УДК 517.929

©2016 р. А.Б. Дорош, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Методом стискаючих відображень встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Sufficient conditions for boundary value problem solution existence for neutral integral-differential equations are obtained using the contraction mapping principle.

1. Вступ

Диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється, описують багато прикладних задач в електродинаміці, теорії автоматичного керування, хіміко-технологічних процесах та ін. Значний інтерес представляють крайові задачі для таких рівнянь, що виникають у задачах оптимального керування системами із запізненням, у задачах балістики, екології тощо.

Існування та єдиність розв'язків крайових задач для рівнянь із запізненням вивчались у роботах [1-3]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу досліджувались у працях [4-5] із використанням методу стискаючих відображень та топологічних методів.

У даній роботі встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу, які продовжують дослідження роботи [6].

2. Позначення та постановка задачі

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x)=f\Big(x,y(x),y(x-\tau_0(x)),y'(x),$$

$$y'(x-\tau_1(x)),y''(x-\tau_2(x))\Big)+ \qquad (1)$$

$$+\int\limits_a^b g\Big(x,s,y(s),y(s-\tau_0(s)),y'(s),$$

$$y'(s-\tau_1(s)),y''(s-\tau_2(s))\Big)ds,$$

$$y^{(i)}(x)=\varphi^{(i)}(x),\quad i=0,1,2, \qquad (2)$$
$$x\in[a^*;a],\quad y(b)=\beta,$$

де запізнення $\tau_0(x),\tau_1(x),\tau_2(x)$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\beta\in R$,

$$a^*=\max\Big\{\min_{x\in[a;b]}(x-\tau_0(x)),\min_{x\in[a;b]}(x-\tau_1(x)),$$

$$\min_{x\in[a;b]}(x-\tau_2(x))\Big\}.$$

Нехай функції $f(x,u_0,u_1,v_0,v_1,w)$, $g(x,s,u_0,u_1,v_0,v_1,w)$ неперервні за сукупністю змінних в області $G=[a,b]\times G_1^2\times G_2^2\times G_3$ та $Q=[a,b]\times G$, де $G_1=\{u\in R:\ |u|<P_1\}$, $G_2=\{v\in R:\ |v|<P_2\}$, $G_3=\{w\in R:\ |w|<P_3\}$, P_1,P_2,P_3 – додатні сталі.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\tau_2(x)$:

$$E_1=\big\{x_i\in[a,b]:\ x_i-\tau_1(x_i)=a,\ i=1,2,...\big\},$$

$$E_2=\big\{x_j\in[a,b]:\ x_0=a,$$
$$x_{j+1}-\tau_2(x_{j+1})=x_j,\ j=1,2,...\big\},$$
$$E=E_1\cup E_2.$$

Нехай функції $\tau_1(x),\tau_2(x)$ такі, що множини E_1,E_2 є скінченними. Точки множини E занумеруємо в порядку їхнього зростання:

$$a=x_0<x_1<...<x_k<b.$$

Введемо такі позначення:

$$P=\sup\Bigg\{\Big|f\left(x,u,u_1,v,v_1,w\right)\Big|+$$

$$\left|\int_a^b g(x,s,u,u_1,v,v_1,w)ds\right|:\ |u_i|<P_1,$$

$$|v_i|<P_2,\ i=0,1,\ |w|<P_3,\ x,s\in[a,b]\Bigg\},$$

$$J=[a^*,a],I=[a,b],I_1=[a,x_1],I_2=[x_1,x_2],$$
$$\ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,.$$

Означимо множину функцій

$$B\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\left(x\right): \tag{3}$$

$$y(x)\in\Big(C(J\cup I)\cap\big(C^1(I)\big)\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\Big)\Big),$$

$$|y\left(x\right)|\le P_1,\ |y'\left(x\right)|\le P_2,\ |y''\left(x\right)|\le P_3\Bigg\}.$$

Функцію $y=y\left(x\right)$ із простору $B\left(J\cup I\right)$ називатимемо розв'язком задачі (1)-(2), якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (2).

