УДК 517.51

©2016 р. Г.А.Волошин, В.К.Маслюченко

Буковинський державний фінансово-економічний університет
Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ПОШАРОВО РІВНОМІРНУ АПРОКСИМАЦІЮ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

З'ясовано належність до секвенціального замикання $\overline{C}^s$ простору C сукупно неперервних функцій у просторі S нарізно неперервних функцій багатьох конкретних нарізно і лінійно неперервних функцій з явною побудовою апроксимаційної послідовності і показано, що існують нарізно неперервні функції з $\overline{C}^s$, які не задовольняють жодну з достатніх умов належності до $\overline{C}^s$, що були раніше отримані з допомогою методу лінійної інтерполяції.

We found that many concrete separately and linearly continuous functions with an explicit construction of approximating sequences belong to the sequential closure $\overline{C}^s$ of the space C of jointly continuous functions in the space of S and show that there are separately continuous functions on $\overline{C}^s$, which do not satisfy any of the sufficient conditions of belonging to $\overline{C}^s$, which were previously obtained by the method of the linear interpolation.

1. Вступ Функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ називається *пошарово рівномірною границею* послідовності функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, якщо для кожного $x \in X$ вертикальні x-розрізи $f_n^x = f_n(x, \cdot)$ функції f_n рівномірно на Y збігаються до x-розрізу $f^x = f(x, \cdot)$ і для кожного $y \in Y$ горизонтальні y-розрізи $(f_n)_y = f_n(\cdot, y)$ рівномірно на X збігаються до y-розрізу $f_y = f(\cdot, y)$ при $n \to \infty$. У праці [1] досліджувалось, які нарізно неперервні функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $X = Y = [0, 1]$, є пошарово рівномірними границями послідовностей сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$. Зокрема, там було введено дві умови:

(A_X) проекція $pr_X(D(f))$ множини $D(f)$ точок розриву функції f на вісь абсцис X не більш, ніж зліченна;

(B_X) звуження $f|_{A\times Y}$, де $A = pr_X(D(f))$, неперервне за сукупністю змінних.

В [1] з допомогою методу лінійної інтерполяції було доведено (теореми 8.4 і 9.4), що виконання умови (A_X) чи (B_X) для нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ гарантує її подання у вигляді пошарово рівномірної границі послідовності неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$.

Для топологічних просторів X і Y позначимо символами $S = CC(X \times Y)$ і $C = C(X \times Y)$ простори нарізно і сукупно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ відповідно, а через $\overline{C}^s$ – простір, що складається з пошарово рівномірних границь послідовностей функцій $f_n \in C$. Нехай (A_Y) і (B_Y) – умови на функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, які отримуються з умов (A_X) і (B_X) заміною X на Y, множини A на множину $B = pr_X(D(f))$ і звуження $f|_{A\times Y}$ на звуження $f|_{X\times B}$. Розглянемо диз'юнкції $(A) = (A_X) \vee (A_Y)$ і $(B) = (B_X) \vee (B_Y)$ відповідних умов. Фактично в [1] було встановлено, що коли $X = Y = [0, 1]$ і нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ задовольняє умову (A) чи (B), то $f \in \overline{C}^s$. Там же було поставлене питання про справедливість рівності $\overline{C}^s = S$, яке довгий час залишалося відкритим.

Згадані тут результати були узагальнені у працях [2], [3] з допомогою векторнозначних функцій, коли в ролі другого співмножника виступає довільний компактний простір Y, і в [4] на той випадок, коли першим співмножником є метризовний компакт X.

Зауважимо, що в серії праць [5 - 19] вивчалася задача про побудову нарізно неперервної функції з даною множиною точок розриву. Відносно кожної з функцій, побудованих у цих працях, виникає питання про її належність до $\overline{C}^s$. Це можна робити, з'ясовуючи чи задовольняють побудовані функції умови (A) і (B), або якимось іншим чином. Крім того, цікаво було б побудувати нарізно неперервну функцію $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не задовольняє умови (A) і (B) і належить до $\overline{C}^s$. Цю програму ми починаємо реалізовувати у цій статті, з'ясовуючи, що побудовані в [5] функції вигляду $f(x,y) = g(\varphi(x), \psi(y))$, у яких $D(f) = A \times B$, належать до $\overline{C}^s$, і що лінійно неперервні функції Юнґів з [6] теж належать до $\overline{C}^s$. Крім того, ми наводимо приклад нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не задовольняє ні умову (A), ні умову (B) і належить до $\overline{C}^s$.

