УДК 517.95

©2016 р. Н.М. Гузик

Львівський національний університет імені Івана Франка

# ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ДОВІЛЬНИМ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Розглядається обернена задача одночасного визначення двох залежних від часу коефіцієнтів у параболічному рівнянні з виродженням. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі. Дослідження проведено у випадку слабкого виродження.

We consider an inverse problem for simultaneous determination of the two time-dependent coefficients in a degenerate parabolic equation. The conditions of the existence and uniqueness of the classical solution to the above problem are established. We investigate the case of weak degeneration.

Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь в різних формулюваннях вивчались у багатьох роботах. Умови коректної розв'язності обернених задач визначення залежних від часу старших коефіцієнтів у параболічному рівнянні знайдено у [1]-[5]. У роботах [6]-[9] досліджувались обернені задачі ідентифікації залежних від часу коефіцієнтів при першій похідній невідомої функції у параболічному рівнянні. Для визначення невідомих параметрів у згаданих працях задавались різні набори крайових умов та умов перевизначення (значення теплового потоку, нелокальні та інтегральні умови тощо).

Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням досліджені мало. Вивченням обернених задач визначення коефіцієнта $a = a(t),\ a(t) > 0, t \in [0, T]$ у рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

із заданими початковою умовою, крайовими умовами Діріхле та значенням теплового потоку в якості умови перевизначення займались М.І. Іванчов, Н.В. Салдіна. Встановлено умови існування та єдиності класичних розв'язків таких задач у випадку слабкого [10] та сильного [11] виродження. Умови коректної розв'язності обернених задач з невідомим залежним від часу молодшим коефіцієнтом у параболічному рівнянні зі слабким степеневим виродженням знайдено у [12], [13].

Однак на сьогодні актуальними є задачі одночасного визначення декількох параметрів у параболічному рівнянні. Для параболічних рівнянь без виродження такі задачі вивчались у [14]-[16].

У даній роботі розглядається обернена задача одночасного визначення залежних від часу старшого та молодшого коефіцієнтів у параболічному рівнянні з виродженням. Дослідження проведено у випадку довільного слабкого виродження.

**1. Формулювання задачі.** В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення залежних від часу коефіцієнтів $a = a(t)$ та $b = b(t)$ у одновимірному параболічному рівнянні з виродженням

$$u_t = a(t)\psi(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами Діріхле

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)\psi(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_4(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Відомо, що $\psi = \psi(t)$ — монотонно зростаюча функція, така, що $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T], \psi(0) = 0$. Дослідження проводиться у випадку слабкого виродження, коли $\int\limits_0^t \left(\int\limits_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \to 0$, коли $t \to 0$.

**Означення.** *Трійку функцій $(a,b,u) \in (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ назвемо розв'язком задачі (1)-(5), якщо вона задовольняє рівняння (1) і умови (2)-(5).*

## 2. Існування розв'язку задачі (1)-(5).

**Теорема 1.** *Припустимо, що виконуються умови:*

*A1) $\varphi \in C^2[0,h], \mu_3(t) = \mu_{3,0}(t)\psi(t)$, $\mu_{3,0} \in C[0,T],\ \mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,4,\ c,f \in C(\overline{Q}_T)$ та задовольняють умову Гельдера за змінною $x$ з показником $\alpha, 0 < \alpha < 1$ рівномірно відносно $t$;*

*A2) $\varphi'(x) > 0, x \in [0,h],\ \mu_{3,0}(t) > 0$, $\mu_2(t) - \mu_1(t) \neq 0, t \in [0,T]$;*

*A3) $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0)$, $\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_4(0)$.*

*Тоді задача (1)-(5) має розв'язок $(a,b,u)$ при $x \in [0,h]$ та $t \in [0,T_0]$, де число $T_0$, $0 < T_0 \le T$ визначається вихідними даними цієї задачі.*

**Доведення.** Зведемо задачу (1)-(5) до системи рівнянь. Припустимо тимчасово, що функції $a = a(t)$ та $b = b(t)$ відомі.

