УДК 123.456

©2016 р. В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, В. С. Мельник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ ПРОМІЖНИХ КУСКОВО ЛІНІЙНИХ ТА НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Для різних проміжків $I \subseteq \mathbb{R}$, напівнеперервних відповідно зверху та знизу функцій $g : I \to \mathbb{R}$ та $h : I \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) < h(x)$ на I, та константи $\gamma \in (g(x_0), h(x_0))$ для деякого $x_0 \in I$ знаходяться проміжні кусково лінійні та нескінченно диференційовні функції, що набувають значення γ в точці x_0.

For given interval $I \subseteq \mathbb{R}$, semicontinuous upper and lower respectively functions $g : I \to \mathbb{R}$ and $h : I \to \mathbb{R}$, such, that $g(x) < h(x)$ on I, and a constant $\gamma \in (g(x_0), h(x_0))$ for some $x_0 \in I$ we find intermediate piecewise linear and infinitely differentiable function, that gain γ in x_0.

1. Теорема Гана про проміжну функцію та її зв'язок з теоремою Тітце-Урисона.

Австрійський математик Г. Ган у своїй статті 1917 року [1] довів таку теорему: для метричного простору X, напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ і напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Г. Тонґ [2] і М. Катетов [3] показали, що ця теорема є характеристичною для нормальності в класі T_1-просторів. Перед ними Ж. Д'єдонне [4] переніс теорему Гана на паракомпактні простори.

Відомо, що в нормальних просторах виконується і теорема Тітце-Урисона про продовження неперервних функцій [5]. Виявляється, ця теорема випливає з теореми Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова, яку ми коротко називатимемо теоремою Гана про проміжну функцію або просто теоремою Гана.

Справді, нехай X — нормальний простір, X_0 — замкнена множина в X і $f_0 : X_0 \to [0,1]$ — неперервна функція. Визначимо функції $g : X \to [0,1]$ і $h : X \to [0,1]$, покладаючи $g(x) = h(x) = f_0(x)$ на X_0 і $g(x) = 0$, $h(x) = 1$ на $X \setminus X_0$. Легко перевірити, що функція $g : X \to [0,1]$ напівнеперервна зверху, а $h : X \to [0,1]$ — знизу, при цьому $g(x) \le h(x)$ на X. За теоремою Гана існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Тоді f набуває значень у відрізку $[0,1]$ і $f(x) = f_0(x)$ на X_0. Таким чином, $f : X \to [0,1]$ — це неперервне продовження функції f_0.

2. Розвиток теореми Гана.

В останні роки теорема Гана про проміжну функцію обросла різними аналогами і узагальненнями. Щоб їх сформулювати, введемо нову термінологію.

Пару (g,h) функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$, де g — напівнеперервна зверху, а h — знизу, для яких виконується нерівність $g(x) \le h(x)$ на X, називатимемо *парою Гана* на X, а у випадку, коли виконується строга нерівність $g(x) < h(x)$ на X — *строгою парою Гана* на X. Функцію f назвемо *проміжною* для пари Гана (g,h), якщо $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на $x \in X$, і *строго проміжною* для пари Гана (g,h), якщо $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$.

К. Даукер [6] і М. Катетов [3] встановили, що T_1-простір X буде нормальним і зліченно паракомпактним тоді і тільки тоді, коли для кожної строгої пари Гана (g,h) на X існує строго проміжна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

З другого боку Е. Майкл [7] довів, що T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g,h) на X має строго проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$.

Нові доведення теорем про проміжну функцію дали К. Ґуд і Я. Старс [8]. Можливіcть перенесення теореми Гана на випадок загальніших, ніж $\mathbb{R}$ впорядкованих просторів значень вивчав К. Ямазакі [9].

Недавно з'явилися інші аналоги теореми Гана. Так, В. Маслюченко і С. Петей [10] встановили, що для довільної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, де g і h — зростаючі функції існує зростаюча неперервна проміжна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

Проміжні афінні функції $f : E \to \mathbb{R}$ на опуклих підмножинах векторних просторів для пари (g, h), що складається з опуклої функції $g : E \to \mathbb{R}$ і вгнутої функції $h : E \to \mathbb{R}$, вивчали В. Маслюченко і В. Мельник [11].

3. Нові задачі про проміжну функцію.