2. Нарізно неперервні функції з прямокутною множиною точок розриву. Почнемо з уточнення одного результату з [5], у якому йдеться про побудову такої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to Z$, що її множина точок розриву $D(f) = A \times B$.

Кажуть, що послідовність функцій $g_n : T \to \mathbb{R}$ *стабільно збігається* до функції до функції $g : T \to \mathbb{R}$ (позначається: $g_n \xrightarrow{d} g$ на T), якщо існує такий номер N, що $g_n = g$ при $n \geq N$. Послідовність функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ *пошарово стабільно збігається* до функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, якщо $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ на Y для кожного $x \in X$ і $(f_n)_y \xrightarrow{d} f_y$ для кожного $y \in Y$. Ясно, що з стабільної збіжності випливає рівномірна, а з пошарово стабільної – пошарово рівномірна. Символом $\overline{C}^d$ позначимо сукупність усіх пошарово стабільних границь послідовностей функцій $f_n \in C$. Ясно, що $\overline{C}^s \supseteq \overline{C}^d$.

Нам буде потрібний один результат [1, теорема 5.2, с.141]: кожна нарізно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ зі скінченним числом точок розриву є пошарово стабільною границею послідовності неперервних функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. Нехай A і B – функціонально замкнені ніде не щільні множини, що лежать відповідно у просторах X і Y, причому Y – локально зв'язний простір, $\varphi : X \to [0,1]$ і $\psi : Y \to [0,1]$ – неперервні функції, для яких $A = \varphi^{-1}(0)$ і $B = \psi^{-1}(0)$, і $g : [0,1]^2 \to [0,1]$ – нарізно неперервна функція, у якої $D(g) = \{(0,0)\} \subseteq g^{-1}(0)$ і $g(t,t) \geq \alpha > 0$ для всіх $t \in (0,1]$. Тоді формулою

$$f(x,y) = g(\varphi(x), \psi(y))$$

визначається нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to [0,1]$, яка є пошарово стабільною границею послідовності неперервних функцій $f_n : X \times Y \to [0,1]$, причому $D(f) = A \times B \subseteq f^{-1}(0)$.

Доведення. Нарізна неперервність функції f негайно випливає з нарізної неперервності функції g і неперервності функцій φ і ψ. При цьому $A \times B \subseteq f^{-1}(0)$ і $imf \subseteq img \subseteq [0,1]$. Для кожного n існує така неперервна функція $g_n : [0,1]^2 \to [0,1]$, для якої $g_n(t,s) = g(t,s)$ при $(t,s) \in [0,1]^2 \backslash (0, \frac{1}{n})^2 = E_n$, адже множина E_n замкнена в квадраті $Q = [0,1]^2$ і звуження $g|_{E_n} : E_n \to [0,1]$ неперервне, отже, можна застосовувати теорему Тітце-Урисона [20, с.116]. Функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = g_n(\varphi(x), \psi(y))$, будуть неперервними за сукупністю змінних і для них $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ на Y і $(f_n)_y \xrightarrow{d} f_y$ на X при $n \to \infty$.

Покажемо, що $D(f) = A \times B$. Включення $D(f) \subseteq A \times B$ випливає з теореми про неперервність композиції. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$, U – довільний окіл точки x_0 в X і V – зв'язний окіл точки y_0 в Y. Оскільки B – ніде не щільна, то існує $y_1 \in V \backslash B$. Тоді $s_1 = \psi(y_1) > 0$ і множина $U_1 = U \cap \varphi^{-1}([0, s_1])$ є околом точки x_0 в X. Але і множина A ніде не щільна в X, тому існує $\widetilde{x} \in U_1 \backslash A$. Для точки $\widetilde{t} = \varphi(\widetilde{x})$ маємо $\psi(y_0) = 0 < \widetilde{t} < \psi(y_1)$ і при цьому точки y_0 і y_1 належать до зв'язної множини V. Тому існує така точка $\widetilde{y} \in V$, що $\psi(\widetilde{y}) = \widetilde{t}$. Отже, точка $\widetilde{p} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U \times V$ і $|f(\widetilde{p}) - f(p_0)| = f(\widetilde{p}) = g(\widetilde{t}, \widetilde{t}) \geq \alpha > 0$. Звідси випливає, що $p_0 \in D(f)$.

