УДК 517.946

©2016 р. М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНДАМЕНТАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ І РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлюється зв'язок між функціями Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь і відповідних рівнянь з дробовою похідною. На його основі виводяться оцінки компонент функції Гріна і будується розв'язок та фундаментальний розв'язок задачі Коші зі змінними коефіцієнтами фрактальних рівнянь.

It is established the connection between Green functions of the Cauchy problem for parabolic equations and related equations with fractional derivative. On the basis of such connection estimates of component of Green function are derived and the solution and the fundamental solution of the Cauchy problem with variable coefficients of fractal equations are constructed.

Вступ

Задачі для рівнянь з частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ і процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці, теорії ядерних ланцюгових реакцій, економіці екології тощо. Класичні розв'язки задачі Коші й крайових задач вивчались в монографіях Т.Я. Загорского, С.Д. Ейдельмана, О.О. Ладижинської, С.Д. Івасишена, Б.Й. Пташника та ін.

Задачі з дробовими похідними були предметом досліджень багатьох математиків у різні періоди: Л. Ейлером, Ж. Ліувіллем та Ріманом, Ж. Адамаром, С. Самко і А. Кінбасом, А. Нахушевим тощо. Основи дробового інтегро-диференціювання подано у посібнику Н.О. Вірченко і В.Я. Рибака [1], де проаналізовано більше двохсот публікацій.

Для рівнянь параболічного типу тепер опубліковано вітчизняними і зарубіжними матемтаиками ряд визначних праць. Зокрема, у книзі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.Н. Кочубея [3] за допомогою функцій Фокса вивчено властивості функції Гріна задачі Коші для рівнянь другого порядку, методом Є. Леві побудовано фундаментальний розв'язок і встановлено коректність цієї задачі.

У цій статті, яка складається із двох частин, компоненти функції Гріна задачі Коші для рівнянь з дробовою похідною визначаються за допомогою функції Гріна відповідного параболічного рівняння. Незалежно від порядку рівняння і числа просторових змінних встановлюється єдиний підхід до оцінок компонент функції Гріна. Він базується на зображенні інтегралів Лапласа по спеціальних контурах.

У другій частині дослдження розглядається задача Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами. За допомогою об'ємного потенціала задача зводиться до нерегулярного інтегрального рівняння Вольтерра–Фредгольма з ядром із класу Діні. Будується резольвента і встановлюється коректність задачі Коші в нормованих просторах Діні.

§1. Функція Гріна задачі Коші

У півпросторі $\Pi = (0, \infty) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k u + f(t, x), \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

А також цю задачу для рівняння з модифікованим оператором дробового диференціювання

$$\mathfrak{D}_t^\alpha u_1 - \frac{u_1(0, t)}{\Gamma(1-\alpha) t^\alpha} =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k u_1 + f_1(t,x). \qquad (2)$$

Для знаходження розв'язків скористаємось перетвореннями Фур'є і Лапласа

$$F(t,\sigma) = Ff(t,x) = \int_{E_n} e^{-i\sigma x} f(t,x)dx, \quad (3)$$

$$Lf_1(t,x) = \psi(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t,x)dt, \quad (4)$$

де $f \in L_1(E_n)$, f_1 – оригінал. Оператори F і L мають обернені F^{-1} і L^{-1}, з допомогою F^{-1} фундаментальний розв'язок задачі Коші (1) визначається формулою

$$G_0(t,x) = F^{-1}Q(t,\sigma) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} e^{i\sigma x} Q(t,\sigma) d\sigma, \qquad (5)$$

де $Q(t,\sigma) = \exp\{A(i\sigma)t\}$ – нормальний розв'язок рівняння

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k (i\sigma)^k v(t,\sigma) \equiv A(i\sigma)v,$$

$$\sigma \in E_n, i = \sqrt{-1}.$$

Припустимо, що рівняння (1) параболічне, причому функція $G(t,x)$ задовольняє нерівності [2]

$$|\mathfrak{D}_x^k G_0(t,x)| \le c_k t^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-cp(t,x)}, \qquad (6)$$

