УДК 517.95

©2016 р. П.І. Каленюк[1], З.М. Нитребич[2], Г. Кудук[1], М.М. Симотюк[3]

[1]Жешувський університет, Польща,
[2,3]Національний університет „Львівська політехніка“,
[3]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України

ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

Встановлено умови існування в шкалі просторів Соболєва єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними другого порядку.

The conditions of existence and uniqueness (in the scale of Sobolev spaces) of solution to the problem with momentum integral conditions for partial differential equations of second order.

1. Вступ. У багатьох задачах природознавства виникають задачі з нелокальними інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Прикладом можуть бути задачі, пов'язані з дослідженнями процесів поширення тепла, процесів вологопереносу у капілярнопористих середовищах, дифузії частинок у турбулентній плазмі, обернених задач, а також задач математичної біології та демографії [1–7, 9–11, 13]. Дослідження задач з інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними розпочалося порівняно недавно. Інтерес до їх вивчення зумовлений не тільки важливістю їхньої фізичної інтерпретації, а також тим, що для багатьох таких рівнянь неможлива коректна постановка локальних крайових задач.

У даній роботі викладено результати, отримані при дослідженні задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними другого порядку в необмеженій смузі; при цьому описано клас рівнянь із частинними похідними, для яких вказана задача є коректною у просторах Соболєва. Відзначимо, що у випадку обмежених областей розв'язність задач з інтегральними умовами у вигляді моментів для систем рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників [3–5], для оцінок знизу яких використано метричний підхід та результати метричної теорії чисел [9]. Близькими до проведених досліджень є результати роботи [11], де для системи рівнянь із частинними похідними в необмеженій смузі розглянуто задачу з інтегральними умовами, які не містять вагових функцій під знаком інтеграла), а також результати роботи [13], де застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови та вивчення властивостей розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для еволюційного рівняння.

2. Основні умовні позначення. Будемо використовувати такі позначення: $\Pi(T) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0;T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $\mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \geq 0$, — класичний простір Соболєва, який складається з таких функцій $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, для яких $(1+\xi^2)^{\alpha/2}\tilde{\varphi}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, де $\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ix\xi}dx$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$. Норма в просторі $\mathbf{H}_\alpha$ визначається рівністю

$$\|\varphi(x);\mathbf{H}_\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,(1+\xi^2)^\alpha\,d\xi};$$

$\mathbf{H}_\alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір таких функцій $u(t,x)$, що похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $j = 0,1,\ldots,n$, для кожного фіксованого $t \in [0;T]$ належать до простору $\mathbf{H}_{\alpha-j}$ і неперервно змінюються за $t \in [0;T]$ в цьому просторі; норму в просторі

$\mathbf{H}^n_\alpha$ задаємо рівністю

$$\|u(t,x);\mathbf{H}^n_\alpha\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0;T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; \mathbf{H}_{\alpha-j} \right\|.$$

3. Формулювання задачі. В області $\Pi(T)$ для рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, розглянемо задачу з інтегральними умовами

$$\int_0^T t^{j-1} u(t,x) dt = \varphi_j(x), j = 1,2, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Будемо припускати, що рівняння (1) є таким, що для коренів λ_1, λ_2 многочлена $L(\lambda, i)$ виконується умова

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0. \tag{3}$$

Умова (3) виконується, наприклад, якщо $a_1 = 0, a_2 = 1$, і порушується, якщо $a_1 = 0, a_2 = -1$. У першому випадку рівняння (1) є рівнянням Лапласа, в другому — рівнянням малих коливань струни.

Означення. *Задачу* (1), (2) *будемо називати* (α_1, α_2)*-коректною, якщо для довільних* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{H}_{\alpha_1}$ *у просторі* $\mathbf{H}^2_{\alpha_2}$ *існує єдина функція* $u(t,x)$*, яка справджує рівняння* (1)*, умови* (2)*, і виконується нерівність*

$$\|u;\mathbf{H}^2_{\alpha_2}\| \le C\left(\|\varphi_1;\mathbf{H}_{\alpha_1}\| + \|\varphi_2;\mathbf{H}_{\alpha_1}\|\right),$$

де стала $C > 0$ *не залежить від вибору функцій* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$.