У прямій задачі (1)-(3) проведемо заміну змінних

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big). \quad (6)$$

Тоді відносно функції $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t)$ отримаємо задачу з однорідною початковою та крайовими умовами:

$$\widetilde{u}_t = a(t)\psi(t)\widetilde{u}_{xx} + b(t)\widetilde{u}_x + c(x,t)\widetilde{u} + f(x,t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) + a(t)\psi(t)\varphi''(x) + b(t)\Big(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\Big) + c(x,t)\Big(\varphi(x) + (\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\Big), \quad (7)$$

$$\widetilde{u}(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \quad (8)$$

$$\widetilde{u}(0,t) = \widetilde{u}(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \quad (9)$$

За допомогою функції Гріна $G_1 = G_1(x,t,\xi,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{u}_t = a(t)\psi(t)\widetilde{u}_{xx} \quad (10)$$

задачу (7)-(9) замінимо еквівалентним інтегро-диференціальним рівнянням

$$\widetilde{u}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(b(\tau)\widetilde{u}_\xi + c(\xi,\tau)\widetilde{u} + f(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\tau)\psi(\tau)\varphi''(\xi) + b(\tau)\Big(\varphi'(\xi) + \frac{1}{h}\Big(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big)\Big) + c(\xi,\tau)\Big(\varphi(\xi) + \mu_1(\tau) - \mu_1(0) + \frac{\xi}{h} \times \Big(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big)\Big)\Big)d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \quad (11)$$

Відомо [17, с. 12], що функції Гріна $G_k = G_k(x,t,\xi,\tau), k = 1,2$ першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння (10) задаються формулами

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left( -\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right. \quad (12)$$

$$\left. + (-1)^k \exp\left( -\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right),\ k=1,2,$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\psi(\tau)d\tau$. Виходячи з (12), легко перевірити, що вони володіють такими властивостями:

$$G_{2x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau),$$

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau),$$

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1,$$

$$\int\limits_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \le \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (13)$$

Покладемо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. Використовуючи (6), (11), пряму задачу (1)-(3) замінимо системою інтегральних рівнянь відносно функцій $u = u(x,t), v = v(x,t)$ :

$$u(x,t) = \varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) +$$
$$+ \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) \Big( b(\tau)v(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) -$$
$$- \frac{\xi}{h}\Big( \mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau) \Big) + a(\tau)\psi(\tau) \times$$
$$\times \varphi''(\xi) \Big) d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \quad (14)$$

$$v(x,t) = \varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) +$$
$$+ \mu_1(0)) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) \times$$
$$\times \Big( b(\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) -$$
$$- \frac{\xi}{h}\Big( \mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau) \Big) - \mu_1'(\tau) + a(\tau)\psi(\tau) \times$$
$$\times \varphi''(\xi) \Big) d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \quad (15)$$

Зауважимо, що для того щоб знайти $v = v(x,t)$ ми здиференціювали (14) за змінною $x$. Знайдемо поведінку правих частин формул (14), (15). Використовуючи (13) та означення функції $\theta = \theta(t)$, отримаємо

$$I_1 \equiv \Big| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) \Big( b(\tau)v(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) + a(\tau)\psi(\tau)\varphi''(\xi) -$$
$$- \frac{\xi}{h}\Big( \mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau) \Big) - \mu_1'(\tau) \Big) d\xi d\tau \Big| \le C_2 t,$$

$$I_2 \equiv \Big| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) \Big( b(\tau)v(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) -$$
$$- \frac{\xi}{h}\Big( \mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau) \Big) + a(\tau)\psi(\tau) \times$$
$$\times \varphi''(\xi) \Big) d\xi d\tau \Big| \le C_3 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le$$
$$\le C_4 \int\limits_0^t \left( \int\limits_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Враховуючи означення слабкого виродження, робимо висновок, що інтеграли в правих частинах формул (14), (15) прямують до нуля, коли $t$ прямує при нуля.

