УДК 517.938

©2016 р. І.М. Грод, В.Л. Кулик

Тернопільський національний педагогічний університет ім.В. Гнатюка, Тернопіль
Сілезький технічний університет, м. Глівіце, Польща

# ДЕЯКІ КЛАСИ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Отримано нові класи лінійних розширень динамічних систем на торі, для яких існує єдина функція Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тороїдальні многовиди.

We find new classes of linear extensions of dynamic systems on the torus for which there is a unique Green-Samoilenko function for the problem on invariant toroidal manifolds.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, $x \in R^n$, а вектор-функція $a(\varphi)$ визначена, неперервна і $2\pi$-періодична за кожною із змінних $\varphi_j$, $j = \overline{1,m}$, тобто задана на $m$-мірному торі $\mathcal{T}_m$ ( $\varphi \in \mathcal{T}_m$). Матриця $A(\varphi)$ – $n \times n$-вимірною, елементи її є дійсні функції, неперервні за сукупністю всіх змінних $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ і $2\pi$-періодичні по кожній змінній $\varphi_j$, $j = \overline{1,m}$. Додатково припускаємо, що задача Коші $\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi), \varphi|_{t=0} = \varphi_0$ має єдиний розв'язок $\varphi(t;\varphi_0)$ при кожному фіксованому $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. Для цього достатньо вимагати, щоб вектор-функція $f(\varphi)$ задовольняла умову Ліпшиця.

Будемо надалі використовувати наступні позначення: $C^0(\mathcal{T}_m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на $\mathcal{T}_m$, $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum_{j=1}^n y_j \bar{y}_j$ – скалярний добуток в $R^n$, норма вектора $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$. $C'(\mathcal{T}_m; a)$ – підпростір простору $C^0(\mathcal{T}_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що суперпозиція $F(\varphi(t;\varphi_0))$ як функція змінної $t$ є неперервно диференційовною, причому за означенням $\left.\frac{d}{dt}F(\varphi(t;\varphi))\right|_{t=0} \overset{df}{=} \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$. Норму $n \times n$–вимірної матриці $G$ будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max\limits_{\|y\|=1} \|Gy\|$, $\|S\|_0 = \sup\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|S(\varphi)\|$. $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi(t;\varphi_0))x \tag{2}$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(\varphi_0)|_{t=\tau} = I_n$, $I_n$ – одинична матриця.

Поряд із системою (1) випишемо неоднорідну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3}$$

де $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

**Означення 1.** *Кажуть [2], що система (3) має інваріантний тороїдальний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(\varphi), \tag{4}$$

*якщо функція $u(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ і виконується тотожність*

$$\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi), \tag{5}$$

*при всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$.*

У випадку, коли функція (4) є неперервно диференційовною, тотожність (5) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi).$$

**Означення 2.** *Нехай існує така $n \times n$-вимірна матриця $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, що для* *функції вигляду*

$$G_0(\tau,\varphi)=\left\{\begin{array}{c}\Omega_\tau^0(\varphi)\,C(\varphi(\tau;\varphi))\ \ ,\ \ \tau\le 0\\ \Omega_\tau^0(\varphi)\,[C(\varphi(\tau;\varphi))-I_n]\,,\tau>0\end{array}\right. \tag{6}$$

*виконується оцінка*

$$\|G_0(\tau,\varphi)\|\le K\exp\{-\gamma\,|\tau|\} \tag{7}$$

*з деякими додатними сталими $K,\gamma$.*

*Тоді функцію (6) називають функцією Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тороїдальні многовиди системи (1).*

Існування функції Гріна-Самойленка (6) дозволяє стверджувати, що система (3) має інваріантний тор (4) при кожній функції $f(x)\in C^0(\mathcal{T}_m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді:

$$y=u(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_0(\tau,\varphi)\cdot f(\varphi(\tau;\varphi))\,d\tau.$$

Виконання оцінки (7) для функції Гріна-Самойленка (6) еквівалентне виконанню такої оцінки

$$\|G_t(0,\varphi)\|\le K\exp\{-\gamma\,|t|\}$$

для допоміжної функції

$$G_t(0,\varphi)=\left\{\begin{array}{c}\Omega_0^t(\varphi)\,C(\varphi)\ \ ,\ \ t\ge 0\\ \Omega_0^t(\varphi)\,[C(\varphi)-I_n]\,,t<0\end{array}\right..$$

