УДК 517.929.2

©2016 р. І. В. Гончар

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У роботі досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння зі стрибками операторного коефіцієнта у скінченновимірному банаховому просторі.

We study the problem of the existence of a unique bounded solution of a difference equation with the jumps of an operator coefficient in a finite dimensional Banach space.

Вступ. Нехай X - скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B, C - лінійні оператори в X, для яких існують обернені оператори A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}; I - одиничний оператор в X.

Нехай $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ - простір обмежених в X послідовностей $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\|\bar{x}_n\| < \infty$. Відзначимо, що $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ - комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_\infty$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де

$$A = \begin{cases} A, \text{якщо } n \geq 1, \\ B, \text{якщо } -m+1 \leq n \leq 0, \\ C, \text{якщо } n \leq -m, \end{cases}$$

$\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - шукана обмежені послідовності елементів простору X, m - фіксоване натуральне число.

Мета цієї статті - отримати необхідні і достатні умови на оператори A, B, C, при виконанні яких виконується наступна умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Аналогічне питання досліджувалося, зокрема, в $[1-3]$ для різницевого рівняння зі сталими і в $[2, 4, 5, 6, 7]$ зі змінними операторними коефіцієнтами. У $[7, c.250]$ доведено, що для різницевого рівняння

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n,\ n \in \mathbb{Z},$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку еквівалентна умові дискретної дихотомії для послідовності операторів $\{T_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Останню умову важко перевіряти. Інший підхід до дослідження питання про існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння $x_{n+1} = T_n x_n + y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, запропоновано в $[2, c.25]$. Цей підхід розвивається і використовується в даній роботі. Відзначимо, що аналогічно досліджуються різницеві рівняння виду (1) з довільною скінченною кількістю стрибків операторного коефіцієнта.

Допоміжні твердження. Покладемо

$$Q_-^0 = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|A^k z\| < \infty\};$$

$$Q_-^n = Q_-^0,\ n \geq 1;$$

$$Q_+^0 = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|C^{-k}B^{-m}z\| < \infty\};$$

$$Q_+^n = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|C^{-k}B^{-m}A^{-n}z\| < \infty\},\quad n \geq 1;$$

$$Q_-^{-p} = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|A^k B^p z\| < \infty\},\quad 1 \leq p \leq m;$$

$$Q_+^{-p} = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|C^{-k}B^{-m+p}z\| < \infty\},$$
$$1 \leq p \leq m;$$

$$Q_-^{-m-q} = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|A^kB^mC^qz\| < \infty\},$$
$$q \geq 1;$$

$$Q_+^{-m-q} = \{z \in X \mid \sup_{k\geq 1}\|C^{-k}z\| < \infty\} = Q_+^{-m},$$
$$q \geq 1.$$

У подальшому використовуються наступні леми.

Лема 1. *Якщо виконується умова 1, то $Q_-^n \cap Q_+^n = \{\bar{0}\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Розглянемо однорідне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Припустимо, від супротивного, що існує такий елемент $u \neq \bar{0}$, що $u \in Q_-^0 \cap Q_+^0$. Покладемо

$$x_1 = u;\ x_{n+1} = A^nu,\ n \geq 1;$$
$$x_p = B^{-p-1}u,\ 0 \leq p \leq m-1;$$
$$x_{-m-q} = C^{-q-1}B^{-m}u,\ q \geq 0.$$

Тоді $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - ненульовий обмежений розв'язок різницевого рівняння (2), що суперечить умові 1.

Для інших $n \in \mathbb{Z}$ рівність $Q_-^n \cap Q_+^n = \{\bar{0}\}$ перевіряється аналогічно.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо $Q_-^0 \cap Q_+^0 = \{\bar{0}\}$, то $Q_-^n \cap Q_+^n = \{\bar{0}\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Зафіксуємо $n \geq 1$. Якщо, від супротивного, існує $v \neq \bar{0}$ таке, що $v \in Q_-^n \cap Q_+^n$, то $A^{-n}v \neq \bar{0}, A^{-n}v \in Q_-^0 \cap Q_+^0$, що суперечить припущенню леми. Отже, $Q_-^n \cap Q_+^n = \{\bar{0}\}$ для $n \geq 1$.