У зв'язку з результатом Маслюченка-Петея з [10] виникло питання: чи для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, де g і h — функції обмеженої варіації, існує проміжна неперервна функція обмеженої варіації $f : [a, b] \to \mathbb{R}$? Відповідь на це питання поки що не знайдена. У процесі пошуків відповіді на нього виникли питання про існування проміжних неперервно диференційовних (коротше: C^1-функція) чи кусково лінійних функцій, адже такі функції мають скінченну варіацію. Такі питання природно ставити для строгої пари Гана (g, h), оскільки у випадку рівності $g = h$ проміжна функція f буде мати ті ж властивості, що й g і h, а ці функції не зобов'язані бути неперервно диференційовними чи кусково лінійними. Питання про проміжну C^1-функцію чи кусково лінійну функцію для строгої пари Гана можна ставити не тільки для відрізка, а і, скажімо, для всієї числової прямої $\mathbb{R}$.

Тут ми покажемо, що для відрізка на це питання легко можна дати відповідь з допомогою теореми Даукера-Катетова.

Розглянемо банаховий простір $C_u[a, b]$ всіх неперервних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $||f|| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$.

Теорема 1. Нехай E — всюди щільна множина у просторі $C_u[a, b]$ і (g, h) — строга пара Гана на $[a, b]$. Тоді існує строго проміжна для (g, h) функція f з множини E.

Доведення. За теоремою Даукера-Катетова існує неперервна функція $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для пари (g, h). Оскільки (f_1, h) — це теж строга пара Гана, то існує неперервна функція $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для (f_1, h). Таким чином, для побудованих функцій маємо, що $g(x) < f_1(x) < f_2(x) < h(x)$ на $[a, b]$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ на $[a, b]$. Зрозуміло, що функція φ неперервна і $f_1(x) < \varphi(x) < f_2(x)$ на $[a, b]$. При цьому

$$\varphi(x) - f_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} = f_2(x) - \varphi(x)$$

на $[a, b]$. За теоремою Вейєрштрасса існує число

$$\varepsilon = \min_{a \le x \le b} (\varphi(x) - f_1(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - f_1(x)) = \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - \varphi(x))$$

і $\varepsilon > 0$. В ε-околі

$$U_\varepsilon(\varphi) = \{\psi \in C[a, b] : ||\psi - \varphi|| < \varepsilon\}$$

функції φ знайдеться якийсь елемент f з всюди щільної в $C_u[a, b]$ множини E. Цей елемент і буде шуканою функцією, адже

$$g(x) < f_1(x) = \varphi(x) - (\varphi(x) - f_1(x)) \le$$

$$\le \varphi(x) - \varepsilon < f(x) < \varphi(x) + \varepsilon \le$$

$$\le \varphi(x) + f_1(x) - \varphi(x) = f_2(x) < h(x)$$

на $[a, b]$.

Позначимо символом $P[a, b]$ множину всіх многочленів на $[a, b]$. За теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами на відрізку $[a, b]$ множина $P[a, b]$ всюди щільна в $C_u[a, b]$. Тому з теореми 1 негайно випливає.

Наслідок 1. Для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує такий многочлен $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, який є строго проміжною функцією для (g, h) на $[a, b]$.

Зауважимо, що многочлен — це не тільки C^1-функція, а й C^∞-функція, тобто нескінченно диференційовна функція, отже, для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна C^∞-функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називають *кусково лінійною*, якщо існує таке розбиття $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ відрізка $[a, b]$, що кожне звуження $f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ є лінійною функцією на $[x_{k-1}, x_k]$. Зрозуміло, що кожна кусково лінійна функція неперервна. Множину всіх кусково лінійних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $Q[a, b]$. З теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку $[a, b]$ функції негайно випливає, що множина $Q[a, b]$ всюди щільна в $C_u[a, b]$. Тому з теореми 1 отримуємо і наступний наслідок.

Наслідок 2. Для довільної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна кусково лінійна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Зауважимо, що для строгих пар Гана на $\mathbb{R}$ цей метод побудови строго проміжних C^∞-функцій чи кусково лінійних функцій не застосовний. Тут ми розвинемо інші методи, які дозволяють будувати строго проміжні C^∞-функції і кусково лінійні функції з певними додатковими властивостями для строгих пар Гана на відрізку $[a, b]$, не використовуючи при цьому теорему Даукера-Катетова, а безпосередньо доводячи її підсилені версії для $[a, b]$. Ці результати дозволяють здійснити побудову строго проміжних C^∞-функцій і кусково лінійних функцій і на довільних числових проміжках.

4. Існування проміжних кусково лінійних функцій з даним значенням.

Надалі позначатимемо символом $U_\varepsilon(x_0)$ ε-окіл $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 в $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(a) < \gamma < h(a)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I та $f(a) = \gamma$.

