

## ЗНАХОДЖЕННЯ ДВОХ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ТЕЛЕГРАФНОМУ РІВНЯННІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлюємо однозначну розв'язність оберненої задачі Коші для рівняння  $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$ , з дробовими похідними, заданими узагальненими функціями  $F_0$  та у правих частинах початкових умов. Задача полягає у знаходженні трійки функцій: узагальненого розв'язку  $u$  (неперервного й інтегровного за часом в узагальненому сенсі) та невідомих неперервних та інтегровних коефіцієнтів  $b(t)$ ,  $r(t)$ .

We establish the unique solvability of an inverse Cauchy problem for the equation  $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$ , with fractional derivatives, given distributions  $F_0$  and in right-hand sides of the initial conditions. The problem is to find the generalized solution  $u$  (continuous and integrable in time in generalized sense) and unknown continuous and integrable coefficients  $b(t)$ ,  $r(t)$ .

**Вступ.** У [1, 2] досліджена задача Коші для певних класів параболічних рівнянь із псевдодиференціальним оператором у просторах узагальнених функцій типу Шварца. У [3–7] доведені теореми існування і єдиності, а також одержано зображення за допомогою функцій Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь із дробовою похідною за часом.

Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у багатьох галузях науки і техніки.

Обернені крайові задачі на визначення або головного коефіцієнта, або правої частини, або порядку дробової похідної у рівнянні, або невідомої крайової умови вивчались у [8–14] та інших працях, розв'язність прямої й оберненої задач для одного класу рівнянь із псевдодиференціальним оператором встановлено у [15]. Обернені задачі з невідомими молодшими коефіцієнтами у рівняннях із дробовими похідними мало вивчені.

У даній статті ми досліджуємо існування і єдиність розв'язку  $(u, r, b)$  оберненої задачі Коші

$$u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = F_1(x),$$

$$u_t(x, 0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$(u(\cdot, t), \varphi_1(\cdot)) = \Phi_1(t), \quad (3)$$

$$(u(\cdot, t), \varphi_2(\cdot)) = \Phi_2(t), \quad t \in (0, T]$$

з дробовими похідними Рімана-Ліувіля  $u_t^{(\alpha)}$ ,  $u_t^{(\beta)}$  та  $(-\Delta)^{\gamma/2}u$ , визначеною з використанням перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\gamma/2}u] = |\lambda|^\gamma \mathcal{F}[u]$$

при умові

$$(L) \quad \alpha \in (1, 2), \beta \in (0, 1), \gamma > \alpha, \\ \min\{n, 2, \gamma\} > (n - 1)/2,$$

де  $F_0, F_1, F_2$  – задані узагальнені функції,  $g, \Phi_1, \Phi_2, \varphi_1, \varphi_2$  – задані гладкі функції, через  $(f, \varphi)$  позначено значення узагальненої функції  $f$  на основній функції  $\varphi$ ,  $a^2$  – додатна стала.

Зауважимо, що однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння (1) при  $b(t) = r(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$  у просторах узагальнених функцій було доведено в [16, 17], зокрема, у [17] – у просторах беселевих потенціалів при  $\alpha \in (0, 1]$ .

**1. Позначення, формулювання задачі й допоміжні результати.** Нехай  $\mathbb{N}$  – множина натуральних чисел,  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup 0$ ,  $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$\mathcal{D}(\bar{Q})$  – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями і таких, що  $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$  – простір функцій із  $C^k(\mathbb{R}^n)$  з компактними носіями,  $\|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\kappa| \leq k} \max_{x \in \text{supp} \varphi} |D^\kappa \varphi(x)|$ , де  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ ,  $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|\kappa| = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ ,  $D^\kappa \varphi(x) = \frac{\partial^{|\kappa|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\kappa_1} \dots \partial x_n^{\kappa_n}}$ ,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  і  $\mathcal{D}'(\bar{Q})$  – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  і  $\mathcal{D}(\bar{Q})$ . Зауважимо, що  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  – простір узагальнених функцій із компактними носіями. Нехай

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_+(R) &= \{f \in \mathcal{D}'(R) : f = 0, t < 0\}, \\ \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) &= \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot, t), \varphi(\cdot)) \in C[0, T] \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}, \\ \mathcal{D}'_{C,L}(Q) &= \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot, t), \varphi(\cdot)) \in \\ &\quad C(0, T] \cap L(0, T) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

Через  $f * g$  позначаємо згортку узагальнених функцій  $f$  і  $g$ , використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda), & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \leq 0, \end{cases}$$

де  $\Gamma(z)$  – гама-функція,  $\theta(t)$  – функція Хевісайда. Зауважимо, що

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувіля порядку  $\beta > 0$  визначена формулою

$$v_t^{(\beta)}(x, t) = f_{-\beta}(t) * v(x, t),$$

а похідна Капуто – формулою

$$D_t^\alpha v(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} v(\tau) d\tau$$

при  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Позначаємо

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\gamma}(Q) &= \{v \in C(Q) : \\ &\quad (-\Delta)^{\gamma/2} v, D_t^\alpha v \in C(Q)\}, \\ C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) &= \{v \in C_{\alpha,\gamma}(Q) \mid v, v_t \in C(\bar{Q})\}, \\ (Lv)(x, t) &= v_t^{(\alpha)}(x, t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x, t), \\ (L^{reg}v)(x, t) &= D_t^\alpha v(x, t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x, t), \\ (\widehat{L}v)(x, t) &= f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x, t) + \\ &\quad + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned}$$

де при  $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$

$$f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x, t) = (f_{-\alpha}(\tau), v(x, t + \tau)).$$

Правильна формула Гріна [16]:

$$\begin{aligned} &\int_Q v(y, \tau) (\widehat{L}\psi)(y, \tau) dy d\tau = \\ &= \int_Q (L^{reg}v)(y, \tau) \psi(y, \tau) dy d\tau - \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} v(y, 0) dy \int_0^T f_{2-\alpha}(\tau) \psi_\tau(y, \tau) d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} v_t(y, 0) dy \int_0^T f_{2-\alpha}(\tau) \psi(y, \tau) d\tau \\ &\quad \forall v \in C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) \quad \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}). \end{aligned}$$

**Припущення:**

- (A1)  $F_0, F_1, F_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  
 $s \in [0, \min\{(\alpha - \beta)/2, 1 - \beta\})$ ,  
 $t^s g \in C[0, T]$ ,  
(A2)  $\ln t \Phi_j, t^\beta \ln t \Phi_j^{(\beta)}, t^s \Phi_j^{(\alpha)} \in C[0, T]$ ,  
 $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $d(t) :=$   
 $t^\beta(1 + |\ln t|)[\Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)]$ ,  
 $\inf_{t \in (0, T]} |d(t)| = d_0 > 0$ .