Зауважимо, що побудована в теоремі 1 нарізно неперервна функція f задовольняє умови (B_X) і (B_Y). Справді, оскільки $D(f) = A \times B$, то $pr_X(D(f)) = A$. За побудовою $\varphi(x) = 0$ для кожного $x \in A$. Тому якщо $(x,y) \in A \times Y$, то $f(x,y) = g(\varphi(x), \psi(y)) = g(0, \psi(y))$, отже, звуження $f|_{A \times Y}$ – це неперервна функція $h(x,y) = g(0, \psi(y))$, адже функція g неперервна відносно другої змінної і ψ – неперервна. Таким чином, f задовольняє умову (B_X). Так само f задовольняє і умову (B_Y). Тому належність $f \in \overline{C}^s$ випливає і з теореми 9.4 з [1].

Теорема 2. Нехай A і B – це F_σ-множини першої категорії у досконало нормальних просторах X і Y відповідно. Тоді $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, де A_n і B_n – замкнені ніде не щільні множини в просторах X і Y відповідно, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ для кожного n, причому існують такі неперервні функції $\varphi_n : X \to [0,1]$ і $\psi_n : Y \to [0,1]$, що $A_n = \varphi_n^{-1}(0)$ і $B_n = \psi_n^{-1}(0)$. Нехай далі $g_n : [0,1]^2 \to [0,1]$ – нарізно неперервні функції, для яких $D(g_n) = \{(0,0)\} \subseteq g_n^{-1}(0)$ і $g_n(t,t) \geq \alpha_n > 0$ на $[0,1]$, і $f_n(x,y) = g_n(\varphi_n(x), \psi_n(y))$ на $X \times Y$. Тоді функція

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x,y)$$

визначена і нарізно неперервна на $X \times Y$, $f \in \overline{C}^s$ і $D(f) = A \times B$.

Доведення. За теоремою 1 для кожного n функції $f_n : X \times Y \to [0,1]$ нарізно неперервні, $f_n \in \overline{C}^s$ і $D(f) = A_n \times B_n \subseteq f_n^{-1}(0)$. Оскільки $0 \leq \frac{1}{2^n} f_n(x,y) \leq \frac{1}{2^n}$ на $X \times Y$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x,y)$ нормально збігається, при цьому $\frac{1}{2^n} f_n \in \overline{C}^s$ для кожного n, тому за теоремою 6.3 з [1] і $f \in \overline{C}^s$.

Рівність $D(f) = A \times B$ випливає з леми 1 праці [21].

3. Лінійно неперервні функції. Функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається *лінійно неперервною*, якщо її звуження $f|_L$ на кожну пряму L у площині $\mathbb{R}^2$ є неперервним. В.Юнґ і Ґ.Юнґ [6] навели багато прикладів лінійно неперервних і розривних функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тут ми покажемо, що всі вони належать до $\overline{C}^s$.

Приклад 1. Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функція, що задається правилами: $g(x,y) = \frac{x^2}{y}$, якщо $y \geq x^2$, $y > 0$, $g(x,y) = \frac{y}{x^2}$, якщо $0 < y \leq x^2$ і $g(x,y) = 0$, якщо $y \leq 0$. В [6] з'ясовано, що g – це лінійно неперервна функція, у якої $D(g) = \{(0,0)\}$. Ясно, що $g \in \overline{C}^d$, бо множина $D(g)$ одноточкова.

Приклад 2. Для точки $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ покладемо

$$g_{p_0}(x,y) = g(x - x_0, y - y_0),$$

де g – функція з прикладу 1. Ясно, що g – це лінійно неперервна функція, у якої $D(g_0) = \{p_0\}$, причому $g_{p_0} \in \overline{C}^d$.