Доведення. Розглянемо множину

$$X = \{x \in [a, b] : \exists f_x \in Q[a, x] \mid$$

$$g(t) < f_x(t) < h(t) \text{ на } [a, x] \text{ і } f_x(a) = \gamma\}$$

Зауважимо, що $a \in X$, оскільки на $\{a\}$ можна визначити кусково лінійну функцію $f_a(a) = \gamma$, і для неї $g(a) < f_a(a) < g(a)$, а отже, $X \neq \emptyset$. Окрім того, $X \subseteq [a, b]$, а отже, множина X обмежена зверху числом b. Тому існує $x_0 = \sup X$ і $a \leq x_0 \leq b$.

Доведемо спочатку, що $x_0 \in X$. Візьмемо довільне число y_0, таке, що $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_0 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_0 > 0$, що $g(x) < y_0 < h(x)$ на $U_{\delta_0}(x_0) \cap I$

За означенням супремуму існує $x_1 \in X$, таке, що $x_0 - \delta_0 < x_1 \leq x_0$. Якщо $x_0 = x_1$, то $x_0 \in X$. Нехай $x_1 < x_0$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_1 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_1 > 0$, що $x_1 + \delta_1 < x_0$ і $g(x) < y_1 < h(x)$ з $y_1 = f_{x_1}(x_1)$ на $U_{\delta_1}(x_1) \cap I$. Покладемо $c = \min\{y_0, y_1\}$ і $d = \max\{y_0, y_1\}$. Оскільки $g(x) < y_1 < h(x)$ і $g(x) < y_0 < h(x)$ на $J = [x_1; x_1 + \delta_1]$, то $g(x) < c \leq d < h(x)$ на J. Отже, прямокутник $P = J \times [c; d]$ не містить точок жодного з графіків функцій g і h.

Введемо функцію $f_{x_0} : [a, x_0] \to \mathbb{R}$:

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f_{x_1}(x), \ x \in [a; x_1]; \\ y_1 + \frac{y_0 - y_1}{\delta_1}(x - x_1), \ x \in J; \\ y_0, \ x \in [x_1 + \delta_1; x_0]. \end{cases}$$

Дана функція коректно визначена і є кусково лінійною. Окрім того, $f_{x_0}(a) = \gamma$, і, як легко перевірити, $g(x) < f_{x_0}(x) < h(x)$ на $[a, x_0]$. Таким чином, $x_0 \in X$.

Доведемо тепер, що $x_0 = b$. Нехай $x_0 < b$. Покладемо $x_2 = \min\{x_0 + \frac{\delta_0}{2}; b\}$ і розглянемо функцію

$$f_{x_2}(x) = \begin{cases} f_{x_0}(x), \ x \in [a; x_0]; \\ y_0, \ x \in [x_0; x_2]. \end{cases}$$

Оскільки $[x_0; x_2] \subseteq U_{\delta_0}(x_0) \cap I$, то $g(x) < y_0 < h(x)$ на $[x_0, x_2]$. Крім того, f_{x_2} — кусково лінійна функція і $f(x_2) = \gamma$, отже, $x_2 \in X$. Але це неможливо, бо $x_2 > x_0 = \sup X$. Таким чином, маємо, що $x_0 = b$ і функція $f = f_b$ є шуканою.

Заміною $t = b - x$ з теореми 2 легко виводиться і такий результат.

Теорема 3. Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(b) < \gamma < h(b)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : [a, b] \to$

$\mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I і $f(b) = \gamma$.

5. Лема про існування ланцюжка відрізків.

Система множин $\mathcal{A}$ називається *вписаною* в систему множин $\mathcal{B}$ (позначається: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$), якщо для довільного $A \in \mathcal{A}$ існує $B \in \mathcal{B}$, таке, що $A \subseteq B$.

Кажуть, що відрізки $I = [a, b]$ та $J = [c, d]$ *перетинаються нетривіально*, якщо $a < c < b < d$.

Ланцюжком для відрізка $[a, b]$ ми називатимемо скінченну послідовність відрізків $I_1, ..., I_n$, таку, що відрізки I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-1$, відрізки I_k та I_{k+2} не перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-2$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k \supseteq [a, b]$.

Надалі через $\overset{\circ}{A}$ ми позначатимемо внутрішність множини A.