Метою даної роботи є встановлення умов, при виконанні яких задача (1), (2) є (α_1, α_2)-коректною. Ці умови викладено в теоремі 1, яка є основним результатом роботи.

4. Побудова формального розв'язку. Нехай $\tilde{u}(t,\xi)$, $\tilde{\varphi}_1(\xi)$, $\tilde{\varphi}_2(\xi)$ — перетворення Фур'є за змінною x функцій $u(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно. Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1) та умов (2), отримаємо, що функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком такої інтегральної задачі з параметром $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2\tilde{u}(t,\xi)}{dt^2} + a_1(i\xi)\frac{d\tilde{u}(t,\xi)}{dt} + a_2(i\xi)^2\tilde{u}(t,\xi) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^T t^{j-1}\tilde{u}(t,\xi)dt = \tilde{\varphi}_j(\xi), j = 1,2. \tag{5}$$

Нехай $f_1(t,\xi), f_2(t,\xi)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння (4), що $f_q^{(j-1)}(0,\xi) = \delta_{j,q}$, $j,q = 1,2$, де $\delta_{j,q}$ — символ Кронекера. Зауважимо, що функції $f_1(t,\xi), f_2(t,\xi)$, є аналітичними за t,ξ. Для цих функцій виконуються такі зображення

$$f_1(t,\xi) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1\xi t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 \xi t}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{6}$$

$$f_2(t,\xi) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_2\xi t} - e^{\lambda_1 \xi t}}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi}, & \xi \neq 0, \\ t, & \xi = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Розв'язок задачі (4)–(5) зображується формулою

$$\tilde{u}(t,\xi) = C_1(\xi)f_1(t,\xi) + C_2(\xi)f_2(t,\xi), \tag{8}$$

де сталі $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^2 C_q(\xi)\int_0^T f_q(t,\xi)dt = \tilde{\varphi}_1(\xi), \\ \sum_{q=1}^2 C_q(\xi)\int_0^T t f_q(t,\xi)dt = \tilde{\varphi}_2(\xi). \end{cases} \tag{9}$$

Нехай $\Delta(\xi)$ – визначник системи (9):

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \int_0^T f_1(t,\xi)dt & \int_0^T f_2(t,\xi)dt \\ \int_0^T t f_1(t,\xi)dt & \int_0^T t f_2(t,\xi)dt \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Зауважимо, що $\Delta(0) \neq 0$. Дійсно, $f_1(t,0) = 1$, $f_2(t,0) = t$, тому

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \int_0^T dt & \int_0^T tdt \\ \int_0^T tdt & \int_0^T t^2dt \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} T & T^2/2 \\ T^2/2 & T^3/3 \end{vmatrix} = \frac{T^4}{12}. \tag{11}$$

Якщо виконується умова

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \Delta(\xi) \neq 0, \tag{12}$$

то система (9) має єдиний розв'язок $(C_1(\xi), C_2(\xi))$. Використовуючи правило Крамера, дістанемо

$$C_1(\xi) = \frac{\tilde{\varphi}_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T t f_2(t,\xi)dt -$$

$$-\frac{\tilde\varphi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T f_2(t,\xi)dt,$$

$$C_2(\xi)=-\frac{\tilde\varphi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T tf_1(t,\xi)dt+$$

$$+\frac{\tilde\varphi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T f_1(t,\xi)dt.$$

Тому при виконанні умови (12) задача (4), (5) має єдиний розв'язок

$$\tilde u(t,\xi)=\sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}f_q(t,\xi)\tilde\varphi_j(\xi), \qquad (13)$$

де $\Delta_{j,q}(\xi)$ — алгебричне доповнення елемента $\int_0^T t^{j-1}f_q(t,\xi)dt$, $j,q=1,2$, у визначнику $\Delta(\xi)$.

Наведемо приклади задач, для яких умова (12) виконується або порушується.