Для інших $n \in \mathbb{Z}$ перевірка аналогічна.

Лему 2 доведено.

Надалі для позначення прямої суми будемо використовувати знак $\dot{+}$.

Лема 3. *Якщо виконується умова 1, то $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$.*

Доведення. Внаслідок леми 1 $Q_-^0 \cap Q_+^0 = \{\bar{0}\}$. Зафіксуємо $u \in X$ і доведемо, що знайдуться такі $\alpha \in Q_-^0$, $\beta \in Q_+^0$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = Au_n,\ n \geq 1, \\ u_1 = Bu_0 + u, \\ u_{n+1} = Bu_n,\ -m+1 \leq n \leq -1, \\ u_{n+1} = Cu_n,\ n \leq -m. \end{cases} \tag{3}$$

З умови 1 випливає, що воно має єдиний розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Тоді $u_1 \in Q_-^0$, тому що внаслідок (3) $u_{n+1} = A^nu_n, n \geq 1$. Також $u_0 = Bu_{-1}$, звідки $u_{-1} = B^{-1}u_0, u_{-2} = B^{-2}u_0, ..., u_{-m+1} = B^{-m+1}u_0$, $u_{-m} = C^{-1}B^{-m+1}u_0, u_{-m-1} = C^{-2}B^{-m+1}u_0, ...$ - обмежена послідовність. Тому $Bu_0 \in Q_+^0$, а отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1, \beta = -Bu_0$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Якщо $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$, то $X = Q_-^n \dot{+} Q_+^n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Внаслідок леми 2 $Q_-^n \cap Q_+^n = \{\bar{0}\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Зафіксуємо $n \geq 1$ і $z \in X$. З того, що $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$ випливає, що для $A^{-n}z$ існують такі $\alpha \in Q_-^0, \beta \in Q_+^0$, що $A^{-n}z = \alpha + \beta$. Тоді

$$z = A^n\alpha + A^n\beta, \tag{4}$$

причому з означення Q_-^n, Q_+^n отримаємо, що $A^n\alpha \in Q_-^n = Q_-^0$, а також $\sup_{k\geq 1}\|C^{-k}B^{-m}A^{-n}(A^n\beta)\| = \sup_{k\geq 1}\|C^{-k}B^{-m}\beta\| < \infty$, оскільки $\beta \in Q_+^0$. Отже, $A^n\beta \in Q_+^n$. Тому (4) - шуканий розклад при $n \geq 1$.

Аналогічно, розклавши відносно Q_-^0, Q_+^0 елемент B^pz при $1 \leq p \leq m$ та елемент B^mC^qz при $q \geq 1$ дістанемо, що $X = Q_-^{-p} \dot{+} Q_+^{-p}, 1 \leq p \leq m$ та $X = Q_-^{-m-q} \dot{+} Q_+^{-m-q}, q \geq 1$ відповідно.

Лему (4) доведено.

Лема 5. *Якщо виконується умова 1, то спектри $\sigma(A), \sigma(C)$ операторів A, C не пе-*

ретинаються з одиничним колом $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $\lambda \in S \cap \sigma(A)$. Тоді існує такий власний вектор w оператора A, що $Aw = \lambda w$. Внаслідок умови (1) обмеженій послідовності $\bar{y}^{(1)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{0}, \bar{0}, ...\}$ відповідає єдиний обмежений розв'язок, який явно визначається і має вигляд $\bar{x}^{(1)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{1}, \lambda w, \lambda^2 w, ...\}$. Аналогічно обмеженій послідовності $\bar{y}^{(2)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{0}, \lambda w, \bar{0}, ...\}$ відповідає єдиний обмежений розв'язок $\bar{x}^{(2)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{1}, 2\lambda w, 2\lambda^2 w, 2\lambda^3 w, ...\}$ і т.д. Таким чином, для кожного $k \geq 1$ обмеженій послідовності $\bar{y}^{(k)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{0}, \lambda w, , ..., \lambda^{k-1} w, \bar{0}, ...\}$ відповідає єдиний обмежений розв'язок
$\bar{x}^{(k)} = \{..., \bar{0}, \underbrace{w}_{1}, 2\lambda w, 3\lambda^2 w, ..., k\lambda^k w, k\lambda^{k+1} w, k\lambda^{k+2} w, ...\}$ рівняння (1).

У просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ рівняння (1) записується у вигляді $T\bar{x} = \bar{y}$, де $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$, а координати $T\bar{x} = \{(T\bar{x})_n, n \in \mathbb{Z}\}$ визначаються за допомогою рівностей $(T\bar{x})_n = x_{n+1} - Ax_n, n \geq 1, (T\bar{x})_n = x_{n+1} - Bx_n, -m+1 \leq n \leq 0, (T\bar{x})_n = x_{n+1} - Cx_n, n \leq -m$.

Оператор T є лінійним обмеженим оператором, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. З умови 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що T має неперервний обернений оператор T^{-1}. Тому, зокрема, $\bar{x}^{(k)} = T^{-1}\bar{y}^{(k)}, k \geq 1$, а отже, $\forall k \geq 1 : k\|x\| = \|\bar{x}^{(k)}\|_\infty \leq \|T^{-1}\|\|\bar{y}^{(k)}\|_\infty = \|T^{-1}\|\|w\|$. Отримали суперечність. Таким чином, $S \cap \sigma(A) = \varnothing$.

Аналогічно перевіряється, що $S \cap \sigma(C) = \varnothing$.

Лему 5 доведено.

Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(C)$ - частини спектрів операторів A, C, які лежать всередині, а $\sigma_+(A), \sigma_+(C)$ - зовні кола S. Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A), \sigma_\pm(C)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 5 при виконанні умови 1 простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_+(A) \dot{+} X_-(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A), X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$. Також $X = X_+(C) \dot{+} X_-(C)$ і звуження C_-, C_+ оператора C на $X_-(C), X_+(C)$ мають такі ж властивості. Відзначимо, що при цьому ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\|, \sum_{k=1}^{\infty} \|A_-^k\|, \sum_{k=1}^{\infty} \|C_+^{-k}\|, \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| \quad (5)$$

збігаються.

Лема 6. $Q_+^{-m} = B^{-m}(Q_+^0)$.

Доведення. З означення множин Q_+^0 і Q_+^{-m} випливає, що $v \in Q_+^0$ тоді і тільки тоді, коли $B^{-m}v \in Q_+^{-m}$. Тому $Q_+^{-m} = B^{-m}(Q_+^0)$.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Якщо* $S \cap \sigma(A) = \varnothing, S \cap \sigma(C) = \varnothing$, *то* $Q_-^0 = X_-(A), Q_+^{-m} = X_+(C)$.

Доведення. Доведемо, що $Q_-^0 = X_-(A)$. Внаслідок збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_-^k\|$ послідовність $\{\|A^k z\|, k \geq 1\}$ обмежена для кожного $z \in X_-(A)$, а отже, $X_-(A) \subset Q_-^0$. Також у випадку, коли $z \in X_+(A) \cap Q_-^0$,

$$\|z\| = \|A_+^{-k} A_+^k z\| \leq \|A_+^{-k}\| \cdot \sup_{j \geq 1} \|A^j z\| \to 0, \quad j \to \infty,$$

оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\|$ збігається. Таким чином, $z = \bar{0}$ і $Q_-^0 = X_-(A)$.

Випадок $Q_+^{-m} = X_+(C)$ доводиться аналогічно.

Лему 7 доведено.