Лема 1. Нехай $I = [a, b]$, $P_j = [\alpha_j, \beta_j]$ і $\alpha_j < \beta_j$ при $j = 0, 1, ..., m$ та $\tilde{a} = \min\{\beta_0, b\}$, причому $[\tilde{a}, b) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overset{\circ}{P}_j$ і $a \in \overset{\circ}{P}_0$. Тоді існує такий ланцюжок відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, де $k = 0, 1, ..., n$, що система $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, .., I_n\}$ вписана в систему $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, ..., P_m\}$, причому $a_0 = a$, $b_n = b$ і $I_0 \subseteq P_0$.

Доведення. За умовою $\alpha_0 < a < \beta_0$. Якщо $\beta_0 \geq b$, то ми покладаємо $a_0 = a$, $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і послідовність з одного відрізка I_0 буде шуканим ланцюжком.

Нехай $\beta_0 < b$. Покладемо $b_0 = \beta_0 = \tilde{a}$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і $j_0 = 0$. Оскільки $b_0 \in [\tilde{a}, b)$, то існує такий індекс $j_1 = 1, ..., m$, що $b_0 \in \overset{\circ}{P}_{j_1}$, тобто $\alpha_{j_1} < b_0 < \beta_{j_1}$. Візьмемо $a_1 = \frac{\max\{\alpha_{j_1}, a\} + b_0}{2}$, $b_1 = \min\{\beta_{j_1}; b\}$ і покладемо $I_1 = [a_1, b_1]$. Оскільки $\alpha_{j_1} < b_0$ і $a < b_0$, то $\max\{\alpha_{j_1}, a\} < b_0$, а тому $a_0 = a \leq \max\{\alpha_{j_1}, a\} < a_1 < b_0$ і $a_1 > \alpha_{j_1}$. З другого боку $b_1 \leq \beta_{j_1}$, отже, $I_1 \subseteq P_{j_1}$. Крім того, $b_0 < \beta_{j_1}$ і $b_0 < b$, тому $b_0 < b_1$. Таким чином, $a_0 < a_1 < b_0 < b_1$, отже, відрізки I_0 та I_1 нетривіально перетинаються. Якщо $b_1 = b$, то пара (I_0, I_1) буде шуканим ланцюжком.

Нехай $b_1 < b$. Оскільки $b_1 > b_0 = \tilde{a}$, та $b_1 \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує $j_2 = 1, ..., m$, таке, що $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2} = (\alpha_{j_2}, \beta_{j_2})$, тобто, $\alpha_{j_2} < b_1 < \beta_{j_2}$. Оскільки $b_1 = \beta_{j_1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_1}$ і $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2}$, то $j_1 \neq j_2$. Тому всі три номери j_0, j_1 і j_2 різні. Візьмемо $a_2 = \frac{\max\{\alpha_{j_2}, b_0\} + b_1}{2}$, $b_2 = \min\{\beta_{j_2}; b\}$, $I_2 = [a_2, b_2]$. Оскільки $\alpha_{j_2} < b_1$ і $b_0 < b_1$, то $\max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < b_1$, а тому $a_1 < \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2 < b_1$ і $a_2 > \alpha_{j_2}$. З другого боку, $b_2 \leq \beta_{j_2}$, отже, $I_2 \subseteq P_{j_2}$. Крім того, $b_1 < \beta_{j_2}$ і $b_1 < b$, тому $b_1 < b_2$. Таким чином, $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, отже, відрізки I_1 та I_2 нетривіально перетинаються. Окрім того, оскільки $b_0 \leq \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2$, то відрізки I_0 та I_2 не перетинаються. Якщо $b_2 = b$, то трійка (I_0, I_1, I_2) буде шуканим ланцюжком, якщо ж $b_2 < b$, то побудова продовжується.

Припустимо, що для деякого номера $k > 2$ вже побудовані відрізки $I_s = [a_s, b_s]$ при $s = 0, ..., k-1$, такі, що сусідні відрізки I_s та I_{s+1} перетинаються нетривіально при $s = 0, ..., k-2$, а відрізки I_s та I_{s+2} не перетинаються при $s = 0, ..., k-3$. При цьому визначені різні номери $0 = j_0, j_1, ..., j_{j-1}$ серед чисел $0, 1, ..., m$, такі, що $I_s \subseteq P_{j_s}$ при $s = 0, ..., k-1$, $a_s = \frac{\max\{\alpha_{j_s}, b_{s-2}\} + b_{s-1}}{2}$, $b_s = \beta_{j_s}$ при $s = 2, ..., k-2$, $b_{k-1} = \min\{\beta_{j_{k-1}}; b\}$ і $b_0 < b_1 < ... < b_{k-1}$. Якщо $b_{k-1} = b$, то набір $(I_0, ..., I_{k-1})$ і буде шуканим ланцюжком відрізків.