для всіх $t \in (0,\infty)$, c_k, c – додатні сталі, $\rho_0(t,x) = \left(|x|t^{-\frac{1}{2b}}\right)^{q_0}$, $q_0 = \dfrac{2b}{2b-1}$. Зауважимо, що для $|x| < 1$ справджується нерівність [2]

$$\int_0^T t^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-\rho_0(t,x)} dt \le$$

$$\le c_T \begin{cases} 1, \ n+|k| < 2b, \\ \ln\frac{1}{|x|} + 1, \ n+|k| = 2b, \\ |x|^{-(n+|k|-2b)}, \ n+|k| > 2b. \end{cases}$$

Застосуємо до рівняння (2) перетворення Фур'є Лапласа, тоді отримаємо рівняння

$$p^\alpha v_1(p,\sigma) - p^{\alpha-1}\widetilde{\varphi}_1(\sigma) =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k(i\sigma) v_1 + \widetilde{f}_1(p,\sigma). \qquad (7)$$

Звідси знаходимо

$$v_1(p,\sigma) = \frac{\widetilde{\varphi}_1(\sigma)p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(i\sigma)} + \frac{\widetilde{f}_1(p,\sigma)}{p^\alpha - A(i\sigma)}, \qquad (8)$$

$$A(\sigma) \equiv \sum_{|k|\le 2b} A_k (i\sigma)^k.$$

В результаті застосування оберненого оператора Фур'є-Лапласа до обох частин рівності та теореми про перетворення Фур'є-Лапласа згортки будемо мати

$$u_1(t,x) = \int_{E_n} G_1(t,x-\xi)\varphi_1(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_2(t-\tau, x-\xi) f_1(\tau,\xi)d\xi. \qquad (9)$$

Тут позначено

$$G_1(t,x) = F_\sigma^{-1} L_p^{-1}\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(i\sigma)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n+1} i} \int_{a-i\sigma}^{a+i\sigma} e^{pt} \int_{E_n} e^{i\sigma x}\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(\sigma)}\right) d\sigma dp;$$

$$G_2(t,x) = F^{-1} L_p^{-1}\left(\frac{1}{p^\alpha - A(i\sigma)}\right) =$$

$$= L_p^{-1}\left\{\int_0^\infty e^{-p^\alpha \tau} G_0(\tau,x)d\tau\right\}. \qquad (10)$$

Теорема 1 (про функцію Гріна). *Якщо рівняння* (1) *параболічне, то компоненти функції Гріна задачі для рівняння* (2) *визначаються формулами* (10) *і для них справджуються нерівності*

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \le$$

$$\le c_k e^{-c\rho(\widehat{x})} t^{-\frac{n+|k|}{2b}\alpha} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}), \qquad (11)$$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t,x)| \le$$

$$\le c_k e^{-c\rho(\widehat{x})} t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}-1+\alpha} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}), \qquad (12)$$

де для $|x| < 1$

$$\Psi_m(x) = \begin{cases} 1, \quad m < 0, \\ |\ln|x|| + 1, \quad m = 0, \\ |x|^{-m}, \quad m > 0, \end{cases}$$

а при $|x| \geq 1$ $\Psi_m(x) = \Psi_m(1)$ *і* $m \in E_1$, $\rho(\widehat{x}) = \left(\frac{|x|}{t^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q$, $q = \frac{2b}{2b-\alpha}$

$$|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ct^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}}\Psi_{n-2b|\widehat{x}|}e^{-c|\widehat{x}|^q}. \quad (13)$$

Для функцій $\varphi \in c^{(\omega)}(E_n)$, $f \in c^{(\omega)}((0,T)\times E_n)$ *розв'язок задачі Коші* (1), (2) *визначаєтьсся формулою* (9) *і для нього правильна нерівність*

$$|\mathfrak{D}_x^k u(t,x)| \leq c_k \left[t^{-\frac{|k|}{2b}}(|\varphi|\omega + |f_1|\omega)\right],$$
$$|k| \leq 2b.$$

Доведення. Очевидно правильна рівність

$$\frac{1}{p^\alpha - A(i\sigma)} = \int_0^\infty e^{-(p^\alpha - A(i\sigma))\tau}d\tau.$$

Тому згідно з формулою (5) маємо зображення

$$G_1(t,x) = F^{-1}L^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-(p^\alpha - A(i\sigma))\tau}_{p^{\alpha-1}}d\tau\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}_{p^{\alpha-1}}F_\sigma^{-1}\left(e^{A(i\sigma)\tau}\right)d\tau\right) =$$

$$= L_p^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}_{p^{\alpha-1}}G_0(\tau,x)d\tau\right). \quad (14)$$