Для відшукання рівнянь стосовно невідомих $a = a(t), b = b(t)$ проінтегруємо рівняння (1) та використаємо (2)-(5). Отримаємо систему рівнянь:

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{\psi(t)v(0,t)},\ t \in [0,T], \quad (16)$$

$$b(t) = \frac{1}{\mu_2(t) - \mu_1(t)} \Big( \mu_4'(t) + \mu_3(t) -$$
$$- a(t)\psi(t)v(h,t) - \int\limits_0^h (c(x,t)u(x,t) +$$
$$+ f(x,t))dx \Big),\ t \in [0,T]. \quad (17)$$

Розглянемо рівняння (14)-(15). Враховуючи поведінку інтегралів $I_1, I_2$ можемо стверджувати, що існує таке число $t_1, 0 < t_1 \leq T$, що виконуються нерівності

$$\Bigg|\mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \\ + \mu_1(0)) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Bigg(b(\tau)v(\xi,\tau) + \\ + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \\ - \frac{\xi}{h}\Bigg(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)\Bigg) + a(\tau)\psi(\tau)\varphi''(\xi)\Bigg)d\xi d\tau\Bigg| \\ \leq \frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}|\varphi(x)|, \ (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1], \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Bigg(b(\tau)v(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) + \\ + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) - \frac{\xi}{h}\Bigg(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)\Bigg) - \\ - \mu_1'(\tau) + a(\tau)\psi(\tau)\varphi''(\xi)\Bigg)d\xi d\tau \geq 0, \\ (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1]. \quad (19)$$

Тоді з рівнянь (14), (15) випливає, що

$$0 < M_0 \equiv \frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}|\varphi(x)| \leq u(x,t) \\ \leq \max_{x\in[0,h]}|\varphi(x)| + \frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}|\varphi(x)| \equiv M_1, \\ (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1], \quad (20)$$

$$v(x,t) \geq \frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}\varphi'(x) \equiv M_2 > 0, \\ (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1]. \quad (21)$$

Це означає, що знаменники в формулах (16), (17) відмінні від нуля на відрізку $[0,t_1]$.

Таким чином задача (1)-(5) зведена до еквівалентної системи рівнянь (14)-(17) при $(x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, $Q_{t_1} \equiv (0,h)\times(0,t_1)$. Еквівалентність розуміємо так: якщо трійка функцій $(a,b,u)$ є розв'язком задачі (1)-(5) при $(x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, то функції $(u,v,a,b) \in (C(\overline{Q}_{t_1}))^2 \times (C[0,t_1])^2$ є розв'язком системи (14)-(17), і, навпаки, якщо $(u,v,a,b)$ — неперервний розв'язок системи (14)-(17) для $(x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, то $(a,b,u) \in (C[0,t_1])^2 \times C^{2,1}(Q_{t_1}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1})$ — розв'язок задачі (1)-(5). Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (14)-(17). Покажемо, що правильним є і зворотнє твердження.

Припустимо, що $(u,v,a,b)$ — неперервний розв'язок системи (14)-(17) для $(x,t) \in \overline{Q}_{t_1}$. Враховуючи припущення теореми, ми можемо здиференціювати рівність (14) за $x$. Оскільки праві частини отриманої рівності та рівності (15) співпадають, то $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. Крім того, функція $u = u(x,t)$ належить до класу $C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1})$, задовольняє умови (2), (3) та рівняння (1). Після цього умова (16) співпадає з (4).

Тепер рівняння (17) можна переписати у вигляді

$$a(t)\psi(t)(u_x(h,t) - u_x(0,t)) + b(t)(u(h,t) - \\ - u(0,t)) + \int\limits_0^h (f(x,t) + c(x,t)u(x,t))dx = \\ = \mu_4'(t),$$

або

$$\int\limits_0^h u_t(x,t)dx = \mu_4'(t), \ t \in [0,t_1].$$

Враховуючи умову узгодження $\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_4(0)$, приходимо до умови (5), що й завершує доведення еквівалентності задачі (1)-(5) та системи рівнянь (14)-(17).

Надалі досліджуватимемо систему рівнянь (14)-(17). Для того, щоб довести існування її розв'язку використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Розпочнемо зі встановлення апріорних оцінок розв'язків системи рівнянь (14)-(17).