Однією із основних і важливих проблем, які виникають при дослідженні системи (1), це питання існування функції Гріна-Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ задачі про інваріантні тори. Цьому питанню присвячено цілий ряд цікавих досліджень, зокрема [2-10]. Питання існування функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори тісно пов'язане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [4]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись у деяких точках, а їх похідна в силу системи рівнянь (1) є знаковизначеною. Нагадаємо, [4] що існування невиродженої ($\det S(\varphi)\ne 0\ ,\forall\varphi\in\mathcal{T}_m$ ) квадратичної форми

$$V=\langle S(\varphi)\,x,x\rangle\,, \tag{8}$$

похідна якої в силу системи (1) є знаковизначеною

$$\dot V=\Big\langle\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_j}a_j(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+$$

$$+A^T(\varphi)S(\varphi)\Big]x,x\Big\rangle\le-\beta\,\|x\|^2\,,\beta=const>0, \tag{9}$$

забезпечує регулярність цієї системи, а це означає, що дана система має єдину функцію Гріна-Самойленка. Якщо ж $\det S(\varphi_0)=0$ при деякому значенні $\varphi=\varphi_0$, то система (1) не має функції Гріна-Самойленка. При цьому наступна система

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi)\,,\frac{dx}{dt}=-A^T(\varphi)\,x,$$

має безліч різних функцій Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори. Не дивлячись на те, що квадратичні форми (8) можуть змінювати знак і навіть вироджуватись при деяких значеннях $\varphi=\varphi_0$, їх часто називають функціями Ляпунова.

Зауважимо, що знаходження квадратичної форми (8), яка задовольняє нерівність (9), є достатньо непростим завданням. У зв'язку з цим, в даній роботі, пропонується виділити класи систем вигляду (1), для яких можна виписати такі функції.

Дослідивши систему, яка залежить від параметра

$$\frac{d\varphi}{dt}=sin(\varphi)\,,\quad\frac{dx}{dt}=(cos(2n\varphi))\,x, \tag{10}$$

вдалося з'ясувати, що вона буде регулярною при довільному натуральному $n$ ($n=1,2,3,....$), тобто має єдину функцію Гріна-Самойленка про інваріантні тори, до того ж функцію Ляпунова (8) можна вибирати у вигляді

$$V=x^2\exp\{s_n(\varphi)\}\ \ ,\ \ n=1,2,3,....$$

де $s_1(\varphi)=-4\cos\varphi$, $s_2(\varphi)=-\frac{16}{3}\cos^3\varphi$, $s_3(\varphi)=-\frac{64}{5}\cos^5\varphi+\frac{32}{3}\cos^3\varphi-4\cos\varphi,\ldots$

Далі дослідження систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt}=sin(\varphi)\,,\frac{dx}{dt}=(cos((2n+1)\varphi))\,x, \tag{11}$$

$$n = 1, 2, 3, ....$$

дозволило зробити наступний висновок: кожна з записаних систем (11) має безліч різних функцій Гріна. При цьому для спряженої системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = sin(\varphi), \frac{dx}{dt} = -(cos((2n+1)\varphi))\, x,$$

при $n = 1, 2, 3, ....$ існує знакозмінна функція Ляпунова, яку можна вибирати у вигляді

$$V = x^2 \exp\{s_n(\varphi)\}(-\cos\varphi) \ , \quad n = 1, 2, ... \ ,$$

де $s_1(\varphi) = 4\cos^2\varphi$, $s_2(\varphi) = 5\cos^4\varphi + \frac{5}{2}\sin^4\varphi, \ldots$

Узагальнення системи вигляду (10) привело до розгляду наступної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\, x, \qquad (12)$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, $x \in R$, $\mu_j(\varphi) = \mu_j(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$–неперервні скалярні функції $\mu_j(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $j = 0, 1$. Припустимо, функція $\mu_1(\varphi)$ така, що лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \qquad (13)$$

має розв'язок $s = s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, який є $2\pi$-періодичним за кожною змінною $\varphi_j, j = \overline{1, m}$. Вибравши квадратичну форму в вигляді

$$V = x^2 \exp\{-2s(\varphi)\} \qquad (14)$$

і порахувавши її похідну в силу системи (12), отримуємо

$$\dot{V} = 2x\dot{x}\exp\{-2s(\varphi)\} - x^2 2\dot{s}(\varphi)\exp\{-2s(\varphi)\} =$$
$$= 2x^2[\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi) - \dot{s}(\varphi)]\exp\{-2s(\varphi)\} =$$
$$= 2x^2[\mu_0(\varphi)]\exp\{-2s(\varphi)\}. \qquad (15)$$

Таким чином, приходимо до наступного твердження.