Приклад 1. Визначник $\Delta(\xi)$ задачі з умовами (2) для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=0 \qquad (14)$$

обчислюється за формулою $\Delta(\xi)=$

$$=\frac{2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)}{\xi^4}\left[\xi T\,\mathrm{ch}(\xi T/2)-2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)\right], \qquad (15)$$

якщо $\xi\neq 0$ і $\Delta(0)=T^4/12$. Оскільки $t\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,t\neq 0$ для всіх $t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то з формули (15) випливає, що для задачі (2), (14) умова (12) виконується.

Твердження 1. *Якщо корені λ_1, λ_2 многочлена $L(\lambda,i)$ є дійсними і різними, то визначник $\Delta(\xi)$ є відмінним від нуля.*

Доведення. Дійсно, розглянемо визначник (10) як функцію параметра T. Диференціюючи його за змінною T, одержимо

$$\frac{d\Delta(\xi)}{dT}=\begin{vmatrix} f_1(T,\xi) & f_2(T,\xi)\\ \int_0^T tf_1(t,\xi)dt & \int_0^T tf_2(t,\xi)dt\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \int_0^T f_1(t,\xi)dt & \int_0^T f_2(t,\xi)dt\\ Tf_1(T,\xi) & Tf_2(T,\xi)\end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^T t(f_1(T,\xi)f_2(t,\xi)-f_2(T,\xi)f_1(t,\xi))dt+$$

$$+\int_0^T T(f_1(t,\xi)f_2(T,\xi)-f_2(t,\xi)f_1(T,\xi))dt=$$

$$=\int_0^T (T-t)\delta(\xi;t,T)dt, \qquad (16)$$

де

$$\delta(\xi;t_1,t_2)=\begin{vmatrix} f_1(t_1,\xi) & f_2(t_1,\xi)\\ f_1(t_2,\xi) & f_2(t_2,\xi)\end{vmatrix},$$

де $t_1,t_2\in[0,T]$. Із формул (7) випливає, що $\delta(0;t_1,t_2)=(t_2-t_1)$ і

$$\delta(\xi;t_1,t_2)=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_1\xi} & e^{\lambda_2 t_1\xi}\\ e^{\lambda_1 t_2\xi} & e^{\lambda_2 t_2\xi}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_1\xi}\left(e^{\lambda_2(t_2-t_1)\xi}-e^{\lambda_1(t_2-t_1)\xi}\right)}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi},$$

якщо $\xi\neq 0$. Оскільки числа λ_1, λ_2 є дійсними і різними, то з отриманих формул для $\delta(\xi;t_1,t_2)$ випливає, що $\delta(\xi;t,T)>0$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}$ та $t\in[0;T)$. Тому з рівності (16) отримаємо, що $\frac{d\Delta(\xi)}{dT}>0$ при $T>0$, $\xi\in\mathbb{R}$, тобто для кожного $\xi\in\mathbb{R}$ функція $\Delta(\xi)$ є зростаючою функцією $T\geq 0$. Оскільки $\Delta(\xi)|_{T=0}=0$, то з попередньої нерівності випливає, що $\Delta(\xi)>\Delta(\xi)|_{T=0}=0$ при $T>0$.

5. Умови коректності задачі. Дослідимо питання про приналежність функції

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde u(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}f_q(t,\xi)\tilde\varphi_j(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (17)$$

до простору $\mathbf{H}^2_{\alpha_2}$, якщо $\Delta(\xi)\neq 0$ і $\varphi_j\in\mathbf{H}_{\alpha_1}$, $j=1,2$, для деякого $\alpha_1\geq 0$. Для цього встановимо оцінки для функцій $\tilde u(t,\xi)$ та їхніх похідних за t до порядку 2 включно. Зауважимо, що

$$\tilde u(t,0)=\left(\frac{4}{T}-\frac{6t}{T^2}\right)\tilde\varphi_1(0)+\left(\frac{12t}{T^3}-\frac{6}{T^2}\right)\tilde\varphi_2(0),$$

$$\tilde u(t,\xi)=\sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)}e^{\lambda_q\xi t}\tilde\varphi_j(\xi), \quad \xi\neq 0, \qquad (18)$$