Нехай $b_{k-1} < b$. Тоді $b_{k-1} \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує такий номер $j_k = 1, ..., m$, що $b_{k-1} \in \overset{\circ}{P}_{j_k}$, тобто $\alpha_{j_k} < b_{k-1} < \beta_{j_k}$. За побудовою $b_{k-1} = \beta_{j_{k-1}} > b_{k-2} = \beta_{j_{k-2}} > ... > b_1 = \beta_{j_1}$, отже, $b_{k-1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_s}$ при $s = 1, ..., k-1$. Крім того, $j_k \neq j_0 = 0$, бо $j_k \geq 1$. Таким чином, всі номери $j_0, ..., j_k$ різні.

Покладемо $a_k = \frac{\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} + b_{k-1}}{2}$, $b_k = \min\{\beta_{j_k}; b\}$ і $I_k = [a_k, b_k]$. Перевіримо, що $a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < b_k$. Оскільки за припущенням відрізки I_{k-2} та I_{k-1} нетривіально перетинаються, то $a_{k-2} < a_{k-1} < b_{k-2} < b_{k-1}$, зокрема, $a_{k-1} < b_{k-2}$, а значить, $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\}$. Але $\alpha_{j_k} < b_{k-1}$ і $b_{k-2} < b_{k-1}$, тому $\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < b_{k-1}$. Отже, $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_{k-1}$. Далі $b_{k-1} < \beta_{j_k}$ і $b_{k-1} < b$, тому $b_{k-1} < b_k$. Таким чином,

$a_k < b_k$, і відрізки I_{k-1} та I_k нетривіально перетинаються. До того ж

$$a_k > \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} \geq b_{k-2},$$

отже, відрізки I_{k-2} та I_k не перетинаються. Нарешті,

$$\alpha_{j_k} \leq \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_k \leq \beta_{j_k}.$$

Отже, $I_k \subseteq P_{j_k}$. Таким чином, побудову можна продовжити ще на один крок.

Оскільки число індексів відрізків P_j дорівнює $m+1$, то процес побудови відрізків I_k не може тривати до нескінченності, адже індекси $j_0, ..., j_k$, які виникають у побудові є різними. Отже, процедура завершується на якомусь кроці $n \leq m$ і ми отримаємо шуканий ланцюжок $I_0, ..., I_n$ для відрізка I.

6. Лема про нескінченно диференційовні функції.

Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Добре відомо, що f — нескінченно диференційовна функція. При цьому $f(x) > 0$ на $(-1, 1)$.

Позначимо $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}}dx$. Ясно, що $I > 0$. Розглянемо функцію $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{I}dt$. Оскільки функція f неперервна, то $g'(x) = \frac{f(x)}{I} \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тому функція g нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$, g зростає на $\mathbb{R}$, причому $g(x) = 0$ при $x \leq -1$ і $g(x) = 1$ при $x \geq 1$.

Позначимо символом $C^\infty(\mathbb{R})$ простір всіх нескінченно диференційовних функцій $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Лема 2. Нехай $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $a < b$. Тоді існує функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, така, що $\varphi(x) = \alpha$ при $x \leq a$, $\varphi(x) = \beta$ при $x \geq \beta$, і φ зростає при $\alpha < \beta$, спадає при $\alpha > \beta$ та є сталою при $\alpha = \beta$.

Доведення. Позначимо $\psi(x) = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$. Легко перевірити, що функція $\varphi(x) = (\beta - \alpha)g(\psi(x)) + \alpha$, де g — вище побудована функція, є шуканою.

7. Існування нескінченно диференційовних проміжних функцій, локально сталих на кінцях відрізка.

Теорема 4. Нехай (g, h) — строга пара Гана на $I = [a, b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(a), h(a))$. Тоді для пари (g, h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(a) = \gamma$.

Доведення. Для кожної точки $x \in (a, b]$ розглянемо довільне число y_x, таке, що $g(x) < y_x < h(x)$, і покладемо $y_a = \gamma$. Оскільки функція g напівнеперервна зверху, а h знизу, то для кожного $x \in I$ існує таке $\delta_x > 0$, що $g(u) < y_x < h(u)$ при $u \in V_x = (x - 2\delta_x, x + 2\delta_x)$ і $u \in I$.