З другого боку також знаходимо

$$G_1(t,x) = F^{-1}L^{-1}\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha\left(1-\frac{A}{p^\alpha}\right)}\right) =$$

$$= F^{-1}L^{-1}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{p^{\alpha k}}\right)$$

для $|A(i\sigma)| < |p|^\alpha$. Скористаємось співвідношенням

$$L^{-1}p^{-\alpha k-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}p^\alpha \geq |A(\sigma)|} e^{pt}p^{-\alpha k-1}dp =$$

$$= \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad (k = 0,1,...),$$

яке легко перевіряється, якщо до обох частин застосувати пряме перетворення Лапласа $\int_0^\infty e^{-pt}t^{\alpha k}dt = p^{-(k+\alpha+1)}\Gamma(\alpha k+1)$.

Отже, приходимо до такого зображення функції

$$G_1(t,x) = F^{-1}\left(\sum_{k=0}^\infty A^k t^{\alpha k}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\right) =$$

$$= F_\sigma^{-1}E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha), \quad (15)$$

де $E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ – функція Міттаг-Лефлера.

Оцінимо функцію $G_1(t,x)$ та її похідні, виходячи із зображення (14). Позначимо функцію під знаком оператора L_p^{-1} через $\varphi_\alpha(p,x)$ і продиференціюємо.

Будемо мати

$$\mathfrak{D}_x^k\varphi_\alpha(p,x) = \int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}\mathfrak{D}_x^k G_0(\tau,x)d\tau.$$

Для похідних $\mathfrak{D}_x^k G_1$, покладаючи $p = zt^{-1}$, $\tau = \beta t$, отримуємо формулу

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1}\mathfrak{D}_x^k\varphi_\alpha(p,x)dp =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int_{at-i\infty}^{at+i\infty} e^z\mathfrak{D}_x^k\varphi_\alpha(zt^{-1},x)z^{\alpha-1}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^z z^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-z^\alpha\beta}\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta,x)d\beta dz. \quad (16)$$

Спочатку оцінимо функцію $\mathfrak{D}_x^k\varphi_\alpha(zt^{-1},x)$. Зробивши заміну $\tau = t^\alpha\beta$, будемо мати

$$\mathfrak{D}_x^k\varphi_\alpha(zt^{-1},x) = t^\alpha\int_0^\infty e^{-z^\alpha\beta}\mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta,x)d\beta.$$

За допомогою нерівності (6) знаходимо

$$|\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1}, x)| \le$$

$$\le ct^\alpha \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re} z^\alpha)\beta - cp(\beta, \widehat{x})} \beta^{-\frac{n+|k|}{2b}} d\beta t^{-\frac{n+|k|}{2b}\alpha}.$$

Скористаємось нерівністю [2, с. 153]

$$-A\beta - C_1(|\widehat{x}|\beta^{-\frac{1}{2b}})^q \le -C_0 A^{\frac{1}{2b}} |\widehat{x}|, \qquad (17)$$

де $C_0 = \dfrac{2bC_1^{\frac{1}{q}}}{(2b-1)^{\frac{1}{q}}}$, $0 < c_1 < c$, $A > 0$.

Якщо скористатись лемою 7.1 [2], то для $\mathrm{Re} Z^\alpha \ge c(\varphi) > 0$ отримаємо

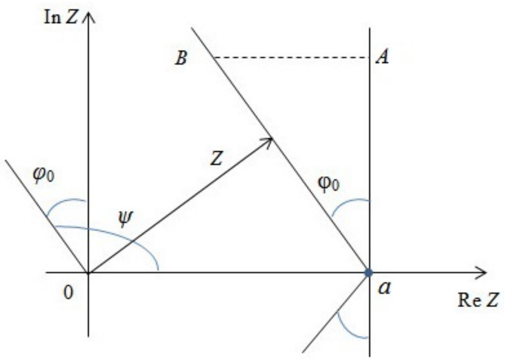
$$|\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1}, x)| \le C_k e^{-(1-\varepsilon)(\mathrm{Re} z^\alpha)^{\frac{1}{2b}} |\widehat{x}|} \times$$

$$\times t^{-\frac{n+|k|-2b}{2b}\alpha} \int_0^\infty e^{-\varepsilon(\mathrm{Re} z^\alpha)\beta - \varepsilon\rho(\beta, \widehat{x})} \beta^{-\frac{n+|k|}{2b}} d\beta \le$$