**Означення 1.** Трійка функцій  $(u, r, b) \in U = U(T) := \mathcal{D}'_{C,L}(Q) \times (C(0, T] \cap L(0, T))^2$ , яка задовольняє тотожність

$$\begin{aligned} (u, \widehat{L}\psi) &= \int_0^T g(t) (F_0(\cdot), \psi(\cdot, t)) dt + \\ &+ \int_0^T r(t) (u_t^{(\beta)}(\cdot, t), \psi(\cdot, t)) dt + \\ &+ \int_0^T b(t) (u(\cdot, t), \psi(\cdot, t)) dt + \\ &+ \sum_{j=1}^2 (F_j(x) f_{j-\alpha}(t), \psi(x, t)) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \end{aligned} \tag{4}$$

та умови (3), називається розв'язком задачі (1)-(3).

Зауважимо, що у подібному формулюванні в [18] встановлена однозначна розв'язність у просторі  $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C(0, T]$  задачі Коші

для рівняння (1) при  $b(t) = 0$  та одній додатковій умові в (3). Тут розглядаємо задачу з двома невідомими коефіцієнтами та коли регулярні дані задачі можуть мати слабкі особливості при  $t = 0$ .

Для доведення розв'язності задачі використовуємо метод функції Гріна.

**Означення 2.** Вектор-функція  $(G_0(x, t), G_1(x, t), G_2(x, t))$  така, що при достатньо регулярних  $g_0, g_1, g_2$  функція

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau) g_0(y, \tau) dy + \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x - y, t) g_j(y) dy, \quad (x, t) \in \bar{Q} \quad (5)$$

є класичним (із  $C_{\alpha, \gamma}(\bar{Q})$ ) розв'язком задачі Коші

$$L^{reg} u(x, t) = g_0(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

називається вектор-функцією Гріна цієї задачі. Позначаємо

$$(\widehat{G}_0 \varphi)(y, \tau) = \int_{\tau}^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau) \varphi(x, t) dx dt,$$

$$(\widehat{G}_j \varphi)(y) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x - y, t) \varphi(x, t) dx dt, \quad j = 1, 2,$$

$$(\widehat{G}_j \varphi)(y, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x - y, t) \varphi(x) dx, \quad j = 0, 1, 2.$$

**Лема 1** [16]. Правильні наступні співвідношення:

$$G_j(x, t) = (f_{j-\alpha}(\tau), G_0(x, t - \tau)), \quad (x, t) \in Q, \quad j = 1, 2,$$

$$(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, \tau) = \psi(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \bar{Q},$$

$$(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y) = (f_{j-\alpha}(\tau), \psi(y, \tau)),$$

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}). \quad (6)$$

**Лема 2.** Вектор-функція Гріна задачі Коші (1), (2) існує.

*Доведення.* У [5, 16] одержано зображення компонент вектор-функції Гріна

$$G_0(x, t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-1}}{|x|^n} \times H_{2,3}^{2,1} \left( \frac{|x|^\gamma}{2\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (\alpha, \alpha) \\ (1, 1) & (n/2, \gamma/2) & (1, \gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$G_j(x, t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-1}}{|x|^n} \times H_{2,3}^{2,1} \left( \frac{|x|^\gamma}{2\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (j, \alpha) \\ (1, 1) & (n/2, \gamma/2) & (1, \gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$j = 1, 2, \text{ де } H_{p,q}^{m,n} \left( z \middle| \begin{matrix} (a_1, \gamma_1) & \dots & (a_p, \gamma_p) \\ (b_1, \alpha_1) & \dots & (b_q, \alpha_q) \end{matrix} \right)$$

–H-функція Фокса [19, 20].

Для функцій  $G_j, j = 0, 1, 2$  маємо

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i = 2 - \alpha > 0,$$

$$\Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i = \gamma - \alpha > 0.$$

Тому за припущення (L) за теоремою 1.1 [20] ці функції існують для всіх  $x \neq 0, t > 0$ .

**Лема 3.** Для всіх  $k \in \mathbb{Z}_+$ , мультиіндексів  $\kappa, |\kappa| = k, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$D_y^\kappa (\widehat{G}_j \varphi) \in C(Q), \quad D_y^\kappa (\widehat{G}_j \varphi)_t^{(\beta)} \in C(Q),$$

$j = 0, 1, 2$ , і правильні наступні оцінки:

$$|D_y^\kappa (\widehat{G}_0 \varphi)(y, t)| \leq ct^{\alpha-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$|D_y^\kappa (\widehat{G}_j \varphi)(y, t)| \leq ct^{j-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$|D_y^\kappa (\widehat{G}_0 \varphi)_t^{(\beta)}(y, t)| \leq c_\beta t^{\alpha-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$|D_y^\kappa (\widehat{G}_j \varphi)_t^{(\beta)}(y, t)| \leq c_\beta t^{j-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad (y, t) \in Q, \quad j = 1, 2.$$

Тут і далі  $b_i, c, c_\beta, C_i, C_i^*, c_i, c_i^* (i \in \mathbb{Z}_+)$  – додатні сталі.

*Доведення.* Лема доводиться з використанням оцінок компонент вектор-функції Гріна. Вони були отримані в роботі [16] на базі властивостей та асимптотики Н-функцій Фокса [20]. Враховуючи теорему 1.7 із [20], одержано оцінки

$$|G_0(x, t)| \leq \frac{C_0 t^{\alpha-1}}{|x|^n}, \quad |G_j(x, t)| \leq \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^n},$$

$$j = 1, 2 \quad \text{при} \quad |x|^\gamma > t^\alpha, \quad (7)$$

а за наслідком з теореми 1.12 [20] у випадку

$$\gamma \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{N} \quad (8)$$

одержано оцінки при  $|x|^\gamma < t^\alpha$ :

$$|G_0(x, t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\gamma}}, \quad \text{якщо} \quad \gamma < n, \quad (9)$$

$$|G_0(x, t)| \leq C_0^* t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \quad \text{для} \quad \gamma \geq n, \quad (10)$$

$$|G_j(x, t)| \leq \frac{C_j^* t^{j-1-\alpha}}{|x|^{n-\gamma}} \quad \text{при} \quad \gamma < n, \quad (11)$$

$$|G_j(x, t)| \leq C_j^* t^{j-1-n\alpha/\gamma} \quad \text{для} \quad \gamma \geq n, j = 1, 2. \quad (12)$$

У загальному випадку правильні такі ж оцінки, але з множниками  $\ln^N \frac{t^\alpha}{|x|^\gamma}$  при деяких натуральних  $N$  у формулах (9)–(12). Не обмежуючи загальності, далі розглядаємо випадок (8).

Із наведених оцінок випливає інтегровність функцій  $G_j(x, t)$  в  $\mathbb{R}^n$  для кожного  $t > 0, j = 0, 1, 2$ . Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_j(x-y, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} G_j(x-y, t),$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2$$

і подібно для похідних вищих порядків, то для всіх  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  та мультиіндексів  $\kappa$

$$D^\kappa(\mathcal{G}_j\varphi)(y, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y, t) D^\kappa\varphi(x) dx$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{j,\kappa}(y, t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y, t) D^\kappa\varphi(x) dx, \quad j = 0, 1, 2.$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що  $D^\kappa(\widehat{G}_j\varphi) \in C(Q)$  для довільного

мультиіндексу  $\kappa$ , а отже,  $\widehat{G}_j\varphi \in C^\infty(Q)$  при  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), j = 0, 1, 2$ .