Якщо $d = a + 2\delta_a \geq b$, то стала функція $f(x) = y_a = \gamma$ і буде шуканою. Нехай $d < b$. Покладемо $c = a + \delta_a$. Тоді $a < c < b$. Зрозуміло, що відрізок $[c, b]$ покривається системою інтервалів $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, де x пробігає $[c, b]$, адже $x \in U_x$ для кожного $x \in [c, b]$. За лемою Гейне-Бореля існує скінченне число точок $x_1, ..., x_m$ з відрізка $[c, b]$, таких, що $[c, b] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_{x_j}$.

Візьмемо $P_j = \overline{U_{x_j}}$, $P_0 = [a, c]$ та $\mathcal{P} = \{P_j : j = 0, 1, ..., m\}$. За лемою 1, існує ланцюжок з відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, ..., n$, вписаний в покриття $\mathcal{P}$, такий, що $I_0 \subseteq P_0$, $a_0 = a$ і $b_n = b$. Оскільки для довільного $k = 0, ..., m$ маємо, що $I_k \subseteq P_{j_k} = \overline{U_{x_{j_k}}} \subseteq V_{x_{j_k}}$, то $g(u) < y_{x_{k_j}} < h(u)$ на $I \cap I_k$. Надалі будемо позначати $z_0 = y_a = \gamma$ і $y_{x_{j_k}} = z_k$ при $k = 1, ..., n$. Для нашого ланцюжка виконуються такі нерівності:

$$a = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < ... < a_n <$$
$$< b_{n-1} < b_n = b$$

Покладемо $A_k = [a_k, b_{k-1}], k = 1, ..., n$; $B_0 = [a_0, a_1]$, $B_k = [a_{k-1}, a_{k+1}]$ при $k = 1, ..., n-1$, $B_n = [b_{n-1}, b_n]$. Маємо, що для кожного $k = 0, ..., n$ виконуються включення $B_k \subseteq I_k$ і для кожного $k = 1, ..., n$ — включення $A_k = I_{k-1} \cap I_k$.

Для кожного відрізка $A_k = [a_k, b_{k-1}]$ при $k = 1, ..., n$, використовуючи лему 2, побудуємо C^∞-функцію $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої

$\varphi_k(x) = z_{k-1}$ при $x \leq a_k$, $\varphi_k(x) = z_k$ при $x \geq b_{k-1}$, причому функція φ_k зростає при $z_{k-1} \leq z_k$ і спадає при $z_{k-1} \geq z_k$. Визначимо функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, покладаючи $f(x) = z_k$, якщо $x \in B_k$ при $k = 0, 1, ..., n$, і $f(x) = \varphi_k(x)$, якщо $x \in A_k$ при $k = 1, ..., n$.

Зрозуміло, що функція f нескінченно диференційовна, локально стала у точках a і b, і $f(a) = z_0 = \gamma$.

Покажемо, що f є строго проміжною функцією для пари (g, h) на $[a, b]$. Нехай $x \in [a, b]$. Тоді існує такий номер $k = 0, 1, ..., n$, що $x \in B_k$, або такий номер $k = 1, ..., n$, що $x \in A_k$.

Припустимо, що $x \in B_k$ при $k = 1, ..., n-1$. Тоді $f(x) = z_k = y_{j_k}$ і $g(u) < y_{j_k} < h(u)$ на V_{j_k}. Оскільки відрізки I_{k-1} та I_k і I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються і $I_{k-1} \cap I_{k+1} = \emptyset$, то

$$a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < a_{k+1} < b_k < b_{k+1},$$

отже, $B_k = [b_{k-1}, a_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k] = I_k \subseteq V_{x_{j_k}}$ а тому $f(x) = z_k \in (g(x), h(x))$.

Нехай $x \in B_0$. Тоді $f(x) = z_0 = y_a = \gamma$. Але $a = a_0 < a_1 < b_0$, тому

$$B_0 = [a_0, a_1] \subseteq [a_0, b_0] = I_0 \subseteq P_0 = [a, c] \subseteq V_a.$$

Отже $f(x) = \gamma \in (g(x), h(x))$.

Нарешті, нехай $x \in B_n$. Тоді $f(x) = z_n = y_{j_n}$. Але відрізки I_{n-1} та I_n нетривіально перетинаються. Тому $a_{n-1} < a_n < b_{n-1} < b_n$, отже,

$$B_n = [b_{n-1}, b_n] \subseteq [a_n, b_n] = I_n \subseteq V_{x_{j_n}}.$$

В такому разі $f(x) = y_{j_n} \in (g(x), h(x))$.