Для функції $u = u(x,t)$ правильними залишаються оцінки (20), а для функції $v = v(x,t)$ — оцінка знизу (21).

Позначимо $V(t)=\max\limits_{x\in[0,h]} v(x,t)$. Враховуючи умови теореми, з рівняння (16), матимемо

$$a(t)\le \frac{\mu_3(t)}{\psi(t)M_2}\le A_2<+\infty,\ t\in[0,t_1]. \quad (22)$$

З іншого боку, з рівнянь (16), (17) знаходимо

$$a(t)\ge \frac{\mu_3(t)}{\psi(t)V(t)},\ t\in[0,t_1], \quad (23)$$

$$|b(t)|\le C_4(1+a(t)\psi(t)V(t)),\ t\in[0,t_1]. \quad (24)$$

Далі використаємо (20), (23), (24) щоб, виходячи з (15), оцінити $V=V(t)$ зверху:

$$V(t)\le C_5+C_6\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+$$

$$+C_7\int\limits_0^t \frac{V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+$$

$$+C_8\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)V^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\ t\in[0,t_1]. \quad (25)$$

Використовуючи (23) у вигляді $\dfrac{1}{a(t)}\le\dfrac{\psi(t)V(t)}{\mu_3(t)}$, перетворимо інтеграли, що входять до правої частини нерівності (25):

$$\int\limits_0^t \frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le \int\limits_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)V^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le \int\limits_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)V(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le$$

$$\le C_9\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)V^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Позначимо $V_1(t)=V(t)+1$. Тоді нерівність (25) можна переписати у вигляді

$$V_1(t)\le C_{10}+C_{11}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (26)$$

Піднесемо обидві частини нерівності (26) до квадрату, використовуючи при цьому нерівності Коші та Коші-Буняковського [18, с. 49, 382]:

$$V_1^2(t)\le 2C_{10}^2+2C_{11}^2\int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{a^2(\tau)\psi^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (27)$$

Розглянемо інтеграл

$$J_1=\int\limits_0^t \frac{a^2(\tau)\psi^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le$$

$$\le C_{12}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну змінних $z=\dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$. Отримаємо

$$J_1\le C_{13}\sqrt{\theta(t)}\int\limits_0^1 \frac{dz}{\psi(\theta^{-1}(z\theta(t)))\sqrt{1-z}}=$$

$$=C_{13}\sqrt{\theta(t)}\Bigg(\int\limits_0^{1/2} \frac{dz}{\psi(\theta^{-1}(z\theta(t)))\sqrt{1-z}}+$$

$$+\int\limits_{1/2}^1 \frac{dz}{\psi(\theta^{-1}(z\theta(t)))\sqrt{1-z}}\Bigg)\le$$

$$\le C_{13}\sqrt{\theta(t)}\Bigg(\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{2}dz}{\psi(\theta^{-1}(z\theta(t)))}+$$

$$+\int\limits_{1/2}^1 \frac{dz}{\psi(\theta^{-1}(1/2\theta(t)))\sqrt{1-z}}\Bigg),$$

де через $\theta^{-1}=\theta^{-1}(t)$ позначено функцію обернену до $\theta=\theta(t)$. Зробивши зворотню заміну в першому інтегралі останньої нерівності, одержимо

$$J_1\le C_{13}\sqrt{\theta(t)}\Bigg(\frac{\sqrt{2}}{\theta(t)}\int\limits_0^{\theta^{-1}(1/2\theta(t))} a(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\psi(\theta^{-1}(1/2\theta(t)))}\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z}}\Bigg)\le$$

$$\le C_{14}\frac{\theta^{-1}(1/2\theta(t))}{\sqrt{\theta(t)}}+C_{15}\frac{\sqrt{\theta(t)}}{\psi(\theta^{-1}(1/2\theta(t)))}.$$

Застосуємо теорему про середнє до інтеграла

$$\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\int\limits_\tau^t\psi(\sigma)d\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{\psi(t^*)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{t}{\psi(t^*)}},$$