Нехай $E = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, де p_n – різні точки площини $\mathbb{R}^2$ і

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_{p_n}(x,y)$$

при $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді f – це лінійно неперервна функція, у якої $D(f) = E$, причому $f \in \overline{C}^s$ на основі теореми 6.3 з [1].

Приклад 3. Нехай $k > 0$ і $P_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq k \, \text{і} \, y \in \mathbb{R}\}$ – смуга, що обмежена прямими $x = k$ і $x = -k$. Розглянемо функцію $h_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що задається правилами:

$$h_k(x,y) = g_{(k,0)}(x,y)$$

і

$$h_k(x,y) = h_k(-x,y) = h_k(x,-y) = h_k(-x,-y)$$

при $0 \leq x \leq k$ і $y \geq 0$, $h_k(x,y) = 0$ при $|x| \geq k$.

Легко зрозуміти, що h_k – це лінійно неперервна функція, причому $D(h_k) = \{(k,0), (-k,0)\}$ і $h_k \in \overline{C}^d$.

Приклад 4. Нехай F – непорожня досконала ніде не щільна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ (див. [22, с.135]). Тоді $G = \mathbb{R} \backslash F = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ – це відкрита множина, а $I_n = (a_n, b_n)$ – її складові інтервали, тобто інтервали суміжності множини F. Для кожного інтервалу I_n введемо числа $k_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ і $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ і розглянемо функції $u_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u_n(x,y) = h_{k_n}(x - c_n, y).$$

Тоді $f(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ – це лінійно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, у якої $D(f) = F \times \{0\}$. За побудовою $f(x,y) = 0$

при $(x,y)\in F\times\mathbb{R}$. Тому $f|_{F\times\mathbb{R}}$ – це нульова функція, яка, зрозуміло, неперервна. При цьому $F=pr_X(D(f))$. В такому разі належність $f\in\overline{C}^s$ можна вивести з умови (B_X).

Приклад 5. Основний приклад Юнґів з [6] ми викладемо у дещо загальнішій редакції. Розглянемо довільну зліченну всюди щільну на інтервалі $(0,1)$ множину $B=\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$, де $b_n\neq b_m$ при $n\neq m$. Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність непорожніх досконалих ніде не щільних множин A_n, що лежать на відрізку $[0,1]$. Покладемо

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\times\{b_n\}.$$

Використовуючи конструкцію прикладу 4 легко побудувати лінійно неперервну функцію $u_n:[0,1]^2\to[0,1]$ у якої $D(u_n)=A_n\times\{b_n\}$, причому $u_n\in\overline{C}^s$. Тоді функція

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}u_n(x,y)$$

теж буде теж буде лінійно неперервною на квадраті $Q=[0,1]^2$, для неї $D(f)=E$ і $f\in\overline{C}^s$ за теоремою 6.3 з [1]. При цьому множини A_n можна підібрати так, що множина E ,буде всюди щільною в квадраті Q і кожна точка цього квадрата буде точкою повного накопичення [22, с.240] множини E.

4. Приклад нарізно неперервної функції, яка не задовольняє жодну з умов (A) і (B). Почнемо з допоміжних конструкцій, які будуть використовуватися у загальній побудові.

Розглянемо довільний невироджений квадрат $K=[a,b]^2$ на площині. Нехай A – континуальна замкнена ніде не щільна множина на відрізку $[a,b]$, для якої $\{a,b\}\subseteq A$. Для певності це може бути канторова множина на відрізку $[a,b]$. Введемо функцію $\varphi(x)=\frac{d(x,A)}{b-a}$ на відрізку $X=[a,b]$, де $d(x,A)$ – відстань від точки x до множини A. Ясно, що $0\le\varphi(x)\le 1$ на X. Функція $\varphi:X\to[0,1]$ неперервна і $A=\varphi^{-1}(0)$, адже множина A замкнена. Символом g_K ми позначимо функцію $g_K:K\to[0,1]$, яка визначається формулою