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів  $v_{j,\kappa}(y, t)$  для кожного  $\kappa$ .

Враховуючи оцінки (7), (9) функції  $G_0(x-y, t)$ , фінітність та обмеженість функцій  $D^\kappa\varphi(x, t)$  в  $Q_T$ , у випадку  $|\kappa| = k, \gamma < n$  одержуємо

$$|v_{0,\kappa}(y, t)| \leq$$

$$\leq \left[ \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} |G_0(x-y, t)| \cdot |D^\kappa\varphi(x)| dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} |G_0(x-y, t)| \cdot |D^\kappa\varphi(x)| dx \right] \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,0} \left[ \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t|x-y|^{n-\gamma}} dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{t^{\alpha-1}|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \right] dt \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,1} \left[ \frac{1}{t} \int_0^{t^\alpha/\gamma} r^{\gamma-1} dr + t^{\alpha-1} |\ln t| \right] \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

а з (7), (10) при  $\gamma \geq n$

$$|v_{0,\kappa}(y, t)| \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,0} \left[ t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} |D^\kappa\varphi(x)| dx + \right.$$

$$\left. + t^{\alpha-1} \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \right] dt \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,1} \left[ t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int_0^{t^\alpha/\gamma} r^{n-1} dr + \right.$$

$$\left. + t^{\alpha-1} |\ln t| \right] \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Тут і далі  $d_{j,\kappa,0} = \max\{C_j, C_j^*\}, d_{j,\kappa,k}, d_{j,\kappa,k}$  ( $j = 0, 1, 2, k \in \mathbb{Z}_+$ ) – додатні сталі.

Аналогічно, враховуючи оцінки (7), (11) функцій  $G_j(x-y, t), j = 1, 2$ , при  $\gamma < n$  одержуємо

$$\begin{aligned}
& \left| v_{j,\kappa}(y, t) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} G_j(x-y, t) D^\kappa \varphi(x) dx + \right. \\
& \left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} G_j(x-y, t) D^\kappa \varphi(x) dx \right| \leq \\
& \leq d_{j,\kappa,0} \left[ t^{j-1-\alpha} \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}} dx + \right. \\
& \quad \left. + t^{j-1} \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\
& \leq d_{j,\kappa,1} \left[ t^{j-1-\alpha} \int_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{\gamma-1} dr + \right. \\
& \quad \left. + t^{j-1} \int_{t^{\alpha/\gamma}}^{+\infty} |D^\kappa \varphi(x)| r^{-1} dr \right] \leq \\
& \leq d_{j,\kappa,2} t^{j-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad k = |\kappa|.
\end{aligned}$$

У випадку  $\gamma \geq n$  з врахуванням оцінок (7), (12), матимемо

$$\begin{aligned}
|v_{j,\kappa}(y, t)| & \leq d_{j,\kappa,0} t^{j-1} \left[ \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{t^{n\alpha/\gamma}} dx + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\
& \leq d_{j,\kappa,1} t^{j-1} [1 + |\ln t|] \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\
& \leq d_{j,\kappa,2} t^{j-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Використовуючи властивість 2.3 [20]

$$\begin{aligned}
& H_{p,q}^{m,n} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{1}{z} & (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ \hline & (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{array} \right) = \\
& = H_{q,p}^{n,m} \left( \begin{array}{c|ccc} & (1-b_1, \beta_1) & \dots & (1-b_q, \beta_q) \\ \hline z & (1-a_1, \alpha_1) & \dots & (1-a_p, \alpha_p) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Н-функції Фокса, можемо подати функції  $G_j(x, t)$  як

$$\begin{aligned}
G_0(x, t) & = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-1}}{|x|^n} \\
H_{3,2}^{1,2} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{2\gamma a^2}{|x|^\gamma} t^\alpha & (0, 1) & (1-n/2, \gamma/2) & (0, \gamma/2) \\ \hline & (0, 1) & (1-\alpha, \alpha) & \end{array} \right), \\
G_j(x, t) & = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-1}}{|x|^n} \\
H_{3,2}^{1,2} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{2\gamma a^2}{|x|^\gamma} t^\alpha & (0, 1) & (1-n/2, \gamma/2) & (0, \gamma/2) \\ \hline & (0, 1) & (1-j, \alpha) & \end{array} \right), \\
& \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

За теоремою 2.7 із [20] про дробове диференціювання Н-функцій

$$\begin{aligned}
f_{1-\beta}(t) * G_0(x, t) & = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-\beta}}{|x|^n} \times \\
& \times H_{3,2}^{1,2} \left( \begin{array}{c|ccc} t^\alpha & (0, 1) & (1-n/2, \gamma/2) & (0, \gamma/2) \\ \hline & (0, 1) & (\beta-\alpha, \alpha) & \end{array} \right).
\end{aligned}$$

За властивістю 2.8 [20] про диференціювання знаходимо

$$\begin{aligned}
(f_{1-\beta}(t) * G_0)_t & = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n} \times \\
& \times H_{2,3}^{2,1} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{|x|^\gamma}{2\gamma a^2 t^\alpha} & (1, 1) & (\alpha-\beta, \alpha) & \\ \hline & (1, 1) & (n/2, \gamma/2) & (1, \gamma/2) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Подібно обчислюємо

$$\begin{aligned}
f_{1-\beta}(t) * G_j(x, t) & = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-\beta}}{|x|^n} \times \\
& \times H_{3,2}^{1,2} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{2\gamma a^2}{|x|^\gamma} t^\alpha & (0, 1) & (1-n/2, \gamma/2) & (0, \gamma/2) \\ \hline & (0, 1) & (\beta-j, \alpha) & \end{array} \right), \\
\frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_j(x, t)) & = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-\beta-1}}{|x|^n} \times \\
& \times H_{3,2}^{1,2} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{2\gamma a^2}{|x|^\gamma} t^\alpha & (0, 1) & (1-n/2, \gamma/2) & (0, \gamma/2) \\ \hline & (0, 1) & (1+\beta-j, \alpha) & \end{array} \right) \\
& = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-\beta-1}}{|x|^n} \times \\
& \times H_{2,3}^{2,1} \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{|x|^\gamma}{2\gamma a^2 t^\alpha} & (1, 1) & (j-\beta, \alpha) & \\ \hline & (1, 1) & (n/2, \gamma/2) & (1, \gamma/2) \end{array} \right), \\
& \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Для всіх функцій  $\frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_j(x, t))$  ( $j = 0, 1, 2$ ) маємо  $\Delta^* = \gamma - \alpha > 0$ ,  $a^* = 2 - \alpha > 0$ . Тому за теоремою 1.1 із [20] ці функції існують для всіх  $x \neq 0$ ,  $t > 0$ .

