

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м.Одеса

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТЕПЕНЕВОГО ВИДУ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Встановлюються умови існування деяких типів розв'язків степеневого виду у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

The conditions of existence of some types of power-mode solutions of a binomial non-autonomous ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities are established.

1. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \quad (1.1)$$

де $n \geq 3$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_j : \Delta Y_j \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функція порядку σ_j , $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j – деякий односторонній окіл точки Y_j , Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty^1$.

Функції φ_j ($j = \overline{0, n-1}$) (см.[1], гл.I, §1, с.10) можуть бути зображені у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (1.2)$$

де $L_j : \Delta Y_j \rightarrow]0, +\infty[$ ($j = \overline{0, n-1}$) – повільно змінні при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функції. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій для будь-якого $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (1.3)$$

причому дані граничні співвідношення виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[c, d] \in]0, +\infty[$.

У цій роботі вважаючи, що для деякого $k \in \{3, \dots, n\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{y^{(i)} \rightarrow Y_i} \varphi_i(y^{(i)}) = \varphi_i^0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ i = n - k + 1, n - 2, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

¹При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що усі числа з околу ΔY_j одного знаку.

встановлюються умови існування у рівняння (1.1) розв'язків, для яких

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y^{(n-k)}(t) = c \quad (c \neq 0), \quad (1.5)$$

а також асимптотичні при $t \rightarrow +\infty$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n - 1$ включно.

Очевидно, що в силу (1.5) для таких розв'язків мають місце наступні асимптотичні при $t \rightarrow +\infty$ зображення

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!} [1 + o(1)] \quad (l = \overline{1, n-k}) \quad (1.6)$$

і $c \in \Delta Y_{n-k}$.

З вигляду рівняння (1.1) також зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак у деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ ($l = \overline{1, k-1}$) є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ і, в силу (1.5), можуть прямувати лише до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Тому для існування таких розв'язків насамперед необхідно, щоб

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при } j = \overline{n-k+2, n}. \quad (1.7)$$

Для визначення знаків чисел з околів ΔY_j ($j = \overline{0, n-1}$) будемо вважати, що

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j - \\ & \text{правий окіл } 0 \text{ або } Y_j = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j - \\ & \text{лівий окіл } 0 \text{ або } Y_j = -\infty \end{cases}$$

і тоді з (1.6) випливає, що при $j = \overline{1, n-k}$

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \mu_{n-k} < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

Ці умови являються необхідними для існування у рівняння (1.1) розв'язків, для яких має місце (1.5).

Отримані тут результати доповнюють наслідок 8.2 [2, Гл. II, §8, стр. 207] і теорему 16.9 [2, Гл. IV, §16, стр. 321] з монографії І.Кігурадзе і Т.Чантурія для диференціальних рівнянь n -го порядку загального вигляду.

2. Основні результати

Для визначеності будемо вважати, що

$$\Delta Y_{n-1} = \begin{cases} [y_{n-1}^0, Y_{n-1}[, & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{лівий окіл } Y_{n-1}; \\]Y_{n-1}, y_{n-1}^0], & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{правий окіл } Y_{n-1}, \end{cases}$$

і введемо функцію $\Phi(y)$ наступним чином

$$\Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)},$$

$$B = \begin{cases} Y_{n-1}, & \text{якщо } \int_{y_{n-1}^0}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} < +\infty; \\ y_{n-1}^0, & \text{якщо } \int_{y_{n-1}^0}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Оскільки $\Phi'(y) > 0$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$, то $\Phi : \Delta Y_{n-1} \rightarrow \Delta Z_{n-1}$, де

$$\Delta Z_{n-1} =$$

$$= \begin{cases} [z_{n-1}^0, Z_{n-1}[, & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} = [y_{n-1}^0, Y_{n-1}[; \\]Z_{n-1}, z_{n-1}^0], & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} =]Y_{n-1}, y_{n-1}^0], \end{cases}$$

$Z_{n-1} = \lim_{y \rightarrow Y_{n-1}} \Phi(y)$, $z_{n-1}^0 = \Phi(y_{n-1}^0)$, і для неї існує зворотня функція $\Phi^{-1} : \Delta Z_{n-1} \rightarrow \Delta Y_{n-1}$.