де

$$\Gamma(\xi)=\begin{vmatrix}\gamma_{11}(\xi) & \gamma_{12}(\xi)\\ \gamma_{21}(\xi) & \gamma_{22}(\xi)\end{vmatrix}, \qquad (19)$$

$\gamma_{11}(\xi)=\frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}$, $\gamma_{12}(\xi)=\frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}$,

$$\gamma_{21}(\xi)=\frac{1}{\lambda_1\xi}\left[Te^{\lambda_1\xi T}-\frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}\right],$$

$$\gamma_{22}(\xi)=\frac{1}{\lambda_2\xi}\left[Te^{\lambda_2\xi T}-\frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}\right],$$

а $\Gamma_{j,q}(\xi)$ — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Gamma(\xi)$. Відзначимо, що $\Gamma(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)\xi\Delta(\xi)$, $\xi\neq 0$, тому умови $\Delta(\xi)\neq 0$ та $\Gamma(\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$ є рівносильними.

Лема 1. *Нехай* $0<\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_1(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\ \xi>0, \tag{20}$$
$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_2(1+|\xi|)^{r-1},\ \xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Доведення. Оскільки

$$\Gamma_{j,q}(\xi)=\int_0^T t^{2-j}e^{\lambda_{3-q}\xi t}dt, j,q=1,2,$$

то при $0<\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2$ для досить великих $|\xi|$ виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}|e^{\lambda_q\xi t}|\leq\begin{cases}e^{Re\,\lambda_q\xi T}, & q=1,2,\quad \xi>0,\\ 1, \quad q=1,2, & \xi<0,\end{cases}$$

$$|\Gamma_{j,q}(\xi)|\leq\int_0^T t^{2-j}e^{Re\,\lambda_{3-q}\xi t}dt\leq$$
$$\leq\begin{cases}C_3(1+|\xi|)^{-1}e^{Re\,\lambda_{3-q}\xi T}, & \xi>0,\\ C_3(1+|\xi|)^{-1}, & \xi<0,\end{cases}$$

де $j,q=1,2$, а отже,

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(\lambda_q\xi\right)^r e^{\lambda_q\xi t}\right|\leq$$
$$\leq C_3(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_{3-q}+\lambda_q)\xi T}=$$
$$=C_3(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\ \xi>0, \tag{21}$$
$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(\lambda_q\xi\right)^r e^{\lambda_q\xi t}\right|\leq$$
$$\leq C_3(1+|\xi|)^{r-1},\ \xi<0. \tag{22}$$

де $j,q=1,2$, $r=0,1,2$. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1<0<\operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_4(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,\lambda_2\xi T},\ \xi>0, \tag{23}$$
$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_4(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,\lambda_1\xi T}, \xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Лема 3. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2<0$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_5(1+|\xi|)^{r-1}\ \xi>0, \tag{24}$$
$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$
$$\leq C_5(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\quad \xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Доведення лем 2, 3 проводиться аналогічно до доведення леми 1.

Лема 4. *Для довільних квадратних матриць* $A=\|a_{jq}\|_{j,q=1}^2$, $B=\|b_{jq}\|_{j,q=1}^2$ *з комплексними елементами виконується нерівність*

$$|\det A-\det B|\leq 4m_1M,$$

де

$$m_1=\max_{1\leq j,q\leq 2}|a_{jq}-b_{jq}|,$$
$$M=\max_{1\leq j,q\leq 2}\{|a_{jq}|,|b_{jq}|\}.$$

Доведення. Оцінка леми випливає з того, що $|\det A-\det B|=$

$$=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}|=$$
$$=|a_{22}(a_{11}-b_{11})+b_{11}(a_{22}-b_{22})-$$
$$-a_{2,1}(a_{1,2}-b_{12})+b_{12}(a_{21}-b_{21})|\leq 4m_1M.$$

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай* $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq$$

$$\geq \begin{cases} C_6(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi > R, \\ C_6(1+|\xi|)^{-3}, & \xi < -R. \end{cases} \tag{25}$$