Враховуючи теорему 1.7 із [20], знаходимо оцінки

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_0(x, t)) \right| \leq \frac{c_0 t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_j(x, t)) \right| \leq \frac{c_j t^{j-\beta-1}}{|x|^n}, \quad j = 1, 2$$

при  $|x|^\gamma > t^\alpha$ .

За наслідком з теореми 1.12 [20] одержуємо оцінки при  $|x|^\gamma < t^\alpha$ :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_0(x, t)) \right| \leq \\
& \leq \frac{c_0^* t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n} \left( \frac{|x|^\gamma}{t^\alpha} \right)^{\min\{1, n/\gamma\}} = \\
& = \begin{cases} \frac{c_0^*}{t^{\beta+1} |x|^{n-\gamma}}, & \gamma < n \\ \frac{c_0^*}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}}, & \gamma \geq n \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_j(x, t)) \right| \leq \\ & \leq \frac{c_j^* t^{j-1-\beta}}{|x|^n} \left( \frac{|x|^\gamma}{t^\alpha} \right)^{\min\{1, n/\gamma\}} = \\ & = \begin{cases} \frac{c_j^*}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x|^{n-\gamma}}, & \gamma < n \\ \frac{c_j^*}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}}, & \gamma \geq n \end{cases}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned} w_{j,\gamma}(y, t) &= ((f_{1-\beta}(t) * G_j)_t \varphi)(y, t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (f_{1-\beta}(t) * G_j(x-y, t)) D^\gamma \varphi(x) dx, \\ & \quad j = 0, 1, 2, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Використовуюючи знайдені вище оцінки, у випадку  $\gamma < n$  матимемо

$$\begin{aligned} & |w_{0,\gamma}(y, t)| \leq \\ & \leq d_{0,\gamma,3} \left[ \frac{1}{t^{\beta+1}} \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\gamma \varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}} dx + \right. \\ & \quad \left. + t^{\alpha-\beta-1} \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\gamma \varphi(x,t)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\ & \leq d_{0,\gamma,4} t^{\alpha-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq d_{\gamma,5} t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ & |w_{j,\gamma}(y, t)| \leq \\ & \leq d_{j,\gamma,3} \left[ \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\gamma \varphi(x)|}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x-y|^{n-\gamma}} dx + \right. \\ & \quad \left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{t^{j-\beta-1} |D^\gamma \varphi(x,t)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\ & \leq d_{j,\gamma,4} t^{j-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & d_{j,\gamma,5} t^{j-\beta-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

а у випадку  $\gamma \geq n$

$$\begin{aligned} & |w_{0,\gamma}(y, t)| \leq \\ & \leq d_{0,\gamma,3} \left[ \frac{1}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}} \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} |D^\gamma \varphi(x)| dx + \right. \\ & \quad \left. + t^{\alpha-\beta-1} \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\gamma \varphi(x,t)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\ & \leq d_{0,\gamma,4} t^{\alpha-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq d_{0,\gamma,5} t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ & |w_{j,\gamma}(y, t)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq d_{j,\gamma,3} \left[ \int_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\gamma \varphi(x)|}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}} dx + \right. \\ & \quad \left. + \int_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{t^{j-\beta-1} |D^\gamma \varphi(x,t)|}{|x-y|^n} dx \right] \leq \\ & \leq d_{j,\gamma,4} t^{j-\beta-1} (1 + |\ln t|) \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq d_{j,\gamma,5} t^{j-\beta-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ & \quad j = 1, 2, \quad k = |\gamma|. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** *Нехай виконані припущення (L), (A1) при  $s \in [0, \alpha - \beta]$ . Тоді існує єдиний розв'язок  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$  задачі (1), (2) із  $r(t) = b(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$  такий, що  $u_t^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ . Він визначений формулою*

$$\begin{aligned} (u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) &= h_\varphi(t) \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad t &\in (0, T], \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} h_\varphi(t) &= \sum_{j=1}^2 (F_j(\cdot), (\widehat{G}_j \varphi)(\cdot, t)) + \\ &+ \int_0^t g(\tau) (F_0(\cdot), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)) d\tau, \quad t \in (0, T]. \end{aligned}$$

*Доведення.* Використовуємо схему доведення теореми 3 із [21]. Узагальнені функції  $F_j$  мають скінченні порядки сингулярностей  $s(F_j) \leq k_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ : існують числа  $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$  і функції  $g_{j\kappa} \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\kappa| \leq k_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  такі, що

$$\begin{aligned} (F_j, \varphi) &= \sum_{|\kappa| \leq k_j} \int_{\mathbb{R}^n} g_{j\kappa}(y) D^\kappa \varphi(y) dy \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad j &= 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Використовуючи зображення (14) та лему 3, переконуємось, що для довільної  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(\tau) (F_0(y), (\widehat{G}_0 \varphi)(y, t, \tau)) d\tau = \\ & = \sum_{|\kappa| \leq k_0} \int_0^t g(\tau) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g_{0\alpha}(y) D_y^{\kappa} (\widehat{G}_0 \varphi)(y, t, \tau) dy \right] d\tau, \quad + \sum_{j=1}^2 \left( F_j, \widehat{G}_j(\widehat{L}\psi) \right).$$

$$\begin{aligned} & \left( F_j(y), (\widehat{G}_j \varphi)(y, t) \right) = \\ & = \sum_{|\kappa| \leq k_1} \int_{\mathbb{R}^n} g_{1\kappa}(y) D_y^{\kappa} (\widehat{G}_1 \varphi)(y, t) dy \end{aligned}$$

та правильні оцінки

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t g(\tau) \left( F_0(y), (\widehat{G}_0 \varphi)(y, t, \tau) \right) d\tau \right| \leq \\ & \leq c_0 \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)} \times \\ & \times \int_0^t \tau^s |g(\tau)| \tau^{-s} (t - \tau)^{\alpha-1-\varepsilon} d\tau \\ & \leq b_0 t^{\alpha-s-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| (F_j(y), (\widehat{G}_j \varphi)(y, t)) \right| \leq b_j t^{j-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)}, \\ & t \in (0, T], \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Отож, при  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  права частина (13) (функція  $h_\varphi$ ) належить  $C(0, T] \cap L(0, T)$ .

Покажемо, що функція (13) є розв'язком задачі в сенсі означення 1. Для довільної  $\psi \in \mathcal{D}(\overline{Q})$  знаходимо

$$\begin{aligned} & (u, (\widehat{L}\psi)) = \int_0^T \left( u(\cdot, t), (\widehat{L}\psi)(\cdot, t) \right) dt = \\ & \int_0^T \left( \int_0^t g(\tau) \left( F_0(y), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau) \right) d\tau \right) dt \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^T \left( F_j(y), (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y, t) \right) dt = \\ & = \left( F_0(y), \int_0^T g(\tau) d\tau \int_{\tau}^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau) dt \right) + \\ & + \sum_{j=1}^2 \left( F_j(y), \int_0^T (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y, t) dt \right) = \\ & = \left( F_0(y) \cdot g(\tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, \tau) \right) + \end{aligned}$$

Скориставшись формулами (6), для функції  $u$ , заданої формулою (13), і довільної  $\psi \in \mathcal{D}(\overline{Q})$  одержуємо тотожність (4) при  $r(t) = b(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ . За означенням 1 функція (13) є розв'язком задачі шуканого класу.