3. Існування розв'язку

Введемо у просторі $B\left(J\cup I\right)$ норму

$$\|y\|_B=\max\Bigg\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y\left(x\right)|, \tag{4}$$
$$\frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}|y'\left(x\right)|,\max_{x\in I}|y'\left(x\right)|\Big)$$
$$\max\Big(\max_{x\in J}|y''\left(x\right)|,\max_{x\in I_1}|y''\left(x\right)|,\ldots,$$
$$\max_{x\in I_{k+1}}|y''\left(x\right)|\Big)\Bigg\}.$$

Простір $B\left(J\cup I\right)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (1)-(2) еквівалентна такому інтегральному рівнянню [1, 5]:

$$y\left(x\right)=\int_{a^*}^{b}\Bigg[f\Big(s,y\left(s\right),y\left(s-\tau_0\left(s\right)\right),y'\left(s\right),$$
$$y'\left(s-\tau_1\left(s\right)\right),y''\left(s-\tau_2\left(s\right)\right)\Big)+ \tag{5}$$
$$+\int_a^b g\Big(s,\xi,y\left(\xi\right),y\left(\xi-\tau_0\left(\xi\right)\right),y'\left(\xi\right),$$
$$y'\left(\xi-\tau_1\left(\xi\right)\right),y''\left(\xi-\tau_2\left(\xi\right)\right)\Big)d\xi\Bigg]\bar{G}\left(x,s\right)ds+$$
$$l\left(x\right),x\in J\cup I,$$

де $\bar{G}\left(x,s\right)=\begin{cases}G\left(x,s\right),\ x,s\in I,\\ 0,\ x,s\notin I,\end{cases}$

$$l(x)=\begin{cases}\varphi\left(x\right),\ x\in J,\\ \frac{\beta-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right),\ x\in I,\end{cases}$$

а $G\left(x,s\right)$ – функція Гріна для такої крайової задачі:

$$y''\left(x\right)=0,x\in I,y\left(a\right)=y\left(b\right)=0.$$

Зазначимо, що, не зменшуючи загальності, можна вважати крайові умови (2) нульовими. У протилежному випадку, лінійна заміна

$$z\left(x\right)=y\left(x\right)-\psi\left(x\right),$$

де $\psi\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right),\ x\in[a^*,a]\,,\\ \frac{\varphi(a)(b-x)+\beta(x-a)}{b-a},\ x\in[a,b]\,,\end{cases}$ приводить до крайової задачі типу (1)-(2) з нульовими крайовими умовами

$$y^{(i)}=0,\ x\in[a^*,a]\,,i=0,1,2,\ y\left(b\right)=0. \tag{6}$$

Визначимо оператор T, що діє в просторі $B\left(J\cup I\right)$, формулою

$$\left(Ty\right)\left(x\right)=\int_{a^*}^{b}\Bigg[f\Big(s,y\left(s\right),y\left(s-\tau_0\left(s\right)\right),y'\left(s\right),$$
$$y'\left(s-\tau_1\left(s\right)\right),y''\left(s-\tau_2\left(s\right)\right)\Big)+ \tag{7}$$
$$+\int_a^b g\Big(s,\xi,y\left(\xi\right),y\left(\xi-\tau_0\left(\xi\right)\right),y'\left(\xi\right),$$
$$y'\left(\xi-\tau_1\left(\xi\right)\right),y''\left(\xi-\tau_2\left(\xi\right)\right)\Big)d\xi\Bigg]\bar{G}\left(x,s\right)ds+$$
$$+l\left(x\right),\ x\in J\cup I.$$

Тоді

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \Big[f\Big(s, y(s), y(s-\tau_0(s)), y'(s),$$
$$y'(s-\tau_1(s)), y''(s-\tau_2(s))\Big) + \qquad (8)$$
$$+ \int\limits_{a}^{b} g\Big(s, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_0(\xi)), y'(\xi),$$
$$y'(\xi-\tau_1(\xi)), y''(\xi-\tau_2(\xi))\Big) d\xi \Big] \bar{G}'_x(x,s)\, ds +$$
$$+ l'(x), \ x \in J \cup I,$$

$$(Ty)''(x) = f\Big(s, y(s), y(s-\tau_0(s)), y'(s),$$
$$y'(s-\tau_1(s)), y''(s-\tau_2(s))\Big) + \qquad (9)$$
$$+ \int\limits_{a}^{b} g\Big(s, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_0(\xi)), y'(\xi),$$
$$y'(\xi-\tau_1(\xi)), y''(\xi-\tau_2(\xi))\Big) d\xi +$$
$$+ l''(x), \ x \in J \cup I.$$

Теорема 1. *Нехай справджуються такі припущення:*

1) $\max\Big\{ \max\limits_{x\in J} |\varphi(x)|, \ \frac{(b-a)^2}{8} P + \max(|\varphi(a)|, |\gamma|) \Big\} \le P_1,$

2) $\max\Big\{ \max\limits_{x\in J} |\varphi'(x)|, \ \frac{b-a}{2} P + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right| \Big\} \le P_2,$

3) $\max\Big\{ \max\limits_{x\in J} |\varphi''(x)|, \ P \Big\} \le P_3,$

4) *функції* $f(x, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$, $g(x, s, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$ *задовольняють умову Ліпшиця по змінних* $u_i, v_i, i = \overline{0,1}, w$ *зі сталими* $L_j, M_j, \ j = \overline{1,5}$ *в* G *та* Q,

5) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum\limits_{j=1}^{2} \Big(L_j + (b-a) M_j \Big) + \frac{b-a}{2} \sum\limits_{j=3}^{4} \Big(L_j + (b-a) M_j \Big) + L_5 + (b-a) M_5 < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) в $B(J \cup I)$.

