

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s \Big(f(\tau) + \int\limits_a^b K(\tau,s)ds\, u\Big)d\tau +$$
$$+ B(s)\Big(f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\, u\Big)\Big]ds =$$
$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} + P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau +$$
$$+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu = 0. \tag{6}$$

Останнє рівняння запишемо у вигляді:

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau +$$
$$+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu = -P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}. \tag{7}$$

Керування u вибираємо із критерія (7) розв'язності неоднорідної системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром (2) так, щоб вона стала розв'язною при $\forall f(t) \in L_2[a,b]$.

Введемо наступні позначення:

$$S := P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau +$$
$$+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]ds$$

—$d_1 \times n$-вимірна матриця, S^+ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до S — $n \times d_1$-вимірна матриця, P_{S^*} — $d_1 \times d_1$-вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^{d_1}$ на $N(S^*)$, P_S — $(n \times n)$-вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^n$ на $N(S)$. Тоді із теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Не всюди розв'язну систему інтегро-диференціальних рівнянь* (1),

можна доповнити, додаючи до неї керування у вигляді $\int\limits_a^b K(t,s)ds\,u$, *до розв'язної при* $\forall f(t)\in L_2[a,b]$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$P_{S^*}P_{D^*_{d_1}}=0. \qquad (8)$$

При цьому величину керування u необхідно вибрати наступним чином:

$$u=S^+P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}+P_Sc,\;\; c\in\mathbb{R}^n.$$

Отже, при умові (8) керування u може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_Sc\in\mathbb{R}^n$. Це дозволяє використати дане керування для дослідження задач, які часто зустрічаються у теорії оптимального керування.

2. Незавжди розв'язні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівняння з виродженим ядром. Розглянемо неоднорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t)-\Phi(t)\int\limits_a^b\Big[A(s)x(s)+B(s)\dot{x}(s)\Big]ds=$$
$$=f(t),\;\; t\in[a,b], \qquad (9)$$

та крайову умову для неї

$$\ell x(\cdot)=\alpha\in\mathbb{R}^p, \qquad (10)$$

у припущенні, що крайова задача (9), (10) не є розв'язною при $\forall f(t)\in L_2[a,b]$ та $\forall\alpha\in\mathbb{R}^p$. Тут $\ell=col(\ell_1,\ell_2,...,\ell_p)$ — лінійний обмежаний p-вимірний векторний функціонал, такий що $\ell:D_2[a;b]\to\mathbb{R}^p$, $\ell_i:D_2[a;b]\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,p}$; $\alpha=col(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$.

Нагадаємо, що задачі такого типу розглядалися у роботах [4–8], але для їх розв'язання використовувалися теорія збурення та теорія диференціальних систем з імпульсним впливом, розвинена у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, А. Халаная, Д. Векслера. У даній же роботі запропоновано розглянути дану задачу з точки зору теорії оптимального керування.

Загальний метод дослідження поставленої таким чином задачі, використовує ідеї запропоновані О.А. Бойчуком [2] з використанням псевдообернених (за Муром– Пенроузом) матриць.

Аналогічно як і у попередньому випадку, за допомогою введення керування u в систему (9)

$$\dot{x}(t)-\Phi(t)\int\limits_a^b\Big[A(s)x(s)+B(s)\dot{x}(s)\Big]ds=$$
$$=f(t)+\int\limits_a^b K(t,s)dsu, \qquad (11)$$

зведемо нерозв'язну задачу (9), (10) до розв'язної типу (11), (10).