Єдиність розв'язку задачі доводиться, як у [21].

Покажемо, що  $u_t^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ .

Використовуючи зображення (13), для довільної  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  одержуємо

$$\begin{aligned} & \left( u_t^{(\beta)}(\cdot, t), \varphi(\cdot) \right) = h_\varphi^{(\beta)}(t) = \\ & = \sum_{j=1}^2 \left( F_j(\cdot), (\widehat{G}_j \varphi)_t^{(\beta)}(\cdot, t) \right) + \\ & + f_{-\beta}(t) * \int_0^t g(\tau) \left( F_0(\cdot), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau) \right) d\tau = \\ & = \sum_{j=1}^2 \left( F_j(\cdot), ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_j) \varphi)_t(\cdot, t) \right) + \\ & + \left( F_0(\cdot), f_{1-\beta}(t) * \frac{\partial}{\partial t} (g(t) * (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t)) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^2 \left( F_j(\cdot), ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_j)_t \varphi)(\cdot, t) \right) + \\ & + \left( F_0(\cdot), g(t) * ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_0)_t \varphi)(\cdot, t) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^2 \left( F_j(\cdot), ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_j)_t \varphi)(\cdot, t) \right) + \\ & + \left( F_0(\cdot), g(t) * ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_0)_t \varphi)(\cdot, t) \right). \end{aligned}$$

За лемою 3 та формулою (14) при  $j = 0$  для довільної  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} & \left| \left( F_0(\cdot), g(t) * ((f_{1-\beta}(t) * \widehat{G}_0)_t \varphi)(\cdot, t) \right) \right| = \\ & \left| \int_0^t g(\tau) \left( F_0(y), (\widehat{G}_0 \varphi)_t^{(\beta)}(y, t - \tau) \right) d\tau \right| \leq \\ & \leq c_0 \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^t \tau^s |g(\tau)| (t-\tau)^{\alpha-\beta-1-\varepsilon} \tau^{-s} d\tau \\ & \leq \widehat{b}_0 t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \left( F_j(\cdot), ((f_{1-\beta}(t) * G_j)_t \varphi)(\cdot, t) \right) \right| \leq \\ & \leq \widehat{b}_j t^{j-\beta-1-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Отже, також  $h_\varphi^{(\beta)} \in C(0, T] \cap L(0, T)$  при  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Наслідок 1.** Нехай виконані припущення теореми 1 при  $s = 0$  та  $F_1 = 0$ . Тоді існує єдиний розв'язок  $u$  задачі (1), (2) із  $r(t) = b(t) = 0, t \in [0, T]$  такий, що  $u, u_t^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ .

**2. Теореми існування та єдиності для оберненої задачі.** За теоремою 1 за припущень (L), (A1) маємо  $h_\varphi, h_\varphi^{(\beta)} \in C(0, T] \cap L(0, T)$  для всіх  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  і будь-який розв'язок  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$  рівняння

$$(u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = h_\varphi(t) + \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^t r(\tau) \left( u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t-\tau) \right) d\tau + \\ & + \int_0^t b(\tau) \left( u(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t-\tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), t \in (0, T],$$

при  $r(t) = b(t) = 0$  є розв'язком задачі (1), (2). При  $r(t) \neq 0$  для довільної  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^t r(\tau) \left( u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) \right) d\tau = \\ & = \int_0^T r(\tau) d\tau \int_\tau^T \left( u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) \right) dt = \\ & = \int_0^T r(\tau) \left( u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), \int_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) dt \right) d\tau \\ & = \int_0^T r(\tau) \left( u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, \tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$= \int_0^T r(t) \left( u_t^{(\beta)}(\cdot, t), \psi(\cdot, t) \right) dt.$$

Аналогічно при  $b(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^t b(\tau) \left( u(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) \right) d\tau \\ & = \int_0^T b(\tau) d\tau \int_\tau^T \left( u(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) \right) dt \\ & = \int_0^T b(\tau) \left( u(\cdot, \tau), \int_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, t-\tau) dt \right) d\tau \\ & = \int_0^T b(\tau) \left( u(\cdot, \tau), (\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot, \tau) \right) d\tau \\ & = \int_0^T b(t) \left( u(\cdot, t), \psi(\cdot, t) \right) dt. \end{aligned}$$

Отже, права частина (15) задовольняє тождество (4) і за означенням будь-який розв'язок  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$  рівняння (15) є розв'язком задачі (1), (2).

З рівняння (1) отримуємо

$$\begin{aligned} & \left( u_t^{(\alpha)}(\cdot, t), \varphi_j(\cdot) \right) + a^2 \left( u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_j(\cdot) \right) = \\ & = r(t) \left( u_t^{(\beta)}(\cdot, t), \varphi_j \right) + \\ & + b(t) \left( u(\cdot, t), \varphi_j \right) + g(t) \left( F_0, \varphi_j \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

а використовувачи умови (3), матимемо

$$\begin{aligned} & \Phi_1^{(\alpha)}(t) = -a^2 \left( u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1(\cdot) \right) \\ & + r(t) \Phi_1^{(\beta)}(t) + b(t) \Phi_1(t) + g(t) \left( F_0, \varphi_1 \right), \\ & \Phi_2^{(\alpha)}(t) = -a^2 \left( u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2(\cdot) \right) \\ & + r(t) \Phi_2^{(\beta)}(t) + b(t) \Phi_2(t) + g(t) \left( F_0, \varphi_2 \right). \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи припущення (A2), знаходимо неперервні й інтегровні функції

$$\begin{aligned} r(t) = & \left[ \left( \Phi_1^{(\alpha)}(t) + a^2 \left( u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1(\cdot) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - g(t) \left( F_0, \varphi_1 \right) \right) \Phi_2(t) - \right. \end{aligned} \quad (16)$$



$$\begin{aligned}
& -\left(\Phi_2^{(\alpha)}(t) + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)) - \right. \\
& \left. -g(t)(F_0, \varphi_2)\right)\Phi_1(t)]t^\beta(1 + |\ln t|)[d(t)]^{-1}, \\
b(t) = & \left[-\left(\Phi_1^{(\alpha)}(t) + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)) - \right. \right. \\
& \left. -g(t)(F_0, \varphi_1)\right)\Phi_2^{(\beta)}(t) + \\
& +\left(\Phi_2^{(\alpha)}(t) + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)) - \right. \\
& \left. -g(t)(F_0, \varphi_2)\right)\Phi_1^{(\beta)}(t)]t^\beta(1 + |\ln t|)[d(t)]^{-1}, \\
& t \in (0, T].
\end{aligned}$$

Відзначимо, що  $r(t) = O(t^{\beta-s}(1 + |\ln t|))$ ,  $b(t) = O(t^{-s})$ ,  $t \rightarrow +0$  та інтегровні на  $(0, T)$  при  $0 \leq s < 1 - \beta$ .