$$g_K(x,y)=sp(\varphi(x),\varphi(y)),$$

де sp – відома функція Шварца, для якої $g(u,v)=\frac{2uv}{u^2+v^2}$, якщо $(u,v)\neq(0,0)$, і $sp(0,0)=0$. За теоремою 1 функція g_K нарізно неперервна і $D(g_K)=A^2$. При цьому $g_K(x,b)=g_K(x,a)=0$ при $a\le x\le b$ і $g_K(a,y)=g_K(b,y)=0$ при $a\le y\le b$ тобто $g_k(x,y)=0$ на межі frK квадрата K. Зауважимо також, що g_K є пошарово рівномірною границею послідовності сукупно неперервних функцій $g_n:K\to\mathbb{R}$. Зрозуміло також, що проекції $pr_X(D(g_K))=pr_Y(D(g_K))=A$, де $X=Y=[a,b]$, отже, ці проекції континуальні.

Нехай $c=\frac{a+b}{2}$ – середина відрізка $[a,b]$. Розглянемо поки що довільні функції $\alpha:[c,b]\to\mathbb{R}$ і $\beta:(c,b]\to\mathbb{R}$ і для них визначимо функцію $h(x,y)$ поки що на трикутнику $\Delta=\{(x,y)\in K : y\le x\}$, покладаючи $h(x,y)=0$, якщо $a\le x\le c, a\le y\le x$, $h(x,y)=\frac{\alpha(x)(y-a)}{c-a}$, якщо $c<x\le b, a\le y\le c$, $h(x,y)=\alpha(x)+\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x-c}(y-c)$, якщо $c<x\le b, c\le y\le x$.

Якщо ж $(x,y)\in K$ і $y\ge x$, то ми вважаємо, що $h(x,y)=h(y,x)$, адже тоді $(y,x)\in\Delta$ і число $h(y,x)$ визначене. Ясно, що вказаною формулою функція h визначена коректно, причому $h(x,c)=\alpha(x)$ при $c<x\le b$, $h(x,c)=0$ при $a\le x\le c$, $h(c,y)=h(y,c)$ при $a\le y\le b$ і $h(x,x)=\beta(x)$ при $c<x\le b$.

Введемо тепер середину $d=\frac{c+b}{2}$ відрізка $[c,b]$ і розглянемо конкретні функції α і β, що визначаються формулами

$$\alpha(x)=\begin{cases}\frac{x-c}{d-c}, & c\le x\le d,\\ \frac{b-x}{b-d}, & d\le x\le b.\end{cases}$$

і

$$\beta(x)=\begin{cases}1, & c<x\le d,\\ \frac{b-x}{b-d}, & d\le x\le b.\end{cases}$$

Для них $\alpha(c)=\alpha(b)=0$, $\alpha(d)=1$ і $\beta(b)=0$. Оскільки функції α і β неперервні, то побудована для них функція h буде неперервною при $(x,y)\neq(c,c)$ за сукупністю змінних. Далі

$$h(x,c)=\begin{cases}0, & a\le x\le c,\\ \alpha(x), & c\le x\le b.\end{cases}$$

і

$$h(c, y) = h(y, c),$$

тому функції h_c і h^c неперервні, отже, h – це нарізно неперервна функція. Зауважимо, що в центрі (c, c) квадрата K функція h розривна, адже

$$\lim_{x \to c+0} h(x, x) = \lim_{x \to c+0} \beta(x) =$$

$$= \lim_{x \to c+0, c<x<d} \beta(x) = \lim_{x \to c+0, c<x<d} 1 = 1,$$

а

$$\lim_{x \to c+0} h(x, c) = \lim_{x \to c+0} \alpha(x) = \alpha(c) = 0.$$

Таким чином, $D(h) = \{(c, c)\}$. Крім того, ясно, що $0 \le h(x, y) \le 1$ на K і

$$h(x, a) = h(x, b) = h(a, y) = h(b, y) = 0,$$

при $a \le x \le b$ і $a \le y \le b$. Побудовану тут нарізно неперервну функцію $h : K \to [0, 1]$ ми будемо позначати символом h_K. Для неї $D(h_K) = \{(c, c)\}$, $h_K(c, c) = 0$, $h_K(c, d) = h_K(d, c) = 1$ і $h_K(x, y) = 0$ на межі квадрата K.