де $t^*\in[0,t_1]$. Враховуючи означення слабкого виродження, отримуємо, що вираз $\sqrt{\dfrac{t}{\psi(t)}}$ прямує до нуля при $t\to 0$. Це означає, що

$$J_1\le C_{16}.$$

Використовуючи останню оцінку в (27), приходимо до нерівності

$$V_1^2(t)\le C_{17}+C_{18}\int\limits_0^t\frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.\qquad(28)$$

В останній нерівності змінимо $t$ на $\sigma$ і, домноживши на $\dfrac{a(\sigma)\psi(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$, проінтегруємо її по $\sigma$ від 0 до $t$. Використовуючи рівність

$$\int\limits_\tau^t\frac{a(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}=\pi,$$

з цієї нерівності матимемо

$$\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)\psi(\sigma)V_1^2(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}d\sigma\le C_{19}+$$

$$+C_{20}\int\limits_0^t\frac{V_1^4(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (26), одержуємо

$$V_1(t)\le C_{21}+C_{22}\int\limits_0^t\frac{V_1^4(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau.$$

Позначимо $H(t)=C_{21}+C_{22}\displaystyle\int\limits_0^t\frac{V_1^4(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau$. Тоді

$$H'(t)=C_{22}\frac{V_1^4(t)}{\psi(t)}\le C_{22}\frac{H^4(t)}{\psi(t)}.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, знаходимо

$$H(t)\le\frac{C_{21}}{\sqrt[3]{1-3C_{21}^3C_{22}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\psi(\tau)}}}\le$$

$$\le M_3,\ t\in[0,t_2],$$

де число $t_2: 0<t_2\le T$ задовольняє умову

$$1-3C_{21}^3C_{22}\int\limits_0^{t_2}\frac{d\tau}{\psi(\tau)}>0.$$

Отже,

$$V_1(t)\le M_3,\ t\in[0,t_2],$$

або, повертаючись до введених позначень,

$$v(x,t)\le M_3,\ (x,t)\in\overline{Q}_{t_2}.\qquad(29)$$

Використаємо (29) у (23), (24). Одержимо

$$|a(t)|\ge A_1>0,\ t\in[0,t_2],\qquad(30)$$
$$|b(t)|\le M_4,\ t\in[0,t_2].\qquad(31)$$

Таким чином, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (14)-(17) встановлено.

Уточнимо оцінку функції $v=v(x,t)$. Для цього використаємо рівняння (15). Оскільки всі доданки, крім першого, правої частини формули (15) прямують до нуля при $t\to 0$, то існує таке число $t_3, 0<t_3\le T$, що виконується нерівність

$$C_5+C_{23}(1+A_2+M_2+M_3M_4)\times\qquad(32)$$

$$\times \int_0^t \left( \int_\tau^t \psi(\sigma) d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq M_3, \ t \in [0, t_3].$$

Покладемо $T_0 = \min\{t_1, t_2, t_3\}$. Подамо систему рівнянь (14)-(17) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u, v, a, b)$, а оператор $P$ визначається правими частинами рівнянь (14)-(17). У банаховому просторі $(C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2$ виберемо множину $N = \{(u, v, a, b) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2 : M_0 \leq u(x, t) \leq M_1, M_2 \leq v(x, t) \leq M_3, A_1 \leq a(t) \leq A_2, |b(t)| \leq M_4\}$. Очевидно, що вибрана таким чином множина $N$ — замкнена і опукла, а оператор $P$ переводить її в себе. Те, що цей оператор цілком неперервний доводиться за тою схемою, що й у невиродженому випадку [17, с. 27]. Це означає, що виконуються всі умови теореми Шаудера про нерухому точку, а, отже, існує розв'язок системи рівнянь (14)-(17) при $(x, t) \in \overline{Q}_{T_0}$. Враховуючи еквівалентність згаданої системи та задачі (1)-(5), одержимо існування розв'язку цієї задачі для $(x, t) \in \overline{Q}_{T_0}$. Теорему 1 доведено.