Позначимо через  $H_1(u, t)$ ,  $H_2(u, t)$  праві частини (16), підставимо їх у (15) відповідно замість  $r(t)$ ,  $b(t)$ . Отримуємо нелінійне операторне рівняння

$$(u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = h_\varphi(t) + \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t H_1(u, \tau)(u_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t - \tau))d\tau + \\
& + \int_0^t H_2(u, \tau)(u(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t - \tau))d\tau
\end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), t \in (0, T]$$

щодо невідомої  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ . Навпаки, якщо  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$  – розв’язок рівняння (17),  $r, b$  визначені формулою (16), то з наведеного вище і доведення теореми 1 випливає, що трійка  $(u, r, b)$  задовольняє задачу (1)–(3).

**Теорема 2.** *За припущень (L), (A1), (A2) існує  $T^* \in (0, T]$  (відповідно  $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0, T^*]$ ) і розв’язок  $(u, r, b) \in U(T^*)$  задачі (1)–(3): функція  $u$  – розв’язок рівняння (17),  $r$  та  $b$  визначені формулами (16).*

*Доведення.* Згідно з наведеним, за припущень теореми трійка  $(u, r, b) \in U$  така, що функція  $u \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q)$  є розв’язком (17), а  $r(t), b(t)$  визначені згідно з (16), є розв’язком задачі (1)–(3). Достатньо довести розв’язність рівняння (17) в  $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ .

Із доведення теореми 1 для всіх  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)$  із  $K \in \mathbb{Z}_+$ ,  $K \geq \max\{k_0, k_1, k_2\}$  отримуємо

$$t^s \left| \int_0^t g(\tau)(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t - \tau))d\tau \right| \leq \quad (18)$$

$$\leq b_0 t^{\alpha-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)},$$

$$t^s |h_\varphi(t)| \leq$$

$$[b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon}] \|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}. \quad (19)$$

Нехай при  $R > 0$

$$M_{R,s} = M_{R,s}(Q) = \left\{ v \in \mathcal{D}'_{C,L}(Q) : \right.$$

$$\left. \|v\|_s = \sup_{t \in (0, T]} \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \frac{t^s |(v(\cdot, t), \varphi(\cdot))|}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \leq R \right\}.$$

Визначаємо оператор

$$P : \mathcal{D}'_{C,L}(Q) \rightarrow \mathcal{D}'(Q),$$

$$((Pv)(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = h_\varphi(t)$$

$$+ \int_0^t H_1(v, \tau)(v_\tau^{(\beta)}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t - \tau))d\tau$$

$$+ \int_0^t H_2(v, \tau)(v(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t - \tau))d\tau$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n).$$

Використовуючи принцип Банаха, доведемо розв’язність рівняння (17), тобто рівняння

$$u = Pu, \quad u \in M_{R,s}(Q) \subset \mathcal{D}'_{C,L}(Q).$$

Спочатку покажемо, що існують  $R > 0$ ,  $T^* \in (0, T]$ ,  $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0, T^*]$  і  $M_{R,s}^* = M_{R,s}(Q^*)$  такі, що  $P : M_{R,s}^* \rightarrow M_{R,s}^*$ .

Для кожної  $v \in M_{R,s}$  маємо

$$\tau^s |(v(\cdot, \tau), a^2(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot))| \leq$$

$$\leq R \|(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} := B_j R,$$

тому

$$\tau^s |H_j(v, \tau)| \leq \frac{A_j + B_j R}{d_0}, \quad j = 1, 2,$$

де

$$A_1 = \sup_{\tau \in (0, T]} \tau^s \left| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0, \varphi_1)] \Phi_2(\tau) - [\Phi_2^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0, \varphi_2)] \Phi_1(\tau) \right| \tau^\beta (1 + |\ln \tau|),$$

$$A_2 = - \sup_{\tau \in (0, T]} \tau^s \left| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0, \varphi_1)] \Phi_2^{(\beta)}(\tau) - [\Phi_2^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0, \varphi_2)] \Phi_1^{(\beta)}(\tau) \right| \tau^\beta (1 + |\ln \tau|).$$

Звідси, враховуючи (18), (19) і лему 3, для всіх  $v \in M_{R,s}$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \in (0, T]$  при  $0 \leq s < \frac{\alpha-\beta}{2}$ ,  $\varepsilon < \min\{\alpha - \beta - s, s\}$  отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{t^s |((Pv)(\cdot, t), \varphi(\cdot))|}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \leq \\ & b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} + \\ & \quad + \frac{(A_1 + B_1 R) R t^s}{d_0} \times \\ & \times \int_0^t \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \tau^{-2s} d\tau}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \\ & \quad + \frac{(A_2 + B_2 R) R t^s}{d_0} \times \\ & \times \int_0^t \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \tau^{-2s} d\tau}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \\ & \leq b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} + \\ & + \frac{(A_1 + B_1 R) R t^s}{d_0} \int_0^t c_K (t - \tau)^{\alpha-\beta-\varepsilon-1} \tau^{-2s} d\tau + \\ & + \frac{(A_2 + B_2 R) R t^s}{d_0} \int_0^t c_K (t - \tau)^{\alpha-\varepsilon-1} \tau^{-2s} d\tau \leq \\ & \leq b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} + \\ & + \frac{(A_1 + B_1 R) R}{d_0} t^{\alpha-\beta-\varepsilon} + \frac{(A_2 + B_2 R) R}{f} t^{\alpha-\varepsilon} \leq \\ & \leq t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon} (q_0 R^2 + q_1 R) + q_2, \end{aligned}$$

де  $q_j$  ( $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) – додатні сталі.

Для виконання нерівності

$$t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon} (q_0 R^2 + q_1 R) + q_2 \leq R \quad \forall t \in [0, T^*] \quad (20)$$

із деякими  $R > 0$ ,  $T^* \in (0, T]$ , спочатку виберемо  $R \geq \max\{1, 2q_2\}$ . Тоді (20) випливає з нерівності

$$(q_0 + q_1) R t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0, T^*] \quad (21)$$

при вибраному  $R$ , правильної при  $T^* \leq \min\{T, [2(q_0 + q_1)R]^{-\frac{1}{\alpha-\beta-s-\varepsilon}}\}$ . Ми довели існування  $R \geq \max\{1, 2q_2\}$ ,  $T^* \in (0, T]$  таких, що  $P : M_{R,s}^* \rightarrow M_{R,s}^*$  при  $s \in [0, \frac{\alpha-\beta}{2}]$ .