Використовуючи критерій розв'язності лінійної неоднорідної крайової задачі (Теорема 2 [1]), отримаємо умову розв'язності для задачі (11), (10):

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b_1}=0,\;\; P_{Q^*_{d_2}}\big\{\alpha-\ell F_1(\cdot)\big\}=0, \qquad (12)$$

$$d_1=m-rankD,\;\; d_2=p-rankQ.$$

Враховуючи, що

$$\tilde{b_1}=\tilde{b}+\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+$$
$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu$$

$$F_1(t)=F(t)+\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(t,s)dsdt+$$
$$+\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+$$
$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu,$$

отримаємо наступну алгебраїчну систему

для визначення u :

$$P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+$$
$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu=$$
$$=-P_{D^*_{d_1}}\tilde{b},\quad (13)$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\ell\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(t,s)dsdt+$$
$$+\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+$$
$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]dsu=$$
$$=P_{Q^*_{d_2}}\big\{\alpha-\ell F(\cdot)\big\}.\quad (14)$$

Тут маємо, що P_D, P_{D^*} — $(m+n)\times(m+n)$ і $m\times m$-вимірні матриці, ортопроектори, які діють з R^{m+n} і R^m у ядро та коядро матриці D, відповідно. Матриця $P_{D_{r_1}}(P_{D^*_{d_1}})$ складається із повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$; Матриця $Q=\ell X_{r_1}(\cdot)$ — $p\times r_1$ вимірна, Q^+ — псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці Q [2]. P_Q, P_{Q^*} — $r_1\times r_1$ і $p\times p$-вимірні матриці, ортопроектори, які діють з R_1^r і R^p у ядро та коядро матриці Q, відповідно. Матриця $P_{Q_{r_2}}(P_{Q^*_{d_2}})$ складається із повної системи r_2 (d_2) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці $P_Q(P_{Q^*})$.

Тоді, об'єднавши (13), (14), отримаємо наступну систему:

$$Su=g,\quad (15)$$

де $(d_1+d_2)\times n$ —вимірна матриця S має вигляд

$$S:=\begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Big[A(s)\times \\ \int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+ \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]ds \\ \\ P_{Q^*_{d_2}}\ell\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(t,s)dsdt+ \\ +\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\times \\ \int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)dsd\tau+ \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)d\tau\Big]ds \end{bmatrix}\quad (16)$$

$(d_1+d_2)\times 1$ —вимірний вектор g задається наступним чином:

$$g:=\begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} \\ P_{Q^*_{d_2}}\{\alpha-\ell F(\cdot)\} \end{bmatrix},\quad (17)$$

Система (15) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$P_{S^*}g=0\quad (18)$$

і має розв'язок

$$u=S^+g+P_Sc,\ \ c\in\mathbb{R}^n.$$

Тут S^+ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до S — $n\times(d_1+d_2)$-вимірна матриця, P_{S^*} — $(d_1+d_2)\times(d_1+d_2)$-вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ на $N(S^*)$, P_S — $(n\times n)$-вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^n$ на $N(S)$. Тоді із теореми 2 [1] випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. *Не всюди розв'язну крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь* (9), (10) *можна доповнити, додаючи до системи* (9) *керування у вигляді* $\int\limits_a^b K(t,s)ds\,u$, *до розв'язної при* $\forall f(t)\in L_2[a,b],\alpha\in\mathbb{R}^p$, *тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (18). *При*

цьому величину керування u необхідно вибрати наступним чином:

$$u = S^{+}g + P_{S}c, \ c \in \mathbb{R}^{n}. \tag{19}$$

Отже, при умові (18), керування u може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_{S}c \in \mathbb{R}^{n}$. Це дозволить використати це керування для дослідження задач, які часто зустрічаються у теорії оптимального керування.

Автор висловлює подяку професору О.А. Бойчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

Робота підтримана Грантом НАН України для молодих вчени 2015–2016 рр.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бойчук О.А., Кривошея С.А., Самойленко А.М.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, N11. – С. 1576-1579.

2. *Boichuk A.A. and Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. — Koninklijke Brill NV, Utrecht, The Netherlands, — 2004.

3. *Головацька І.А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, N2. – С. 151-164.

4. *Golovatska I.* Weakly perturbed boundaty-value problems of integro–differential equations// Tatra Mountains Mathematical Publications. – 2013. – **54**. – P. 61-71.

5. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, N4. – С. 460-474.

6. *Бондар І.А.* Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь// Буковинський математичний журнал, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. – 2014. – **2**, N4. – С. 7-11.

7. *Bondar Ivanna* Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action// Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014). – 2015. – **63**. – P. 73-87, DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.

8. *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – **17** (In Print, 16 p.).