**Лема 1.** *Якщо в системі рівнянь (12) скалярна функція $\mu_0(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ задовольняє нерівність*

$$|\mu_0(\varphi)| > 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m \qquad (16)$$

*і рівняння (13) має розв'язок $s(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, то система (12) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна-Самойленка про інваріантні тори.*

**Зауваження.** *Якщо не вдається з'ясувати, чи має рівняння (13) розв'язок $s = s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, який є $2\pi$-періодичним за кожною із змінних $\varphi_j, j = \overline{1, m}$, чи такого розв'язку не існує, то можна розглядати збурене рівняння*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi), \qquad (17)$$

*де є можливість вибору функції $\bar{\mu}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, таким чином, щоб рівняння (13) вже мало розв'язок $s(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$. Тоді у випадку виконання нерівності*

$$|\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi)| > 0, \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$$

*система (12) буде регулярною.*

Розглянемо наступні приклади.

**Приклад 1.** Розглянемо систему двох рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)^{-1}$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(\mu_0(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right) x, \qquad (18)$$

де $\varepsilon_i = const, i = 1, 2, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$, $a_k, b_k = const$. Потрібно з'ясувати питання: при яких достатніх умовах на функцію $\mu_0(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_1)$ система (18) буде регулярною?

Позначимо

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \qquad (19)$$

і виберемо наступну функцію

$$\bar{\mu}(\varphi) = \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)}. \qquad (20)$$

Друге рівняння в системі (18) запишемо у вигляді

$$dx/_{dt} = [(\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi)) + (\mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi))]\, x.$$

Тепер переконаємось, що при такому виборі функції (20) рівняння $\dot{s} = \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi)$ має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^0(T_1)$. Враховуючи позначення (19), маємо

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi} =$$

$$= \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi -$$

$$- \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{ds}{d\varphi} = (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)\, \mu_1(\varphi) -$$

$$-\frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2) = \mu_1(\varphi) +$$

$$+ (\varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) +$$

$$+ (\varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi) \cdot \sum_{k=2}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi -$$

$$-\frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2) = \mu_1(\varphi) + \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2) \times$$

$$\times \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_2 + b_1\varepsilon_1) \sin 2\varphi + (\varepsilon_1 \cos\varphi +$$

$$+ \varepsilon_2 \sin\varphi) \cdot \sum_{k=2}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

Очевидно, інтеграл від отриманої функції буде періодичною функцією $s = s_0(\varphi)$.

Оцінюючи функцію (20) зверху і знизу, маємо

$$\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)} \le \bar{\mu}(\varphi) \le$$

$$\le \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)}, \quad \text{якщо } a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0,$$

$$\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)} \le \bar{\mu}(\varphi) \le$$

$$\le \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)}, \quad \text{якщо } a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0$$

Проаналізувавши нерівність $\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi) > 0$, отримуємо достатню умову регулярності системи (18):

$$\mu_0(\varphi) > \begin{cases} -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2})}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0, \\ -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}), & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0 \end{cases}$$

Якщо ж розглянути протилежну нерівність $\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi) < 0$, то отримуємо наступну достатню умову регулярності системи (18):

$$\mu_0(\varphi) < \begin{cases} -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0, \\ -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0\ . \end{cases}$$

**Приклад 2.** Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= 1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= 2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2, \\ \frac{dx}{dt} &= [\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) + 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + \\ &+ 7\sin^2\varphi_1 + 8\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2]x \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді рівняння (17) для даної системи приймає вигляд

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial s}{\partial\varphi_1}(1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2) + \\ &+ \tfrac{\partial s}{\partial\varphi_2}(2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2) = \\ &= 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + 7\sin^2\varphi_1 + \\ &+ 8\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2 - \bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned} \quad (22)$$

Спробуємо знайти такі функції

$$\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = \bar{\mu}_1 \sin\varphi_1 + \bar{\mu}_2 \sin\varphi_2 +$$

$$+ \bar{\mu}_{11} \sin^2\varphi_1 + \bar{\mu}_{12} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \bar{\mu}_{22} \sin^2\varphi_2, \quad (23)$$

де $\bar{\mu}_i, \bar{\mu}_{ij} = const$, щоб рівняння (22) мало розв'язок вигляду

$$s = s(\varphi_1, \varphi_2) = s_1 \cos\varphi_1 + s_2 \cos\varphi_2, s_i = const. \quad (24)$$