Доведення. Для функції Гріна має місце співвідношення [5]

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \le s \le x \le b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \le x \le s \le b, \end{cases}$$

і правильні такі оцінки

$$\int\limits_{a}^{b} |G(x,s)|\, ds \le \frac{(b-a)^2}{8}, \qquad (10)$$
$$\int\limits_{a}^{b} \left|G'_x(x,s)\right| ds \le \frac{b-a}{2}.$$

Якщо умови 1)-3) та нерівності (10) справджуються, тоді оператор T відображає простір $B(J \cup I)$ у себе.

Нехай $y_1, y_2 \in B(J \cup I)$. Враховуючи умову 4) та оцінки (10), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big| \le$$
$$\le \int\limits_{a^*}^{b} \Big[(L_1 + L_2) \max_{x \in J \cup I} |y_1(x) - y_2(x)| +$$
$$+ (L_3 + L_4) \max\Big\{ \max_{x\in I} \left| y_1'(x) - y_2'(x) \right|,$$
$$\max_{x\in J} \left| y_1'(x) - y_2'(x) \right| \Big\} +$$
$$+ L_5 \max\Big\{ \max_{x\in J} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right|,$$
$$\max_{x\in I_1} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right|, \ldots,$$
$$\max_{x\in I_{k+1}} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right| \Big\} +$$
$$+ (b-a)(M_1 + M_2) \max_{x \in J \cup I} |y_1(x) - y_2(x)| +$$
$$+ (b-a)(M_3 + M_4) \max\Big\{ \max_{x\in I} \left| y_1'(x) - y_2'(x) \right|,$$
$$\max_{x\in J} \left| y_1'(x) - y_2'(x) \right| \Big\} +$$
$$+ M_5 (b-a) \max\Big\{ \max_{x\in J} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right|,$$

$$\max_{x\in I_1}\left|y_1''(x)-y_2''(x)\right|,\ldots,$$

$$\left.\left.\max_{x\in I_{k+1}}\left|y_1''(x)-y_2''(x)\right|\right\}\right]$$

$$\times\bar{G}(x,s)\,ds\le$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+\right.$$

$$+(b-a)(M_1+M_2)\big)+$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|\le$$

$$\le\frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+\right.$$

$$+(b-a)\big(M_1+M_2\big)\big)+$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\left|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\right|\le$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+(b-a)\big(M_1+M_2\big)\big)+\right.$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Виходячи із одержаних оцінок та означення норми в просторі $B(J\cup I)$, маємо

$$\|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\|_B\le \tag{11}$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{j=1}^{2}\left(L_j+(b-a)M_j\right)+\right.$$

$$+\frac{b-a}{2}\sum_{j=3}^{4}\left(L_j+(b-a)M_j\right)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Із нерівності (11), при виконанні умови 5), дістаємо, що оператор T є стискаючим у просторі $B(J\cup I)$ і має єдину нерухому точку в цьому просторі. Отже, крайова задача (1)-(2) має єдиний розв'язок у $B(J\cup I)$. Теорему доведено.

Зауваження. Ітераційна схема знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 досліджена в роботі [7].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grim L.J., Schmitt K.* Boundary Value Problems for Delay Differential Equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, N5. – P. 997-1000.
2. *Лучка А.Ю.* О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. — К.: Ін-т математики АН УРСР, 1981. — С. 35-56.
3. *Athanassiadou E.S.* On the Existence and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations // Mathematica Moravica. – 2013. – **17**, N1. – P. 51-57.
4. *Biga A., Gaber R.* Existence, Uniqueness and Approximation for the Solution of a Second Order Neutral Differential Equation With Delay in Banach Spaces // Mathematica. – 2007. – **49**, N2. – P. 117-130.
5. *Каменский Т.А., Мышкис А.Д.* Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, N12. – С. 2171-2179.
6. *Cherevko I., Dorosh A.* Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – **44**, N2. – P. 154-165.
7. *Настасьєва Н.П., Черевко І.М.* Наближений метод розв'язування крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу // Математичні студії. – 1998. – 10, № 2. – С. 147-–152.