Нехай тепер $x \in A_k$ для деякого $k = 1, ..., n$. За побудовою $g(u) < z_s < h(u)$ на I_s для довільного $s = 0, 1, ..., n$. Нехай $c_k = \min\{z_{k-1}, z_k\}$ і $d_k = \max\{z_{k-1}, z_k\}$. Оскільки $A_k = I_{k-1} \cap I_k$, то $g(x) < c_k \leq d_k < h(x)$. Але $f(x) = \varphi_k(x) \in [c_k, d_k]$. Тому $g(x) < f(x) < h(x)$. Таким чином, f — це шукана функція.

Заміною $t = b - x$ з теореми 2 легко виводиться і такий результат.

Теорема 5. Нехай (g, h) — строга пара Гана на $I = [a, b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(b), h(b))$. Тоді для пари (g, h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(b) = \gamma$.

Зауважимо, що з леми про існування вписаного ланцюжка відрізків можна вивести і теорему 2.

8. Проміжні функції на різних проміжках.

З допомогою теорем 2, 3, 4 і 5 ми можемо здійснити побудову строго проміжних кусково лінійних чи C^∞-функцій на довільних проміжках числової прямої.

Теорема 6. Нехай $I = [a, b)$ — довільний відкритий справа проміжок в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, (g, h) — строга пара Гана на I і $g(a) < \gamma < h(a)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g, h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(a) = \gamma$ і f — локально стала у точці a.

Доведення. Легко побудувати таку строго зростаючу послідовність точок $b_n \in (a, b)$, що $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Для одноманітності позначень покладемо $b_0 = a$. За теоремою 3 існує така C^∞-функція $f_1 : [b_0, b_1] \to \mathbb{R}$, що $f_1(b_0) = \gamma$, причому f_1 локально стала на кінцях відрізка $[b_0, b_1]$ і є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_0,b_1]}, h|_{[b_0,b_1]})$. На другому кроці будуємо таку C^∞-функцію $f_2 : [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$, що $f_2(b_1) = f_1(b_1)$, причому вона є локально сталою на кінцях відрізка $[b_1, b_2]$, і є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_1,b_2]}, h|_{[b_1,b_2]})$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ таку C^∞-функцію $f_n : [b_{n-1}, b_n] \to \mathbb{R}$, що локально сталі на кінцях відрізка $[b_{n-1}, b_n]$, і $f_n(b_{n-1}) = f_{n-1}(b_{n-1})$ та є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_{n-1},b_n]}, h|_{[b_{n-1},b_n]})$.

Покладемо $f(x) = f_n(x)$ на $[b_{n-1}, b_n]$, де n — довільний номер. Цими умовами коректно визначається C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, яка і буде строго проміжною для строгої пари Гана (g, h) на I, причому $f(a) = \gamma$ і f є локально сталою в точці a.

Так само з теореми 4 легко виводиться такий результат, який можна отримати і з теореми 6 відповідною заміною.

Теорема 7. Нехай $I = (a, b]$ — довільний відкритий зліва проміжок, скінченний чи нескінченний, (g,h) — строга пара Гана на I і $g(b) < \gamma < h(b)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(b) = \gamma$ і f локально стала в точці b.

З теоерем 6 і 7 легко легко виводиться:

Теорема 8. Нехай $I = (a,b)$ — довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0 \in I$, (g,h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0 = y_0$.

Доведення. За теоремами 6 і 7 існують C^∞-функції $f_- : (a,x_0] \to \mathbb{R}$ і $f_+ : [x_0,b) \to \mathbb{R}$, які є строго проміжними для строгих пар Гана $(g|_{(a,x_0]}, h|_{(a,x_0]})$ і $(g|_{[x_0,b)}, h|_{[x_0,b)})$ відповідно і $f_-(x_0) = y_0 = f_+(x_0)$, f_- та f_+ локально сталі в точці x_0. Тоді функція $f : I \to \mathbb{R}$, для якої $f(x) = f_-(x)$ на $(a,x_0]$ і $f(x) = f_+(x)$ на $[x_0,b)$ буде шуканою.

Функцію $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ /$f : (a,b] \to \mathbb{R}$/ ми називаємо *кусково лінійною*, якщо існує така строго зростаюча /спадна/ послідовність точок $(x_n)_{n=0}^\infty$, що $x_0 = a$ /$x_0 = b$/, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ /$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$/ і всі звуження $f|_{[x_n,x_{n+1}]}$ /$f|_{[x_{n+1},x_n]}$/ є лінійними.

Функцію $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ми називатимемо *кусково лінійною*, якщо існує така двостороння послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ точок x_n з інтервалу (a,b), що $x_n < x_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = a$, і звуження $f|_{[x_n,x_{n+1}]}$ є лінійною функцією для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогічні твердження справедливі і в тому випадку, коли I — довільний проміжок.