Підставляючи рівності (23) і (24) в рівняння (22), отримуємо систему рівнянь

$$-s_1 = 5 - \bar{\mu}_1, -2s_2 = 6 - \bar{\mu}_2, -2s_1 = 7 - \bar{\mu}_{11},$$

$$-3(s_1 + s_2) = 8 - \bar{\mu}_{12}, -4s_2 = 9 - \bar{\mu}_{22},$$

розв'язавши яку, отримаємо функцію (23) у вигляді тригонометричного многочлена з параметрами

$$\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = (5 + s_1)\sin\varphi_1 + (6 + 2s_2)\sin\varphi_2 + \\ +(7 + 2s_1)\sin^2\varphi_1 + (8 + 3s_1 + 3s_2)\times \\ \times\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (9 + 4s_2)\sin^2\varphi_2. \qquad (25)$$

Таким чином, якщо тригонометричний многочлен (25) підставити в праву частину рівняння (22), то це рівняння матиме розв'язок вигляду (24). Позначивши $\sin\varphi_i = \sigma_i$, праву частину рівності (25) запишемо у вигляді

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2) = (5 + s_1)\sigma_1 \\ +(6 + 2s_2)\sigma_2 + (7 + 2s_1)\sigma_1^2 + \\ +(8 + 3s_1 + 3s_2)\sigma_1\sigma_2 + (9 + 4s_2)_2^2. \qquad (26)$$

Очевидно, при довільно фіксованих значеннях параметрів $s_1, s_2 \in R$ існує скінченне найбільше і найменше значення функції (26):

$$\max_{|\sigma_i|\le 1}\Phi(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2) = \Phi_+(s_1, s_2), \\ \min_{|\sigma_i|\le 1}\Phi(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2) = \Phi_-(s_1, s_2). \qquad (27)$$

Наприклад, вибираючи $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, легко знаходимо $\Phi_-(1,0) = -\frac{36}{29}$, $\Phi_+(1,0) = 41$. Це означає, що функція (26) при значеннях параметрів $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, задовольняє нерівності $\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \ge -\frac{36}{29}$, $\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \le 41$. Звідси випливає, що достатньою умовою регулярності системи (21) є, наприклад, виконання нерівності $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) > \frac{36}{29}$.

*Зауваження.* Із рівностей (27) для функції (25) випливає двостороння оцінка : $\Phi_-(s_1, s_2) \le \bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \le \Phi_+(s_1, s_2)$. Звідси отримуємо достатню умову регулярності системи (21): $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) > -\Phi_-(s_1, s_2)$, або $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) < -\Phi_+(s_1, s_2)$ при деяких фіксованих значеннях $s_1, s_2 \in R$.

*Зауваження.* Цікаво було б дослідити можливості обчислення наступних величин $\inf\limits_{s_i\in R}\Phi_+(s_1, s_2)$, $\sup\limits_{s_i\in R}\Phi_-(s_1, s_2)$.

Далі розглянемо систему, яка є узагальненням системи (12), виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)]A(\varphi)x, \qquad (28)$$

де $x \in R^n$, $A(\varphi)$-$n \times n$-вимірна матриця з простору $C^0(\mathcal{T}_m)$.

**Лема 2**. *Припустимо, що матрицю $A(\varphi)$ в системі (28) можна представити у вигляді*

$$A(\varphi) = \lambda I_n + \tilde{A}(\varphi), \qquad (29)$$

*де $\lambda = const \ne 0$, $\tilde{A}^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}(\varphi)$ і рівняння (13) має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, тоді похідна в силу системи (28) від функції*

$$V = \|x\|^2\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} \qquad (30)$$

*задовольняє рівність*

$$\dot{V} = 2\lambda\mu_0(\varphi)\|x\|^2\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} \qquad (31)$$

*і система (28) буде регулярною.*

**Доведення.** Переконаємось у цьому, обчисливши похідну від функції (30) в силу системи (28)

$$\dot{V} = [\langle\dot{x}, x\rangle + \langle x, \dot{x}\rangle]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} + \langle x, x\rangle\times \\ \times\{-2\lambda\dot{s}_0(\varphi)\}\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} = \\ = 2\langle A(\varphi)x, x\rangle[\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} + \\ +\|x\|^2[-2\lambda\dot{s}_0(\varphi)]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} = \\ = \exp\{-2\lambda s_0\}\cdot[2\mu_0\lambda\|x\|^2 + 2\mu_0\langle\tilde{A}x, x\rangle + \\ +2\mu_1\lambda - 2\lambda\dot{s}_0 + 2\mu_1\langle\tilde{A}x, x\rangle]$$

Звідси, з урахуванням властивості кососиметричної матриці $\left\langle\tilde{A}x, x\right\rangle \equiv 0$, маємо

$$\dot{V} = 2\mu_0\lambda\exp\{-2\lambda s_0\}.$$

Лема доведена.