Приступимо тепер до побудови основного прикладу. Розглянемо послідовність квадратів $K_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]^2$ при $n = 1, 2, \ldots$, що мають діагоналі, які лежать на діагоналі квадрата $Q = [0, 1]^2$, містяться в ньому і стягуються до точки $(0, 0)$ при $n \to \infty$. Введемо функції $u_n : Q \to [0, 1]$ покладаючи

$$u_1(p) = \begin{cases} g_{K_1}(p), & p \in K_1, \\ 0, & p \in Q \setminus K_1. \end{cases}$$

і

$$u_n(p) = \begin{cases} h_{K_n}(p), & p \in K_n, \\ 0, & p \in Q \setminus K_n. \end{cases}$$

при $n = 2, 3 \ldots$. Зрозуміло, що функції u_n нарізно неперервні, при цьому $D(u_n) = \{(c_n, c_n)\}$ для $n = 2, 3 \ldots$, де $c_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ – середина відрізка $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

Теорема 3. Функція $f : Q \to \mathbb{R}$, що визначена на квадраті $Q = [0, 1]^2$ формулою

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(p)$$

є нарізно неперервною, належить до $\overline{C}^s$ і не задовольняє жодну з умов (A) і (B).

Доведення. Оскільки носій $suppu_n$ функції u_n лежить у відкритому квадраті $G_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})^2$, причому ці квадрати попарно не перетинаються, то функція f визначена на Q, причому $f(p) = u_n(p)$, якщо $p \in G_n$, і $f(p) = 0$, якщо $p \in Q \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Для фіксованого $x \in [0, 1]$ існує такий номер n, що $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Для цього номера n $f_n^x(y) = u_n^x(y)$ для кожного $y \in [0, 1]$, тобто $f_n^x = u_n^x$, отже, неперервність функції $f_n^x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ випливає з неперервності функцій u_n^x. Крім того, за побудовою $f(x, y) = f(y, x)$ на Q, отже, і функції f_y неперервні для кожного $y \in [0, 1]$. Таким чином, функція f нарізно неперервна.

Зрозуміло, що

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(u_n) \bigcup \{(0, 0)\} =$$

$$= \{p_n : \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup A_1^2 \cup \{(0, 0)\},$$

де $p_n = (c_n, c_n)$ – центр квадрата K_n і A_1 – континуально замкнена ніде не щільна множина на відрізку $[\frac{1}{2}, 1]$, що використана для побудови функції g_{K_1}. В такому разі

$$pr_X(D(f)) = pr_Y(D(f)) =$$

$$= \{c_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup A_1 \cup \{0\} = A.$$

Належність $(0, 0) \in D(f)$ випливає з того, що $f(0, 0) = 0$ і $f(q_n) = 1$, де $q_n = (d_n, d_n)$, $d_n = \frac{c_n + b_n}{2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, причому $q_n \to (0, 0)$, а $f(q_n) \nrightarrow f(0, 0)$.

Залишилося з'ясувати, що f не задовольняє жодну з умов (A_X), (A_Y), (B_X) і (B_Y).

Перевіримо, що f не задовольняє умову (B_X). Зауважимо, що для кожного номера $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ виконується рівність

$$f(c_n, d_n) = u_n(c_n, d_n) = 1,$$

при цьому $c_n \in A$ і $r_n = (c_n, d_n) \to (0, 0)$ при $n \to \infty$. Тоді $r_n \in A \times Y$ для кожного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і $f(r_n) = 1 \nrightarrow 0 = f(0, 0)$. Це показує, що звуження $f|_{A \times Y}$ розривне в точці $(0, 0) \in A \times Y$.

Умова (A_X) теж не виконується, бо $pr_X(D(f)) = A \supseteq A_1$, а множина A_1 континуальна, а отже, і множина A теж континуальна, а значить, не зліченна і не скінченна.

Умови (A_Y) і (B_Y) теж не виконується, бо $f(x,y) = f(y,x)$ на Q.