Тепер покажемо, що  $P$  є стисним оператором на  $M_{R,s}^*$ . Для  $v_1, v_2 \in M_{R,s}^*$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \in [0, T^*]$  маємо

$$\begin{aligned} & \frac{t^s |((Pv_1)(\cdot, t) - ((Pv_2)(\cdot, t), \varphi(\cdot)))|}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} = \\ & = \frac{t^s}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \left| \int_0^t H_1(v_2, \tau) \times \right. \\ & \times (v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)) d\tau + \\ & \quad + \int_0^t (H_1(v_1, \tau) - H_1(v_2, \tau)) \times \\ & \quad \times (v_1(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)) d\tau \left. + \right. \\ & \quad + \frac{t^s}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \left| \int_0^t H_2(v_2, \tau) \times \right. \\ & \times (v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)) d\tau + \\ & \quad + \int_0^t (H_2(v_1, \tau) - H_2(v_2, \tau)) \times \\ & \quad \times (v_1(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)) d\tau \left. \right| \leq \\ & \leq \frac{(A_1 + B_1 R) t^s}{d_0} \times \\ & \times \int_0^t \frac{|(v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau))|}{\|(\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \\ & \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \tau^{-s} d\tau +}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \\ & \quad + \frac{a^2 t^s R \|(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{d_0} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t \frac{|(v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1(\cdot))|}{\|(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \times \\
& \times \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \tau^{-s} d\tau + \\
& + \frac{(A_2 + B_2 R)t^s}{d_0} \times \\
& \times \int_0^t \frac{|(v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau))|}{\|(\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \times \\
& \times \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \tau^{-s} d\tau + \\
& + \frac{a^2 t^s R \|(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{d_0} \times \\
& \times \int_0^t \frac{|(v_1(\cdot, \tau) - v_2(\cdot, \tau), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2(\cdot))|}{\|(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \times \\
& \times \frac{\|(\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \tau^{-s} d\tau \\
& \leq \frac{(2A_1 + B_1 R)t^s}{d_0} \cdot \|v_1 - v_2\|_s \times \\
& \times \frac{\int_0^t \|(\widehat{G}_0 \varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \tau^{-2s} d\tau}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} + \\
& + \frac{(2A_2 + B_2 R)t^s}{d_0} \cdot \|v_1 - v_2\|_s \times \\
& \times \frac{\int_0^t \|(\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t - \tau)\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \tau^{-2s} d\tau}{\|\varphi\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \leq \\
& \leq (2q_0 R + q_1) t^{\alpha - \beta - s - \varepsilon} \|v_1 - v_2\|_s.
\end{aligned}$$

Якщо  $(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_j(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , то

$$\begin{aligned}
(v_1(\cdot, t) - v_2(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_j(\cdot)) &= 0 \\
\forall t \in [0, T^*], \quad j &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Для  $t \in [0, T^*]$  маємо

$$\begin{aligned}
(2q_0 R + q_1) t^{\alpha - \beta - s - \varepsilon} &\leq \\
\leq \frac{2q_0 R + q_1}{2(q_0 + q_1)R} &< \frac{2q_0 + q_1}{2(q_0 + q_1)} < 1.
\end{aligned}$$

Отже,  $P$  є стисним оператором на  $M_{R,s}(Q^*)$ , і за теоремою Банаха отримуємо розв'язність рівняння (17) в  $M_{R,s}^* \subset \mathcal{D}'_{C,L}(Q^*)$ .

**Наслідок 2.** Нехай  $F_1 = 0$ , виконані припущення (L), (A1) при  $s = 0$ ,  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Phi_j, \Phi_j^{(\beta)}, \Phi_j^{(\alpha)} \in C[0, T]$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\Phi_1(0) = 0$ ,  $\Phi_2(0) = (F_2, \varphi_2)$ ,  $\inf_{t \in (0, T]} |p(t)| = p_0 > 0$ , де  $p(t) := \Phi_1^{(\beta)}(t) \Phi_2(t) - \Phi_1(t) \Phi_2^{(\beta)}(t)$ . Тоді існує  $T^* \in (0, T]$  (відповідно  $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0, T^*]$ ) і розв'язок

$$(u, r, b) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0, T]^2$$

задачі (1)-(3): функція  $u$  є розв'язком рівняння (17),

$$\begin{aligned}
r(t) = H_1(u, t) &= \left[ \left( \Phi_1^{(\alpha)}(t) + \right. \right. \\
& + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1(\cdot)) - \\
& \left. \left. - g(t)(F_0, \varphi_1) \right) \Phi_2(t) - \right. \\
& - \left( \Phi_2^{(\alpha)}(t) + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2(\cdot)) - \right. \\
& \left. \left. - g(t)(F_0, \varphi_2) \right) \Phi_1(t) \right] [p(t)]^{-1}, \\
b(t) = H_2(u, t) &= \left[ - \left( \Phi_1^{(\alpha)}(t) + \right. \right. \\
& + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_1(\cdot)) - \\
& \left. \left. - g(t)(F_0, \varphi_1) \right) \Phi_2^{(\beta)}(t) + \right. \\
& + \left( \Phi_2^{(\alpha)}(t) + a^2(u(\cdot, t), (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi_2(\cdot)) - \right. \\
& \left. \left. - g(t)(F_0, \varphi_2) \right) \Phi_1^{(\beta)}(t) \right] [p(t)]^{-1}, \quad t \in (0, T].
\end{aligned}$$

**Теорема 3.** За припущень (L), (A2) розв'язок  $(u, r, b) \in U(T)$  задачі (1)-(3) єдиний.

*Доведення.* Нехай існує два розв'язки  $(u_1, r_1, b_1), (u_2, r_2, b_2) \in U$  задачі (1)-(3). Підставимо їх в (1), (2). Візьмемо  $u = u_1 - u_2$ ,  $r = r_1 - r_2$ ,  $b = b_1 - b_2$  і отримаємо задачу Коші для рівняння

$$u_t^{(\alpha)} = a^2(-\Delta)^{\gamma/2} u + r_2 u_t^{(\beta)} + r u_{1t}^{(\beta)} + b_2 u + b u_1 \quad (22)$$

з нульовими початковими умовами. За означенням розв'язку

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int_0^T \left[ r_2(t) (u_t^{(\beta)}(\cdot, t), \psi(\cdot, t)) + \right.$$

$$+r(t)(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot, t), \psi(\cdot, t)) + \\ +b_2(t)(u(\cdot, t), \psi(\cdot, t)) + b(t)(u_1(\cdot, t), \psi(\cdot, t))] dt \\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Згідно з [16], для кожної  $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$  існує  $\psi = \widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$  така, що  $\widehat{L}\psi = \varrho$  в  $Q$ . Тоді для кожної  $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$

$$\int_0^T (u(\cdot, t), \varrho(\cdot, t)) dt = \\ = \int_0^T (r_2(t)u_t^{(\beta)}(\cdot, t) + \\ r(t)u_{1t}^{(\beta)}(\cdot, t) + b_2(t)u(\cdot, t) + \\ +b(t)u_1(\cdot, t), (\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t)) dt. \quad (23)$$