Основні результати. Нехай $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і покладемо $\|\bar{y}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$. Внаслідок леми 4 для кожного $n \in \mathbb{Z}$ елемент y_n єдиним чином зображується у вигляді $y_n = y_n^- + y_n^+$, де $y_n^- \in Q_-^n$, $y_n^+ \in Q_+^n$.

Покладемо

$$x_1 = y_0^- + \sum_{\nu=-m}^{-1} B^{|\nu|} y_\nu^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} B^m C^{|\nu|-m} y_\nu^- - \\ - \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{-\nu} y_\nu^+; \quad (6)$$

$$\forall n \geq 2 : x_n = y_{n-1}^- + A y_{n-2}^- + ... + A^{n-1} y_0^- + \\ + \sum_{\nu=-m}^{-1} A^{n-1} B^{|\nu|} y_\nu^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} A^{n-1} B^m C^{|\nu|-m} y_\nu^- - \\ - \sum_{\nu=n}^{\infty} A^{n-1-\nu} y_\nu^+; \quad (7)$$

$$\forall\, 0 \leq p \leq m-2 : x_{-p} = y_{-p-1}^- + B y_{-p-2}^- + ... + \\ + B^{m-1-p} y_{-m}^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} B^{m-1-p} C^{|\nu|-m} y_\nu^- - B^{-1} y_{-p}^+ - \\ - B^{-2} y_{-p+1}^+ - ... - B^{-p-1} y_0^+ - \sum_{\nu=1}^{\infty} B^{-p-1} A^{-\nu} y_\nu^+; \quad (8)$$

$$x_{-m+1} = y_{-m}^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} C^{|\nu|-m} y_\nu^- - B^{-1} y_{-m+1}^+ - \\ - B^{-2} y_{-m+2}^+ - ... - B^{-m} y_0^+ - \sum_{\nu=1}^{\infty} B^{-m} A^{-\nu} y_\nu^+; \quad (9)$$

$$\forall q \geq 1 : x_{-m-q+1} = y_{-m-q}^- + \\ + \sum_{\nu=-\infty}^{-m-q-1} C^{|\nu|-m-q} y_\nu^- - C^{-1} y_{-m-q+1}^+ - \\ - C^{-2} y_{-m-q+2}^+ - ... - C^{-q} y_{-m}^+ - C^{-q} B^{-1} y_{-m+1}^+ - \\ - C^{-q} B^{-2} y_{-m+2}^+ - ... - C^{-q} B^{-m} y_0^+ - \\ - \sum_{\nu=1}^{\infty} C^{-q} B^{-m} A^{-\nu} y_\nu^+; \quad (10)$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*
i)$\sigma(A) \cap S = \varnothing, \sigma(C) \cap S = \varnothing$;
ii)$X = X_-(A) \dot{+} B^m(X_+(C))$.
Тоді ряди з (6)-(10) абсолютно збігаються за нормою і задають відповідний до послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в X послідовностей.

Доведення. Перевіримо, що ряди з (6) абсолютно збігаються за нормою. Позначимо через P_-^n, P_+^n проектори в X на підпростори Q_-^n, Q_+^n, що відповідають зображенню $X = Q_-^n \dot{+} Q_+^n, n \in \mathbb{Z}$. При $n \geq 1$ з леми 4 випливає, що для фіксованого $z \in X$ існують такі $\alpha \in Q_-^0, \beta \in Q_+^0$, що $A^{-n} z = \alpha + \beta$, тобто $z = A^n \alpha + A^n \beta$, причому $A^n \alpha \in Q_-^n = Q_-^0, A^n \beta \in Q_+^n$. Тоді $\beta = P_+^0 A^{-n} z$. Отже,

$$\forall n \geq 1 : z_+^n = P_+^n z = A^n P_+^0 A^{-n} z. \quad (11)$$

Аналогічно

$$\forall\, 1 \leq p \leq m : z_+^{-p} = B^{-p} P_+^0 B^p z, \quad (12)$$

$$\forall q \geq 2 : z_+^{-m-q+1} = C^{1-q} B^{-m} P_+^0 B^m C^{q-1} z, \quad (13)$$