Крім того, з врахуванням (1.4) покладемо

$$K = \left(\varphi_{n-k}(c) \prod_{i=n-k+1}^{n-2} \varphi_i^0 \times \prod_{j=1}^{n-k} \left| \frac{c}{(n-k-j+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}},$$

і при $Y_{j-1} = \pm\infty$ ($j = \overline{1, n-k}$) введемо функцію $W_0(t) = \Phi^{-1}(\alpha I(t))$, де

$$I(t) = \int_A^t p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j \tau^{n-k-j}) d\tau,$$

$$A = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \int_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j \tau^{n-k-j}) d\tau < +\infty; \\ a_0, & \text{якщо } \int_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j \tau^{n-k-j}) d\tau = \pm\infty, \end{cases}$$

$a_0 \geq a$ таке, що $\mu_{j-1} t^{n-k-j+1} \in \Delta Y_{j-1}$ ($j = \overline{1, n-k}$) при $t \geq a_0$.

Теорема. *Нехай $k \in \{3, \dots, n\}$, $\sigma_{n-1} \neq 1$ і справджується (1.4). Для існування у рівняння (1.1) розв'язків, для яких має місце (1.5), необхідно і достатньо, щоб $c \in \Delta Y_{n-k}$ і виконувались умови (1.6) – (1.8), а також*

$$\begin{aligned} A &= +\infty, \text{ якщо } B = 0, \\ A &= a_0, \text{ якщо } B = y_{n-1}^0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\alpha y_{n-1}^0 (1 - \sigma_{n-1}) I(t) > 0 \text{ при } t \in]a_0, +\infty[\quad (2.2)$$

$$\int_{a_1}^{+\infty} |W_m(\tau)| d\tau < +\infty \quad (m = \overline{0, k-2}), \quad (2.3)$$

де $a_1 \geq a_0$ таке, що $\alpha I(t) \in \Delta Z_{n-1}$ при $t \geq a_1$, і $W_m(t)$ визначаються з врахуванням вигляду $W_0(t)$ наступним чином

$$W_m(t) = \int_{+\infty}^t W_{m-1}(s) ds \quad (m = \overline{1, k-2}).$$

Більш того, для кожного $c \in \Delta Y_{n-k}$ при виконанні цих умов у випадку $\text{sign} I(t) = 1$ при $t > a_0$ існує $(n-k+1)$ -параметрична, а у випадку $\text{sign} I(t) = -1$ при $t > a_0$ – $(n-k)$ -параметрична сім'я таких розв'язків і для кожного з них окрім (1.6) мають місце при $t \rightarrow +\infty$ наступні асимптотичні зображення

$$\begin{aligned} y^{(n-k)}(t) &= c + KW_{k-1}(s)[1 + o(1)], \\ y^{(j)}(t) &= KW_{n-j-1}(t)[1 + o(1)] \\ (j &= \overline{n-k+1, n-1}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{де } W_{k-1}(t) = \int_{+\infty}^t W_{k-2}(s) ds.$$

Доведення теореми. Необхідність. Нехай у рівняння (1.1) існує розв'язок y , заданий на $[t_0, +\infty[$ та який задовольняє (1.5). Тоді $c \in \Delta Y_{n-k}$, справджуються (1.7)-(1.8) і мають місце асимптотичні при $t \rightarrow +\infty$ формули (1.6).

Враховуючи зображення (1.2) правильно змінних при $t \rightarrow +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ ($j = \overline{0, n-k}$) і справедливості виконання співвідношень (1.3) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, при $t \rightarrow +\infty$ маємо

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1} \left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!} [1+o(1)] \right) &= \\ &= \left| \frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!} [1+o(1)] \right|^{\sigma_{j-1}} \times \\ &\times L_{j-1} \left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!} [1+o(1)] \right) = \\ &= \left| \frac{c}{(n-k-j+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} \times \\ &\times t^{n-k-j+1} L_{j-1} (\mu_{j-1} t^{n-k-j+1}) [1+o(1)] = \\ &= \left| \frac{c}{(n-k-j+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} \times \\ &\times \varphi_{j-1} (\mu_{j-1} t^{n-k-j+1}) [1+o(1)] \quad (j = \overline{1, n-k+1}). \end{aligned}$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (1.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} &= \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} p(t) \times \\ &\times \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j (\mu_j \tau^{n-k-j}) [1+o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши дане співвідношення на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, та зробивши в інтегралі, що стоїть зліва, заміну змінної $s = y^{(n-1)}(t)$, маємо

$$\begin{aligned} \int_{y^{(n-1)}(t_*)}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} &= \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} \times \\ &\times \int_{t_*}^t p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j (\mu_j \tau^{n-k-j}) [1+o(1)] d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки при $t \rightarrow +\infty$ $y^{(n-1)}(t) \rightarrow Y_{n-1} = 0$, отримаємо, що інтеграли $\int_{y^{(n-1)}(t_*)}^0 \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}$