**3. Єдиність розв'язку задачі (1)-(5).**

**Теорема 2.** *При виконанні умов*

$B1)$ $c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T), \varphi \in C^3[0, h]$;

$B2)$ $\mu_{3,0}(t) \neq 0, \ \mu_2(t) - \mu_1(t) \neq 0, \ t \in [0, T]$ *розв'язок задачі* (1)-(5) *єдиний.*

**Доведення.** Припустимо, що існує два розв'язки $(a_i, b_i, u_i), i = 1, 2$ задачі (1)-(5). Виходячи з (1)-(5), для різниць $a(t) = a_1(t) - a_2(t), b(t) = b_1(t) - b_2(t)$, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ отримаємо задачу

$$u_t = a_1(t)\psi(t)u_{xx} + b_1(t)u_x + c(x, t)u + \\ + a(t)\psi(t)u_{2xx} + b(t)u_{2x}, \quad (33)$$

$$u(x, 0) = 0, \ x \in [0, h], \quad (34)$$

$$u(0, t) = u(h, t) = 0, \ t \in [0, T], \quad (35)$$

$$a_1(t)\psi(t)u_x(0, t) + \\ + a(t)\psi(t)u_{2x}(0, t) = 0, \ t \in [0, T], \quad (36)$$

$$\int_0^h u(x, t) dx = 0, \ t \in [0, T]. \quad (37)$$

За допомогою функції Гріна $G^*(x, t, \xi, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = a_1(t)t^\beta u_{xx} + b_1(t)u_x + c(x, t)u,$$

розв'язок задачі (33)-(35) запишемо у вигляді

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau)(a(\tau)\psi(\tau) \times \\ \times u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) + b(\tau)u_{2\xi}(\xi, \tau)) d\xi d\tau. \quad (38)$$

Диференціюючи формулу (38) за $x$, знаходимо

$$u_x(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_x^*(x, t, \xi, \tau)(a(\tau)\psi(\tau) \times \\ \times u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) + b(\tau)u_{2\xi}(\xi, \tau)) d\xi d\tau. \quad (39)$$

Виходячи з рівнянь (36), (37), знайдемо рівняння стосовно функцій $a = a(t), b = b(t)$. Враховуючи (38), (39), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтера

$$a(t) = \int_0^t (K_{11}(t, \tau)a(\tau) + K_{12}(t, \tau)b(\tau)) d\tau, \quad (40)$$

$$b(t) = \int_0^t (K_{21}(t, \tau)a(\tau) + K_{22}(t, \tau)b(\tau)) d\tau, \quad (41)$$

ядра якої визначаються формулами

$$K_{11}(t, \tau) = -\frac{a_1(t)a_2(t)\psi(t)}{\mu_3(t)} \int_0^h G_x^*(0, t, \xi, \tau) \times \\ \times \psi(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) d\xi,$$

$$K_{12}(t, \tau) = -\frac{a_1(t)a_2(t)\psi(t)}{\mu_3(t)} \times \\ \times \int_0^h G_x^*(0, t, \xi, \tau)u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi,$$

$$K_{21}(t, \tau) = -\frac{1}{\mu_2(t) - \mu_2(\tau)} \Big( a_1(t)\psi(t) \times$$

$$\times \int_0^h (G_x^*(h,t,\xi,\tau) - G_x^*(0,t,\xi,\tau))\psi(\tau)\times$$

$$\times u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi + \int_0^h\int_0^h G^*(x,t,\xi,\tau)c(x,t)\times$$

$$\times \psi(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi dx-$$

$$-\frac{\psi^2(t)a_1(t)a_2(t)(u_{2x}(h,t)-u_{2x}(0,t))}{\mu_3(t)}\times$$

$$\times \int_0^h G_x^*(0,t,\xi,\tau)\psi(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi\Bigg),$$

$$K_{22}(t,\tau) = -\frac{1}{\mu_2(t)-\mu_2(\tau)}\Bigg(a_1(t)\psi(t)\times$$

$$\int_0^h (G_x^*(h,t,\xi,\tau) - G_x^*(0,t,\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^h\int_0^h G^*(x,t,\xi,\tau)c(x,t)u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi dx-$$

$$-\frac{\psi^2(t)a_1(t)a_2(t)(u_{2x}(h,t)-u_{2x}(0,t))}{\mu_3(t)}\times$$

$$\times \int_0^h G_x^*(0,t,\xi,\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi\Bigg).$$