Доведення. Для $\xi \neq 0$ розглянемо матриці $A(\xi) = \|a_{jq}(\xi)\|_{j,q=1}^2$, $B(\xi) = \|b_{jq}(\xi)\|_{j,q=1}^2$, такі, що $A(\xi) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi} & \frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi} \\ \frac{1}{\lambda_1\xi}\left[T - \frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}\right] & \frac{1}{\lambda_2\xi}\left[T - \frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}\right] \end{pmatrix},$$

$$B(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1\xi T}}{\lambda_1\xi} & \frac{e^{\lambda_2\xi T}}{\lambda_2\xi} \\ -\frac{e^{\lambda_1\xi T}}{\lambda_1^2\xi^2} & -\frac{e^{\lambda_2\xi T}}{\lambda_2^2\xi^2} \end{pmatrix}.$$

Визначник $\Gamma(\xi)$ не зміниться, якщо від його другого рядка відняти його перший рядок, домножений на T. Тому $\det A(\xi) = \Gamma(\xi)$. Зауважимо, що

$$\det A(\xi) = \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_1(\xi),$$

$$\det B(\xi) = \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det B_1,$$

де

$$A_1(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\xi) & \alpha_{12}(\xi) \\ \alpha_{21}(\xi) & \alpha_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\alpha_{11}(\xi) = 1 - e^{-\lambda_1\xi T}, \alpha_{12}(\xi) = 1 - e^{-\lambda_2\xi T},$$

$$\alpha_{21}(\xi) = -\frac{1}{\lambda_1} + \left(\xi T + \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1\xi T},$$

$$\alpha_{22}(\xi) = -\frac{1}{\lambda_2} + \left(\xi T + \frac{1}{\lambda_2}\right)e^{-\lambda_2\xi T}.$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Добре відомо, що для довільного $\rho > 0$ існують такі числа $C(\rho), R(\rho) > 0$, що для всіх $x > R(\rho)$ виконується оцінка $x^\rho e^{-x} \leq C(\rho)$. Враховуючи лему 4, звідси дістанемо, що існує таке число $R > 0$, що для всіх $\xi > R$ справджується нерівність

$$|\det A_1(\xi)| \geq \frac{1}{2}|\det B_1| = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2|\lambda_1\lambda_2|}.$$

Таким чином,

$$|\Gamma(\xi)| = |\det A(\xi)| \geq \frac{|\lambda_2-\lambda_1|e^{Re(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{2|\lambda_1^2\lambda_2^2\xi^3|} \geq$$

$$\geq C_7(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},$$

для всіх $\xi > R$, тобто верхня нерівність у формулі (25) встановлена.

Розглянемо тепер випадок, коли $\xi < 0$. У цьому випадку $\Gamma(\xi) = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_2(\xi)$, де

$$A_2(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\xi) & \beta_{12}(\xi) \\ \beta_{21}(\xi) & \beta_{22}(\xi) \end{pmatrix}.$$

$$\beta_{11}(\xi) = 1 - e^{\lambda_1\xi T}, \beta_{12}(\xi) = 1 - e^{\lambda_2\xi T},$$

$$\beta_{21}(\xi) = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\xi T - \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1\xi T},$$

$$\beta_{22}(\xi) = \frac{1}{\lambda_2} + \left(\xi T - \frac{1}{\lambda_2}\right)e^{\lambda_2\xi T}.$$

Використовуючи лему 4 дістанемо, що існує таке $R_1 > 0$, що для всіх $\xi < -R_1$ справджується нерівність $|\det A_2(\xi)| \geq \frac{1}{2}|\det B_1| = \frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{2|\lambda_1\lambda_2|}$. Отже,

$$|\Gamma(\xi)| = \left|\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_2(\xi)\right| \geq$$

$$\geq \frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{2|\lambda_1^2\lambda_2^2\xi^3|} \geq C_8(1+|\xi|)^{-3},$$

для всіх $\xi < -R_1$, тобто і нижня нерівність у формулі (25) встановлена. Лему доведено.