та $\int_{t_*}^{+\infty} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j (\mu_j \tau^{n-k-j}) d\tau$ збігаються та розбігаються одночасно. Тому справджується (2.1). Крім того, з врахування вигляду функції Φ та її властивостей, а також пропонування 6 з монографії [3] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, при $t \rightarrow +\infty$ маємо

$$\Phi(y^{(n-1)}(t)) = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t) [1+o(1)]. \quad (2.5)$$

Використовуючи пропонування 2 з [4] (Appendix, p.123) та враховуючи те, що φ_{n-1} – правильно змінна при $y \rightarrow 0$ функція порядку $\sigma_{n-1} \neq 1$, отримаємо, що $\Phi(y) \sim \frac{1}{1-\sigma_{n-1}} \frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}$ при $y \rightarrow 0$ і тоді

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}}{\Phi(y)} = 1 - \sigma_{n-1}.$$

Звідси випливає, що $\text{sign}\Phi(y) = \text{sign}(y_{n-1}^0(1 - \sigma_{n-1}))$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$ та з врахуванням (2.5) маємо справедливості знакової умови (2.2). Крім того, отримали, що $\Phi(y)$ – правильно змінна при $y \rightarrow 0$ функція порядку $1 - \sigma_{n-1}$ і, в силу властивостей правильно змінних функцій та умови $\sigma_{n-1} \neq 1$, зворотня до неї функція $\Phi^{-1}(z)$ – правильно змінна при $z \rightarrow Z_{n-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \Phi(y)$ функція порядку $\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}$. Тоді, з врахуванням теореми про рівномірну збіжність (див.[1], гл.I, §1, с.10), з (2.5) випливає, що при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(t) &= \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t) [1+o(1)]) = \\ &= \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t)) [1+o(1)] = \\ &= K \Phi^{-1}(\alpha I(t)) [1+o(1)], \end{aligned}$$

тобто має місце останнє зображення з (2.4). Проінтегрувавши його на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_1, t_0\}$, отримаємо

$$y^{(n-2)}(t) = y^{(n-2)}(t_*) + K \int_{t_*}^t \Phi^{-1}(\alpha I(\tau)) [1+o(1)] d\tau.$$

Оскільки при $t \rightarrow +\infty$ $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2} = 0$, то інтеграл, що стоїть зправа, при $t \rightarrow +\infty$ має скінченну границю і тоді для $(n-2)$ -ї похідної розв'язку має місце зображення з (2.4) і справджується (2.3) при $m = 0$.

Продовжуючи міркування аналогічним чином, встановлюємо справедливість всіх останніх $k - 1$ зображень з (2.4) та збіжність інтегралів (2.3) при всіх $m = \overline{0, k - 3}$. Проінтегрувавши отримане співвідношення для $(n - k + 1)$ -ї похідної на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_*) + K \int_{t_* + \infty}^t \int_{+\infty}^{t_{k-2}} \dots \int_{+\infty}^{t_1} \Phi^{-1}(\alpha I(\tau)) [1 + o(1)] dt_1 \dots dt_{k-2} d\tau. \quad (2.6)$$

В силу припущення (1.5)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_* + \infty}^t \int_{+\infty}^{t_{k-2}} \dots \int_{+\infty}^{t_1} \Phi^{-1}(\alpha I(\tau)) [1 + o(1)] dt_1 \dots dt_{k-2} d\tau = \text{const}$$

та за ознакою порівняння справджується (2.3) при $m = k - 2$, а співвідношення (2.6) може бути переписано у вигляді 1-го зображення з (2.4).

Достатність. Припустивши, що справджуються умови (1.7) – (1.8), (2.1) – (2.3), виберемо довільним чином число $c \in \Delta Y_{n-k}$.

Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$\begin{aligned} y^{(j-1)}(t) &= \frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!} [1 + v_j(t)] \quad (j = \overline{1, n-k}), \\ y^{(n-k)}(t) &= c + KW_{k-1}(t)[1 + v_{n-k+1}(t)], \\ y^{(j)}(t) &= KW_{n-j-1}(t)[1 + v_{j+1}(t)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v'_j = \frac{n-k-j+1}{t} [-v_j + v_{j+1}] \quad (j = \overline{1, n-k-1}), \\ v'_{n-k} = -\frac{1}{t} v_{n-k} + \frac{KW_{k-1}(t)}{tc} v_{n-k+1} + \frac{KW_{k-1}(t)}{tc}, \\ v'_j = \frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)} [-v_j + v_{j+1}] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}), \\ v'_n = \frac{1}{W_0(t)} [-W'_0(t)[1 + v_n] + \\ + \frac{\alpha}{K} p(t) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!} [1 + v_{j+1}] \right) \times \\ \times \varphi_{n-k}(c + KW_{k-1}(t)[1 + v_{n-k+1}]) \times \\ \times \prod_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_j (KW_{n-j-1}(t)[1 + v_{j+1}])] \end{cases} \quad (2.8)$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \leq \frac{1}{2}, j = \overline{1, n}\}$ і $t_0 \geq a_1$ вибране з врахуванням (2.3) таким чином, щоб при $t > t_0$ і $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ виконувались умови:

$$\begin{aligned} \frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!} [1 + v_{j+1}] &\in \Delta Y_j \quad (j = \overline{0, n-k-1}), \\ c + KW_{k-1}(t)[1 + v_{n-k+1}] &\in \Delta Y_{n-k}, \\ KW_{n-j-1}(t)[1 + v_{j+1}] &\in \Delta Y_j \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}). \end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ ($j = \overline{0, n-k-1}$) можуть бути представлені у вигляді (1.2), співвідношення (1.3) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізьку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$ і справджується (1.4), а також в силу неперервності функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$ на ΔY_{n-k} і (2.3), маємо

$$\begin{aligned} \varphi_j \left(\frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!} [1 + v_{j+1}] \right) &= \left| \frac{c}{(n-k-j)!} \right|^{\sigma_j} \times \\ &\times \varphi_j(\mu_j t^{n-k-j})(1 + v_{j+1})^{\sigma_j} (1 + R_j(t, v_{j+1})) \\ &(j = \overline{0, n-k-1}), \\ \varphi_j(KW_{n-j-1}(t)[1 + v_{j+1}]) &= \\ = \varphi_j^0(1 + R_j(t, v_{j+1})) &(j = \overline{n-k+1, n-2}), \\ \varphi_{n-1}(KW_0(t)[1 + v_n]) &= K^{\sigma_{n-1}} \varphi_{n-1}(W_0(t)) \times \\ \times (1 + v_n)^{\sigma_{n-1}} (1 + R_{n-1}(t, v_n)), \\ \varphi_{n-k}(c + KW_{k-1}(t)[1 + v_{n-k+1}]) &= \\ = \varphi_{n-k}(c)(1 + R_{n-k}(t, v_{n-k+1})), \end{aligned}$$

де функції $R_j(t, v_{j+1})$ ($j = \overline{0, n-1}$) прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно по $v_{j+1} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Крім того,

$$W'_0(t) = \varphi_{n-1}(W_0(t)) \alpha K I'(t).$$

В силу цих зображень систему рівнянь (2.8) переписемо у вигляді

$$\begin{cases} v'_j = \frac{n-k-j+1}{t} [-v_j + v_{j+1}] \quad (j = \overline{1, n-k-1}), \\ v'_{n-k} = -\frac{1}{t} v_{n-k} + \frac{KW_{k-1}(t)}{tc} v_{n-k+1} + \frac{KW_{k-1}(t)}{tc}, \\ v'_j = \frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)} [-v_j + v_{j+1}] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}), \\ v'_n = \frac{W'_0(t)}{W_0(t)} \left[\sum_{j=1}^{n-k} \sigma_{j-1} v_j + (\sigma_{n-1} - 1) v_n + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^2 Y_{nk}(t, v_1, \dots, v_n) \right], \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{де } Y_{n1}(t, v_1, \dots, v_n) &= \\ &= R(t, v_1, \dots, v_n) (1 + v_n)^{\sigma_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-k} (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}}, \end{aligned}$$

$R(t, v_1, \dots, v_n) = (1 + R_0(t, v_1)) \dots (1 + R_{n-1}(t, v_n)) - 1$ при $t \rightarrow +\infty$ прямує до нуля рівномірно по $v_i \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ($i = \overline{1, n}$),

$$Y_{n2}(t, v_1, \dots, v_n) = (1 + v_n)^{\sigma_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-k} (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}} - \sigma_{n-1} v_n \prod_{j=1}^{n-k} \sigma_{j-1} v_j - 1.$$