Покажемо, що ядра системи рівнянь (40), (41) є інтегровними. Перш за все зауважимо, що за умов теореми для функції $u_{2x} = u_{2x}(x,t)$ правильною залишається оцінка (29). Оцінимо $u_{2xx} = u_{2xx}(x,t)$. Для цього розглянемо відповідну задачу (1)-(3). Диференціюючи (14) двічі по $x$, знаходимо

$$u_{2xx}(x,t) = \varphi''(x) + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\Bigg(b_2(\tau)\times$$

$$\times u_{2\xi}(h,\tau) + c(h,\tau)\mu_2(\tau) + f(h,\tau) - \mu_2'(\tau)+$$

$$+a_2(\tau)\psi(\tau)\varphi''(h)\Bigg)d\tau - \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(b_2(\tau)u_{2\xi}(0,\tau) + c(0,\tau)\mu_1(\tau) + f(0,\tau)-$$

$$-\mu_1'(\tau) + a_2(\tau)\psi(\tau)\varphi''(0)\Bigg)d\tau - \int_0^t\int_0^h\Bigg(c(\xi,\tau)$$

$$\times u_{2\xi}(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau)-$$

$$-\frac{1}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a_2(\tau)\psi(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)\times$$

$$\times G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau - \int_0^t\int_0^h G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times b_2(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (42)$$

Оцінимо третій доданок, що входить до правої частини формули (42). Використовуючи формулу (12), одержимо

$$J_2 = \Bigg|\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\Bigg(b_2(\tau)u_{2\xi}(0,\tau)+$$

$$+c(0,\tau)\mu_1(\tau) + f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)+$$

$$+a_2(\tau)\psi(\tau)\varphi''(0)\Bigg)d\tau\Bigg| \le$$

$$\le C_{24}\int_0^t \frac{1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x+2nh|\times$$

$$\times\exp\Bigg(-\frac{(x+2nh)^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\Bigg)d\tau.$$

В останньому інтегралі проведемо заміну змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$. Отримаємо

$$J_2 \le C_{25}\theta(t)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{1}{\psi(\theta^{-1}(z\theta(t)))(1-z)^{3/2}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x+2nh|\exp\Bigg(-\frac{(x+2nh)^2}{\theta(t)(1-z)}\Bigg)dz =$$

$$= C_{25}\theta(t)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{1}{\psi(\theta^{-1}(\theta(t)(1-z)))z^{3/2}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x+2nh|\exp\Bigg(-\frac{(x+2nh)^2}{\theta(t)z}\Bigg)dz,$$

де $\theta^{-1} = \theta^{-1}(t)$ — функція, обернена до $\theta = \theta(t)$. Замінимо $\sigma = \dfrac{(x+2nh)}{\sqrt{\theta(t)z}}$. У резуль-

таті знаходимо

$$J_2 \le C_{25} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\frac{(x+2nh)}{\sqrt{\theta(t)}}}^{+\infty} e^{-\sigma^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\psi\left(\theta^{-1}\left(\theta(t) - \frac{(x+2nh)^2}{\theta(t)\sigma^2}\right)\right)} d\sigma \le \frac{C_{26}}{\psi(t)}.$$