Лема 6. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R_2 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_2$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq \begin{cases} C_9(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,\lambda_2\xi T}, & \xi > R_2, \\ C_9(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,\lambda_1\xi T}, & \xi < -R_2. \end{cases} \tag{27}$$

Лема 7. *Нехай* $0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 < \mathrm{Re}\,\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R_3 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_3$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq \begin{cases} C_{10}(1+|\xi|)^{-3}, \xi > R_3, \\ C_{10}(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, \xi < -R_3. \end{cases} \quad (28)$$

Доведення лем 6, 7 проводиться аналогічно до доведення леми 5.

Тепер ми можемо встановити основний результат даної роботи про існування єдиного розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай корені* λ_1, λ_2 *многочлена* $L(\lambda, i)$ *мають різні ненульові дійсні частини. Якщо* $\Delta(\xi) \neq 0$ *для всіх* $\xi \neq 0$, *то задача* (1), (2) *є* (α_1, α_2)*-коректною, де* $\alpha_2 = \alpha_1 - 2$, $\alpha_1 \geq 2$.

Доведення. Оскільки корені λ_1, λ_2 мають різні ненульові дійсні частини, то з лем 1, 2, 3 та лем 5, 6 випливає, що існує число $R_4 > 0$ таке, що для всіх $\xi, |\xi| > R_4$, виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)} \left(e^{\lambda_q \xi t}\right)^r \right| \leq C_{11}(1+|\xi|)^{r+2}, \quad (29)$$

де $j, q = 1, 2$, $r = 0, 1, 2$. Тоді з формул (18), (29) дістаємо, що для всіх $\xi, |\xi| > R_4$,

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\partial^r \tilde{u}(t,\xi)}{\partial t^r} \right| \leq C_{12}(1+|\xi|)^{r+2} \times$$

$$\times \left(|\tilde{\varphi}_1(\xi)| + |\tilde{\varphi}_2(\xi)|\right), \quad (30)$$

де $j, q = 1, 2, r = 0, 1, 2$. Оскільки $\Delta(\xi) \neq 0$ для всіх $\xi \neq 0$ і $\Delta(\xi)$ – неперервна функція параметра ξ, то існує стала $C_{13} > 0$ така, що $|\Delta(\xi)| \geq C_{13} > 0$ для всіх $\xi \in [-R_4; R_4]$. Тому оцінки (30) зберігають свою силу і для $|\xi| \leq R_4$.

Тоді з формул (17), (18), (30) та означення норми в просторі $\mathbf{H}^2_{\alpha_2}$ отримуємо

$$\|u(t,x); \mathbf{H}^2_{\alpha_2}\| =$$

$$= \sum_{r=0}^{2} \max_{t\in[0,T]} \left\| \partial^r u(t,x)/\partial t^r; \mathbf{H}_{\alpha_2 - r} \right\| \leq$$

$$\leq C_{14} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2\alpha_2+4} |\tilde{\varphi}_1(\xi)|^2 d\xi} +$$

$$+ C_{14} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2\alpha_2+4} |\tilde{\varphi}_2(\xi)|^2 d\xi} \leq$$

$$\leq C_{14}\|\varphi_1; \mathbf{H}_{\alpha_1}\| + C_{14}\|\varphi_2; \mathbf{H}_{\alpha_1}\|,$$

якщо $\alpha_1 \geq \alpha_2 + 2$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

2. *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – 40, № 4. – С. 547–564.

3. *Ільків В.С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісник ДУ „Львівська політехніка". Прикл. матем. – 1999. – № 364. – С. 318–323.

4. *Камынин В.Л., Саролди М.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998, 38, № 10. – С. 1683–1691.

5. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 1. – С. 32–39.

6. *Медвідь Оксана, Симотюк Михайло.* Задача з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.

7. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.

8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с. – Ч. 2. – 432 с.

9. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264с.

10. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 11. – С. 1925–1935.

11. *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. сборник. – 1995. – 186, № 11. – С. 123–144.

12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

13. *Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I. V., Nytrebych Z.M.* Problem with integral condition for evolution equation // Journal of Mathematics and Applications 2015. – Vol. 38. – P. 71–76.