Внаслідок (11, 12, 13)

$$\forall n \geq 1 : P_+^n = A^n P_+^0 A^{-n},\ P_-^n = A^n P_-^0 A^{-n}. \quad (14)$$

$$\forall\, 1 \leq p \leq m : P_+^{-p} = B^{-p} P_+^0 B^p, \\ P_-^{-p} = B^{-p} P_-^0 B^p. \quad (15)$$

$$\forall q \geq 1 : P_-^{-m-q} = C^{-q} B^{-m} P_-^0 B^m C^q. \quad (16)$$

З (15), (16) випливає, що

$$\forall q \geq 1, k \geq 1 : P_-^{-m-q-k} = C^{-k} P_-^{-m-q} C^k.$$

Нехай P_-^A, P_+^A - проектори в X на $X_-(A), X_+(A)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$, а P_-^C, P_+^C - проектори в X на $X_-(C), X_+(C)$, що відповідають зображенню $X = X_-(C) \dot{+} X_+(C)$. Оскільки при фіксованому $q \geq 1$ оператор $C^q P_+^C$ діє з X в $X_+(C)$, то внаслідок леми 6 $B^m C^q P_+^C$ діє з X в Q_+^0, звідки з урахуванням (16)

$$P_-^{-m-q} = C^{-q} B^{-m} P_-^0 B^m C_-^q P_-^C \quad (17)$$

Аналогічно при $n \geq 1$

$$P_+^n = A^n P_+^0 A_+^{-n} P_+^A. \tag{18}$$

З (6), (17), (18) випливає, що

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{\nu=-m}^{-1} P_-^0 B^{|\nu|} y_\nu +$$
$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} P_-^0 B^m C_-^{|\nu|-m} P_-^C y_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu.$$

Тому, з урахуванням збіжності рядів (5), ряди з (6) абсолютно збігаються за нормою, а також

$$\|x_1\| \leq \|\bar{y}\|_\infty \Big(\|P_-^0\| + \|P_-^0\| \cdot \sum_{k=1}^{m} \|B^k\| +$$
$$+ \|P_-^0\| \cdot \|B^m\| \cdot \|P_-^C\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| +$$
$$+ \|P_+^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \Big). \tag{19}$$

Перевіримо, що при фіксованому $n \geq 2$ ряди з (7) абсолютно збігаються за нормою. З (18) випливає, що при $\nu \geq n$

$$P_+^\nu = A^{\nu-n} P_+^n A_+^{n-\nu} P_+^A. \tag{20}$$

Також $P_-^n = A^n P_-^0 A^{-n}$, тому з (15) випливає, що при $1 \leq p \leq m$

$$P_-^{-p} = B^{-p} P_-^0 B^p = B^{-p} A^{-n} P_-^n A^n B^p. \tag{21}$$

Внаслідок (17) при $q \geq 1$

$$P_-^{-m-q} = C^{-q} B^{-m} A^{-n} P_-^n A^n B^m C_-^q P_-^C. \tag{22}$$

Тому

$$x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + A_- P_-^{n-2} y_{n-2} + \ldots +$$
$$+ A_-^{n-1} P_-^0 y_0 + \sum_{\nu=-m}^{-1} A^{n-1} B^{|\nu|} P_-^\nu y_\nu +$$
$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} A^{n-1} B^m C^{|\nu|-m} P_-^\nu y_\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} A^{n-1-\nu} P_+^\nu y_\nu =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A_-^k P_-^{n-1-k} y_{n-1-k} + \sum_{\nu=-m}^{-1} A_-^{n-1} P_-^0 B^{|\nu|} y_\nu +$$
$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{-m-1} A_-^{n-1} P_-^0 B^m C_-^{|\nu|-m} P_-^C y_\nu -$$
$$- \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_\nu.$$