Зауважимо, що рівність (23) буде правильною також для такої  $\varrho$ , що  $\varrho(\cdot, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  при кожному  $t \in (0, T]$ , а  $(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot, t), (\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t))$  неперервна й інтегрована на  $(0, T)$ . З умови (3) знаходимо

$$r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t) + b(t)\Phi_1(t) = \\ = a^2(u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)), \\ r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t) + b(t)\Phi_2(t) = \\ = a^2(u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)), t \in (0, T],$$

звідки

$$r(t) = \frac{a^2 t^\beta (1 + |\ln t|)}{d(t)} \times \\ \times \left[ (u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z))\Phi_2(t) - \right. \\ \left. - (u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z))\Phi_1(t) \right], \quad (24)$$

$$b(t) = \frac{a^2 t^\beta (1 + |\ln t|)}{d(t)} \times \\ \times \left[ (u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z))\Phi_1^{(\beta)}(t) \right. \\ \left. - (u(z, t), (-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z))\Phi_2^{(\beta)}(t) \right], \\ t \in (0, T] \quad (25)$$

і тоді, з (23), для всіх  $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$  отримуємо рівняння

$$\int_0^T (u(\cdot, t), \varrho(\cdot, t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)_t^{(\beta)}(\cdot, t) - \\ -b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t) + w_\varrho(t)) dt = 0, \quad (26)$$

де

$$w_\varrho(t) = \frac{a^2 t^\beta (1 + |\ln t|)}{d(t)} [\Phi_2(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot) - \\ -\Phi_1(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)] (u_{1t}^{(\beta)}(\cdot, t), (\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t)) + \\ + \frac{a^2 t^\beta (1 + |\ln t|)}{d(t)} [\Phi_1^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot) - \\ -\Phi_2^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)] (u_1(\cdot, t), (\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t))$$

і є відомою функцією із  $C(0, T] \cap L(0, T)$ ,

$$\varrho(\cdot, t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)_t^{(\beta)}(\cdot, t) - b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t) + \\ + w_\varrho(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in (0, T]$$

і є неперервною й інтегрованою функцією  $t \in (0, T]$  (за лемою 3). Отже, для довільних  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu \in \mathcal{D}(0, T]$ ,  $\mu(T) = 0$  існує єдиний розв'язок  $\varrho \in \mathcal{D}(Q)$  інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\varrho(x, t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)_t^{(\beta)}(x, t) - \\ -b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho)(\cdot, t) + w_\varrho(t) = \varphi(x)\mu(t), \quad (x, t) \in Q \\ \text{з інтегровним ядром. Тоді з (12)}$$

$$\int_0^T (u(\cdot, t), \varphi(\cdot))\mu(t) dt = 0$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mu \in \mathcal{D}(0, T], \mu(T) = 0.$$

За лемою Дюбуа-Реймона отримуємо

$$(u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), t \in (0, T].$$

Отже,  $u = 0$  в  $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ , а з (21) та (22) випливає, що  $r(t) = 0$ ,  $b(t) = 0$ ,  $t \in (0, T]$ .

**3. Висновок.** Вивчено обернену задачу Коші для телеграфного рівняння з дробовими похідними та заданими узагальненими функціями в правих частинах прямої задачі. Вона полягає у визначенні узагальненого

розв'язку  $u$  і невідомих, залежних від часу, неперервних та інтегровних молодших коефіцієнтів  $b, r$  у рівнянні. Існування розв'язку  $(u, r, b) \in U(T^*)$  отримано при деякому  $T^* \in (0, T]$ , а єдиність на всьому інтервалі  $(0, T]$  за слабших припущень.  $\square$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецкий В.В.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь // Препр./АН України. Ин-т прикл. пр. мех. и мат. – Львов – 1991, №4-91. – 57 с.
2. *Городецкий В.В.* Задача Коші для псевдодифференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу  $S'$  / В.В. Городецкий, В.А. Літовченко // Доп. АН України – 1992. – **10**. – С. 6-9.
3. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data / V.V. Anh and N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics – 2001. – **104**, №5/6 – P. 1349-1387.
4. *Djrbashian M.M.* Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order / M.M. Djrbashian, A.B. Nersessyan // Izv. AN Arm. SSR. Matematika – 1968, №3. – P.3-29.
5. *Duan Jun Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, №013504.
6. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin – 2004.
7. *Voroshyllov A.A.* Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative / A.A. Voroshyllov, A.A. Kilbas // Dokl. Ak. Nauk – 2007. – **414**, №4. – P. 1-4.
8. *Cheng J.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation / J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto and T. Yamazaki // Inverse Problems – 2009. – **25**, №115002.
9. *Hatano Y.* Determination of order in fractional diffusion equation / Y. Hatano, J. Nakagawa, Sh. Wang and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry – 2013, №5A. – P. 51-57.
10. *Hussein M.* An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition / M. Hussein, D. Lesnic and M.I. Ismailov // Mathematical Methods in the Applied Sciences – 2016. – **39**, №5. – P. 963-980.
11. *Janno Ja.* Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation / Ja. Janno // Electronic J. of Differential Equations, 2016, <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu> – №199. – P. 1-28.
12. *Nakagawa J., Sakamoto K. and Yamamoto M.,* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration / J. Nakagawa, K. Sakamoto and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry – 2010, №2A. – P. 99-108.
13. *Rundell W.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation / W. Rundell, X. Xu and L. Zuo // Applicable Analysis – 2012, №1. – P. 1-16.
14. *Zhang Y.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation / Y. Zhang and X. Xu // Inverse Problems – 2011. – **27**. – P. 1-12.
15. *Дринь Я.М.* Прямі і обернені задачі для одного класу рівнянь з псевдодифференціальним оператором / Я.М. Дринь // Доп. НАН України – 2011, №5. – С. 12-17.
16. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 132-144.
17. *Lopushansky A.O.* The Cauchy problem for an equation with fractional derivatives in Bessel potential spaces / A.O. Lopushansky // Sib. Math. J. – 2014. – **55**, №6. – P. 1089-1097.
18. *Lopushanska H.* Inverse Cauchy Problem for Fractional Telegraph Equations with Distributions / H. Lopushanska, V. Rapita // Carpathian Math. Publ. – 2016. – **8**, №1. – P. 118-126.
19. *Srivastava H.M.* The H-functions of one and two variables with applications / H.M. Srivastava, K.C. Gupta and S.P. Goyal // New Dehli, South Asian Publishers – 1982.
20. *Kilbas A.A.* H-Transforms: Theory and Applications / A.A. Kilbas, M. Sajgo // Boca-Raton: Chapman and Hall CRC – 2004.
21. *Lopushansky A.O.* Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides / A.O. Lopushansky // Carp. Math. Publ. – 2013. – **5**, №2. – P. 279-289.