Аналогічно оцінюється й другий доданок правої частини формули (42). Для оцінки четвертого доданка використаємо (13). Отримаємо

$$J_3 = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \Big( c(\xi,\tau) u_{2\xi}(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau) u_2(\xi,\tau) +$$

$$+ f_\xi(\xi,\tau) - \frac{1}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a_2(\tau)\psi(\tau) \times$$

$$\times \varphi'''(\xi) \Big) G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau) d\xi d\tau \le$$

$$\le C_{27} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Враховуючи означення слабкого виродження, матимемо

$$J_3 \le C_{27}.$$

Таким чином з рівняння (42), знаходимо

$$|u_{2xx}(x,t)| \le \frac{C_{28}}{\psi(t)}. \qquad (43)$$

Далі для дослідження ядер системи (40), (41), використаємо відомі [19, с. 469] оцінки функцій Гріна

$$|D_t^r D_y^s G(y,t,\eta,\tau)| \le C_{29} (t-\tau)^{-\frac{1+2r+s}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(-C_{30} \frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}\right), \; r \in \{0,1\}, \qquad (44)$$

$s \in \{0,1,2\}$, $2r+s=1$ або $2r+s=2, \tau < t$.

Враховуючи (29), (44) та умови теореми, знаходимо

$$|K_{11}(t,\tau)| \le C_{31} \int\limits_0^h \frac{1}{\theta(t) - \theta(\tau)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{C_{32}\xi^2}{\theta(t) - \theta(\tau)}\right) d\xi \le \frac{C_{33}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},$$

$$|K_{21}(t,\tau)| \le C_{34} \int\limits_0^h \int\limits_0^h \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{C_{32}(x-\xi)^2}{\theta(t) - \theta(\tau)}\right) d\xi dx + C_{35} \times$$

$$\times \int\limits_0^h \frac{1}{\theta(t) - \theta(\tau)} \exp\left(-\frac{C_{32}\xi^2}{\theta(t) - \theta(\tau)}\right) d\xi \le$$

$$\le \frac{C_{36}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Функції $K_{12}(t,\tau), K_{22}(t,\tau)$ оцінюються аналогічно. Беручи до уваги означення слабкого виродження, можемо стверджувати, що ядра однорідної системи інтегральних рівнянь Вольтера (40), (41) мають інтегровні особливості. Це означає, що ця система має лише тривіальний розв'язок

$$a(t) = 0, \; b(t) = 0, \; t \in [0,T].$$

Використовуючи цей факт в задачі (33)-(35), отримаємо

$$u(x,t) = 0, \; (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення Теореми 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic equation. Part I. Existence and uniqueness // J. Math. Mech. – 1962. – **11**, №6. – P. 907-918.
2. *Cannon J.R., Rundell W.* Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **160.** – P. 572-582.
3. *Houssin Azari, Chanjun Li, Yiyong Nie, Shuhua Zhang* Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A: Math. Analysis. – 2004. – **11.** – P. 665-674.
4. *Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.Б.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з інтегральним перевизначенням // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997. – **48.** – С. 71-79.
5. *Пабирівська Н.В., Власов В.А.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні // Мат.

методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 18-25.

6. *Cannon J.R., S. Peres-Esteva* Determination of the coefficient of $u_x$ in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1993. – **10**, №3. – P. 521-531.

7. *Hong - Ming Yin* Global solvability for some parabolic inverse problems // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – P. 392-403.

8. *Trong D.D., Ang D.D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**, № 3. – P. 733-752.

9. *Пабирівська Н., Вареник О.* Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – **64**. – С. 181-189.

10. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2006. – **288**. Матем. – С. 99-106.

11. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. ж. – 2006. – **58**, №11. – С. 1487-1500.

12. *Гринців Н.* Визначення коефіцієнта перед першою похідною у параболічному рівнянні з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – **71**. – С. 78-87.

13. *Hryntsiv N.* Non-local inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". "Фіз.-мат. науки". – 2011. – **696**, №696. – С. 32-39.

14. *Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. ж. – 2002. – **43**, № 2. – С. 406-413.

15. *Пабирівська Н.В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – **56**. – С. 142-149.

16. *Erbu Ozbilge, Ali Demir* Analysis of a semigroup approach in the inverse problem of identifying an unknown parameters // Applied Math. and Computation. – 2011. – **218**, 3. – P. 965-969.

17. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers. – 2003. – 240 p.

18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Елементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

19. *Ладиженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука. – 1973. – 736 с.