Внаслідок збіжності рядів (5) ряди з (7) абсолютно збігаються за нормою і для кожного $n \geq 2$

$$\|x_n\| \leq \|\bar{y}\|_\infty \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \|A_-^k\| \cdot \|P_-^{n-1-k}\| +$$
$$+ \|A_-^{n-1}\| \cdot \|P_-^0\| \cdot \sum_{k=1}^{m} \|B^k\| +$$
$$+ \|A_-^{n-1}\| \cdot \|P_-^0\| \cdot \|B^m\| \cdot \|P_-^C\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| +$$
$$+ \|P_+^{n-1}\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \Big). \tag{23}$$

За допомогою аналогічних міркувань можна перевірити, що для кожного $0 \leq p \leq m-2$

$$\|x_{-p}\| \leq \|y\|_\infty \Big(\sum_{j=-m}^{-p-1} \|B^{-p-1-j}\| \cdot \|P_-^j\| +$$
$$+ \|B^{-p-1}\| \cdot \|B^m\| \cdot \|P_-^0\| \cdot \|P_-^C\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| +$$
$$+ \sum_{j=-p}^{0} \|B^{-p-1-j}\| \cdot \|P_+^j\| +$$
$$+ \|B^{-p-1}\| \cdot \|P_+^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \Big), \tag{24}$$

а також

$$\|x_{-m+1}\| \le \|y\|_\infty \Big(\|P_-^{-m}\| +$$

$$+ \|B^{-m}\| \cdot \|P_-^0\| \cdot \|B^m\| \cdot \|P_-^C\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| +$$

$$+ \sum_{\nu=-m}^{-1} \|B_-^\nu\| \cdot \|P_+^{-m-\nu}\| +$$

$$+ \|B^{-m}\| \cdot \|P_+^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \Big) \quad (25)$$

і при фіксованому $q \ge 1$

$$\|x_{-m-q+1}\| \le \|y\|_\infty \Big(\|P_-^{-m-q}\| +$$

$$+ \|P_-^{-m-q}\| \cdot \|P_-^C\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|C_-^k\| +$$

$$+ \sum_{k=-q}^{-1} \|C_+^{-k}\| \cdot \|P_+^{-m-q-k}\| +$$

$$+ \sum_{k=-m}^{-1} \|C_+^{-q}\| \cdot \|B^k\| \cdot \|P_+^{-m-k}\| +$$

$$+ \|C_+^{-q}\| \cdot \|B^{-m}\| \cdot \|P_+^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \Big). \quad (26)$$

Внаслідок (19), (23)-(26) для обмеженості послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ досить довести обмеженість послідовностей $\{P_+^n, n \ge 1\}$ та $\{P_-^{-m-q}, q \ge 1\}$. З (18) з урахуванням того, що $P_-^0 : X \to X_-(A)$, при $n \ge 1$ матимемо

$$P_+^n = P_+^A - A^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^A = P_+^A - A_-^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^A,$$

звідки для довільного $n \ge 1$

$$\|P_+^n\| \le \|P_+^A\| + \|P_-^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sup_{k \ge 1} \|A_-^k\| \cdot \sup_{k \ge 1} \|A_+^{-k}\|.$$

Отже, послідовність $\{P_+^n, n \ge 1\}$ обмежена.

Обмеженість послідовності $\{P_-^{-m-q}, q \ge 1\}$ перевіряється аналогічно з урахуванням того, що $P_-^{-m-q} = C^{-q} P_-^{-m} C_-^q P_-^C$ при $q \ge 1$.

Той факт, що $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ задає єдиний у класі обмежених послідовностей розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$, випливає з доведеної в $[2, c.26]$ теореми 7, якщо додатково скористатися лемою 4.

Теорему 1 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, N1. – С. 42-26.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — К.: Вища шк., 1992. — 319 с.
3. *Ким В. С.* Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, N12. – С. 2151 – 2160.
4. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журнал. – 2001. – **42**, N6. – С. 1231 – 1243.
5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций // Мат. заметки. – 1985. – **37**, N5. – С. 662 – 666.
6. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, N1. – С. 109-115.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.