Тепер розглянемо систему рівнянь наступного вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = [\mu_{10}(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\left[\lambda_1 I_{n_1} + \tilde{A}_1(\varphi)\right]x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} == [\mu_{20}(\varphi) + \mu_2(\varphi)]\left[\lambda_2 I_{n_2} + \tilde{A}_2(\varphi)\right]x_2, \qquad (32)$$

де $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $\tilde{A}_i^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}_i(\varphi), i = 1, 2$, $\lambda_i = const \ne 0$.

Із вище розглянутої леми 2 випливає наступне твердження.

**Теорема 1**. *Нехай в системі (32) скалярні функції* $\mu_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ *такі, що обидва рівняння в частинних похідних*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_i(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \quad , \quad i = 1, 2$$

*мають розв'язки* $s = s_{0i}(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *і* $\lambda_i = const \neq 0$, $\mu_i(\varphi) \neq 0$, *тоді система рівнянь (32) з будь-якими кососиметричними матрицями* $\tilde{A}_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ *буде регулярною. Причому одна із квадратичних форм (8), яка забезпечує її регулярність, має вигляд*

$$V = \begin{cases} \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \\ +\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \\ -\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \\ +\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \\ -\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0 \end{cases} .$$

Тепер, враховуючи обгрунтовані вище допоміжні твердження, для систем рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)][R(\varphi) + M(\varphi)]x, \quad (33)$$

де матриці $R(\varphi), M(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $R^T(\varphi) \equiv R(\varphi)$, $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$, отримуємо основний результат.

**Теорема 2.** *Нехай система лінійних розширень на торі (33) така, що*

*1) рівняння в частинних похідних (13) має розв'язок* $s = s_0(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *при скалярній функції* $\mu_1(\varphi)$;

*2) система рівнянь* ${}^{d\varphi}/_{dt} = a(\varphi), {}^{dx}/_{dt} = R(\varphi)x$ *ортогональною заміною змінних* $x = Q(\varphi)y$, $Q^{-1}(\varphi) \equiv Q(\varphi)$ *приводиться до системи з постійними коефіцієнтами, тобто*

$$Q^{-1}(\varphi) R(\varphi) Q(\varphi) - Q^{-1}(\varphi) \dot{Q}(\varphi) = \Lambda =$$

$$= diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \quad , \quad \lambda_i = const \neq 0 \ . \quad (34)$$

*Тоді при будь-якій кососиметричній матриці* $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$ *система (33) буде регулярною.*

*Зауваження.* У випадку, коли симетрична матриця $R(\varphi) \equiv R$ є постійною і невиродженою, завжди існує ортогональна постійна матриця $Q$, яка приводить матрицю $R$ до діагонального виду, тобто виконується рівність (34).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Mozer J.J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Acad. Wiss. Gottingen Math.-Phis. Kl. 1962. Vol. 18a, N 1.P. 1 – 20.

2. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т.34, №6. С. 1219-1240.

3. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, – 1987. – 304 с.

4. *Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова – Киев: Наук. Думка, 1990. – 272 с.

5. *Кулик В.Л.* Конструкції функцій Ляпунова в теорії регулярних лінійних розширень динамчних систем на торі// Укр. мат. журн. –2015. –**67,** №10. – С.1348-1355.

6. *Грод И.Н., Кулик В.Л.* О свойствах непрерывности инвариантных торов и функции Грина линейных расширений на торе// Укр. мат. журн. 1998. – **41**, №12. – С. 1709 – 1714. – С.

7. *V. Kulyk, D.Paczko.* Some conditions of regularity of linear extensions of dynamical systems with respect to selected variables// Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2014, Vol. 19, No. 4, 602–610.

8. *Кулик В., Степаненко Н.* Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі.// Укр. мат. журн. 2007. – **46**, №4. – С. 488 –500. – С.

9. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань — К.: Наук. думка. — 2004. — 474 с.

10. *Перестюк М.О., Слюсарчук В.Ю.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. –2008. –**60**, №7. – С. 948 – 957.

11. *Бронштейн И.У., Копанский А.Я.* Инвариантное многообразие и нормальные формы. – Штиинца: Кишинев, 1992. – 330 с.