Так само як теорема 6 на основі теорем 2 і 3, легко встановлюються такі результати.

Теорема 9. Для довільної строгої пари Гана (g,h) на проміжку $I = [a,b)$ і числа γ, для якого $g(a) < \gamma < h(a)$, існує така строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, що $f(a) = \gamma$.

Теорема 10. Для довільної строгої пари Гана (g,h) на проміжку $I = (a,b]$ і числа γ, для якого $g(b) < \gamma < h(b)$, існує така строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, що $f(b) = \gamma$.

Теорема 11. Нехай $I = (a,b)$ довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0 \in I$, (g,h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0) = y_0$.

9. Приклади.

Покажемо, що коли $g(x) = h(x)$ хоча б в одній точці, то проміжні кусково лінійні чи нескінченно диференційовні функції можуть не існувати.

Приклад 1. Для точок $x_n = \frac{1}{n}$ з відрізка $[0,1]$ побудуємо функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ і $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, покладаючи $g(0) = h(0) = 0$, $g(x_n) = -\frac{2x_n}{3}$ і $h(x_n) = -\frac{x_n}{3}$, якщо n парне, $g(x_n) = \frac{x_n}{3}$ і $h(x_n) = \frac{2x_n}{3}$, якщо n непарне, і вважаючи, що функції g і h лінійні на кожному відрізку $[x_{n+1}, x_n]$.

Маємо, що $g(0) = h(0)$ і $g(x) < h(x)$ на $(0,1]$. Легко перевірити, що функції g і h неперервні. Покажемо, що для пари Гана (g,h) на $[0,1]$ не існує проміжної кусково лінійної функції. Справді, нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — проміжна функція для пари (g,h). Покажемо, що на кожному відрізку $[x_{n+2}, x_n]$ функція f не може бути лінійною. Якщо n парне, то

$$f(x_n) \le h(x_n) = -\frac{x_n}{3} < 0 <$$

$$< \frac{x_{n+1}}{3} = g(x_{n+1}) \le f(x_{n+1})$$

і

$$f(x_{n+2}) \le h(x_{n+2}) = -\frac{x_{n+2}}{3} < 0 <$$

$$< \frac{x_{n+1}}{3} = g(x_{n+1}) \le f(x_{n+1}),$$

отже, $f(x_n) < f(x_{n+1})$ і $f(x_{n+1}) > f(x_{n+2})$, а $x_{n+2} < x_{n+1} < x_n$. Таким чином, функція f не є монотонною на I_n, а значить, не є і лінійною на I_n. Якщо n непарне, то $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ і $f(x_{n+2}) > f(x_{n+1})$ і знову f не монотонна, а тому і не лінійна на I_n.

Тепер зрозуміло, що f не може бути кусково лінійною на $[0,1]$, інакше б існувало таке число $c \in (0,1)$, що f лінійна на $[0,c]$, але $x_n \to 0$, тому при достатньо великих n виконуються нерівності $0 < x_{n+2} < x_n < c$, а тоді $I_n \subseteq [0,c]$ і f лінійна на I_n, що неможливо.

Приклад 2. Візьмемо $g(x) = |x|$, $h(x) = 2|x|$. Покажемо, що не існує проміжної диференційовної функції для пари (g, h) на $[-1, 1]$.

Нехай така функція f існує. Тоді при $\Delta x > 0$:

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{g(\Delta x)}{\Delta x} \le \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le \frac{h(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \le \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$. Звідки $1 \le f'(0) \le 2$.

З іншого боку, $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \ge \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ при $\Delta x < 0$, а отже, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \ge \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ звідки, $-1 \ge f'(0) \ge -2$.

Отримана суперечність показує, що проміжної диференційовної функції для пари (g, h) на $[-1, 1]$ не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

2. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

3. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

4. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P.65-76.

5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

6. *Dowker C. H.* On countably paracompact spaces // Canad. J. Math. — 1951. — **3**. — P.219-224.

7. *Michael E.* Continuous selections I // Ann. of Math. — 1956. — **63**. — P.361–382.

8. *Good C., Stares I.* New proofs of classical insertion theorems // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — **41**,№1. — P.139-142.

9. *Yamazaki K.* The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hungar. — 2011. — **132**(1-2). — P.42-48.

10. *Маслюченко В.К., Петей С.П.* Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№2. — С.64-71.

11. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — **4**,№1. — С.110-116.