Нарешті, належність $f \in \overline{C}^s$ випливає з того, що звуження $f|_{[0,\frac{1}{2}]\times Y}$ задовольняє умову (A), а звуження $f|_{[\frac{1}{2},1]\times Y}$ задовольняє умову (B).

Прикінцеве зауваження. Коли ми починали писати цю статтю, задача про рівність $\overline{C}^s = S$ ще не була розв'язана, але 2.XII.2015 на семінарі кафедри математичного аналізу В.В.Михайлюк виступив з доповіддю, в якій була доведена рівність $\overline{C}^s = S$ для $X = Y = [0,1]$ і навіть в загальнішому випадку. При цьому він використав для доведення трансфінітні побудови, розбиття одиниці, як у методі Рудіна [23], і властивість асоційованого з нарізно неперервною функцією $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ відображення $\varphi : [0,1]^2 \to C_u[0,1]$, яку він назвав насиченою неперервністю: звуження $\varphi|_F$ на кожну замкнену множину $F \subseteq [0,1]$ має точку неперервності. Таким чином, була розв'язана проблема, яка три роки назад була поставлена у доповіді другого співавтора на Банахівській конференції, чим зроблено істотний крок у розвитку даної тематики.

У зв'язку з цим виникає природне бажання про пошук конструктивної побудови для даної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ такої послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що пошарово рівномірно збігається до f, зокрема, актуально дослідити чи застосовні тут побудови, пов'язані з лінійною інтерполяцією, многочленами Берштейна, Фейєра, Джексона. Цим дослідженням будуть присвячені наступні роботи авторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. віcн. НТШ. – 2013. – **10**. – С. 135-158.

2. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій та її застосування// Мат. студії. – 2014. – **42**, №2. – С.129 - 133.

3. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про лінійну інтерполяцю векторнозначних функцій, яка зберігає звуження // Прикарпат. вісн. НТШ. "Число". – 2015. – 1(29). – С.11-20.

4. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій// Укр.мат.журн – 2016р. – 68(2) – С.158-161.

5. *Маслюченко В.К.* Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень// Чернів. ун-т. – Чернівці, 1994. – 17с. – Деп. в ДНТБ України 10.I.94, N70-Ук94.

6. *Young W.H., Young G.G.* Discontinuous functions continuous with respect to every straight line// Quart. J. Pure Appl. Math. - 1909. – **41**. – P.87-93.

7. *Kershner R.* The continuity of functions of many vatiables// Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, N1. – P.83-100.

8. *Feiock R.E.* Cluster sets and joint continuity// J. London Math. Soc. – 1973. – **7**. – P.397-409.

9. *Grande Z.* Une caractérisation des ensembles des point de discontinuité des fonctions linéairement-continues// Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **52**. – P.257-262.

10. *Мирзоян М.М.* О предельных множествах отображений топологических пространств// ДАН СССР. – 1978. – **248**, N1. – С.37-40.

11. *Цейтлин М.Я.* О множествах точек розрыва раздельно непрерывных функций//Мера и интеграл. – Куйбышев, 1988. – С.147-151.

12. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces// Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, N2. – P.191-203.

13. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Нарізно неперервні функції з сепарабельною множиною точок розриву// Чернів. ун-т. – Чернівці, 1990. – 11с. – Деп. в УкрНДІНТІ, N902-Ук90.

14. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Про нарізно неперервні функції на добутках метризовних просторів// Доповіді АН України. – 1993. – N4. – С.28-31.

15. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів// Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, N6. – С.740-747.

16. *Михайлюк В.В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень: дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1995. – 82 с.

17. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете / Дис.... докт. фіз. - мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.

18. *Маслюченко О.В.* Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: дис. ... канд. фіз.-

мат. наук. – Чернівці, 2002. – 149 с.

19. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів: дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2012. – 300с.

20. *Енгелькінг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

21. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень// Укр. мат .журн. – 1992. – **44**, №9. – С. 1209-1220.

22. *Александров П.С* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.:Наука, 1992. – 368с.

23. *Rudin W.* Lebesque first theorem// Math. Analysis and Aplications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press, 1981. – P. 741-747.