Уважаючи в неї

$$\begin{aligned} v_j &= \delta z_j \quad (j = \overline{1, n-k}), \\ v_j &= z_j \quad (j = \overline{n-k+1, n}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

де $\delta > 0$ вибрано так, щоб справджувалась нерівність $0 < \delta \sum_{j=0}^{n-k-1} |\sigma_j| < |\sigma_{n-1} - 1|$, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z'_j = \frac{n-k-j+1}{t} [-z_j + z_{j+1}] \quad (j = \overline{1, n-k-1}), \\ z'_{n-k} = -\frac{1}{t} z_{n-k} + \frac{KW_{k-1}(t)}{\delta t c} z_{n-k+1} + \frac{KW_{k-1}(t)}{\delta t c}, \\ z'_{n-k+1} = \frac{W_{k-2}(t)}{W_{k-1}(t)} [-z_{n-k+1} + \delta z_{n-k}], \\ z'_j = \frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)} [-z_j + z_{j+1}] \quad (j = \overline{n-k+2, n-1}), \\ z'_n = \frac{W'_0(t)}{W_0(t)} \left[\delta \sum_{j=1}^{n-k} \sigma_{j-1} z_j + (\sigma_{n-1} - 1) z_n + \sum_{k=1}^2 Z_{nk}(t, z_1, \dots, z_n) \right] \end{cases} \quad (2.11)$$

в якій $Z_{nk}(t, z_1, \dots, z_n) = Y_{nk}(t, \frac{1}{\delta} v_1, \dots, \frac{1}{\delta} v_{n-k}, v_{n-k+1}, \dots, v_n)$ ($k = 1, 2$) і такі, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_{n1}(t, z_1, \dots, z_n) = 0$ рівномірно по $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_l^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_j| \leq l, j = \overline{1, n}\}$, $l = \min\{\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2}\}$,

$\lim_{|z_1| + \dots + |z_n| \rightarrow 0} \frac{\partial Z_{n2}(t, z_1, \dots, z_n)}{\partial z_k} = 0$ ($k = \overline{1, n}$) рівномірно по $t \in [t_0, +\infty[$.

В силу вигляду $W_j(t)$ ($j = \overline{1, k-1}$) й (2.3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_j(t) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{W_{n-j-1}(t) dt}{W_{n-j}(t)} &= \pm \infty \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}), \\ \int_{t_0}^{+\infty} \frac{W'_0(t) dt}{W_0(t)} &= \pm \infty \end{aligned}$$

та при $t > t_0$

$$\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)} < 0 \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}),$$

$$\begin{aligned} \frac{W'_0(t)}{W_0(t)} (\sigma_{n-1} - 1) &< 0, \quad \text{якщо } \text{sign} I(t) = 1, \\ \frac{W'_0(t)}{W_0(t)} (\sigma_{n-1} - 1) &> 0, \quad \text{якщо } \text{sign} I(t) = -1. \end{aligned}$$

При зазначеному виборі числа δ в силу описаних вище умов для системи (2.11) виконані всі умови теореми 1.2 з роботи [5]. Тоді в неї існує q -параметрична сім'я прямих до нуля при $t \rightarrow +\infty$ розв'язків $(z_j)_{j=1}^n : [t_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_l^n$ ($t_1 \geq t_0$), де

$$q = \begin{cases} n - k + 1, & \text{якщо } \text{sign} I(t) = 1, \\ n - k, & \text{якщо } \text{sign} I(t) = -1, \end{cases}$$

кожному з яких в силу перетворень (2.7) і (2.10) відповідає розв'язок вигляду (1.5) диференціального рівняння (1.1), що допускає асимптотичні зображення (2.4). Теорема доведена.

3. Висновки

У даній роботі для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n -го порядку з правильно змінними нелінійностями (1.1) у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ ($i = n-k+1, n-2$) при $y^{(i)} \rightarrow Y_i$ дорівнюють додатним сталим, отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків, для яких $(n-k)$ -а похідна прямує до відмінної від нуля сталої при $t \rightarrow +\infty$.

При цьому були встановлені асимптотичні при $t \rightarrow +\infty$ формули для похідних таких типів розв'язків до порядку $n-1$ включно та з'ясоване питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. Кизурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
3. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.
4. Maric V. Regular variation and differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series). — Springer-Verlag, New York LLC, 2000. — 140 p.
5. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. — 2010. — 62, N1. — С. 52-80.