$$\le C_k e^{-C_\varepsilon (\mathrm{Re} z^\alpha)^{\frac{1}{2b}} |\widehat{x}|} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}) \times$$

$$\times t^{-\frac{n+|k|-2b}{2b}\alpha}. \qquad (18)$$

В інтегралі (16) для $\mathfrak{D}^k G_1(t,x)$ підінтегральна функція $\Psi_k(z) \equiv e^z z^{\alpha-1} \mathfrak{D}_z^k \varphi_\alpha(zt^{-1}, x)$ аналітична в області $Z = \{Z = (a_1 + iv_1)e^{i\varphi_0}, a_1 > 0, |v_1| < \infty, 0 < \varphi_0 < \dfrac{\varepsilon}{4}\}$.



У області Z міститься область $C_a = \{Z, Z = a + ive^{i(\mathrm{sgn} v)\varphi_0}, a > 0\}$, яка складається із двох прямих на площині, що виходять з точки $(a, 0)$ під кутом φ_0 з уявною віссю при $v \ge 0$ і $(-\varphi_0)$ при $v \le 0$.

Якщо $z = |z|e^{i\psi}$, $z \in C_a$, $\cos\psi = \frac{\mathrm{Re} z}{|z|}$, то

$$\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi_0 \le \cos\psi =$$

$$= \frac{\mathrm{Re} z = a - |v| \sin\varphi_0}{\sqrt{(a - v\sin\varphi_0)^2 + v^2\cos^2\varphi_0}} \le 1, \qquad (19)$$

тобто $0 \le \psi(v) \le \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}$, $v \in (0, \infty)$; $\cos\psi(0) = 1 + \cos\psi(\infty) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + \varphi_0) < 0$, $a\cos\varphi_0 \le |z(v)| \le \sqrt{v^2 + a^2}$.

У формулі (16) інтеграл по контуру Бромвіча $(a - i\infty; a + i\infty)$ можна замінити на контур C_a. Справді, нехай $z = z_1 + iz_2$. Тоді функція $f(z)$ в інтегралі внаслідок оцінки (6) задовольняє нерівність

$$|f_k(z)| \le e^{\mathrm{Re} z} |z|^{\alpha-1} e^{c[\mathrm{Re}(z_1+iz_2)^\alpha]^{\frac{1}{2b}}} \le$$

$$\le C_k e^{z_1 - c|z|^{\frac{\alpha}{2b}} \cos\psi_\alpha |\widehat{x}|} \Psi_k(\widehat{x}) |z|^{\alpha-1} \qquad (20)$$

і вона в області Z аналітична. За теоремою Коші (див. рис.)

$$\int_{aA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{C_a \simeq Ba} f(z)dz = 0.$$

Для точок $z \in C_a$ $\cos\alpha\psi \ge \cos\alpha\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = \gamma > 0$, якщо $0 < \varphi_0 < \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{\pi}{2}$. Тому $\lim\limits_{z_2 \to \infty} f_k(z_1 + iz_2) = 0$, $z_1 \in (-\infty, a]$, $\widehat{x} \ne 0$

$$\lim_{z_2 \to \infty} \int_{AB} f_k(z_1 + iz_2) dz_1 =$$

$$= \lim_{z_2 \to \infty} \int_{-\infty}^{a} f_k(z_1 + iz_2) dz_1 = 0.$$

Отже, знаходимо, що

$$\lim_{z_2 \to \infty} \int_{aA} f_k(z_1 + iz_2) dz_1 = \int_{a - i\infty}^{a + i\infty} f(z)dz =$$

$$= \int_{Ca^*} f(z)dz.$$

Тепер оцінимо похідні $\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)$. Згідно з формулою (16)

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) = 2\pi i \int_{C_a} f_k(z,t,x)dz =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f_k(z(v),t,x)dv.$$

Враховуючи нерівності $\mathrm{Re}z^\alpha \geq \gamma > 0$, (19), (20), будемо мати при $|\widehat{x}| < 1$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{a - v\sin\varphi_0 - c(a\cos\varphi_0)^{\frac{\alpha}{2b}}\gamma|\widehat{x}|}(a\cos\varphi_0)^{\alpha-1}dv\times$$

$$\times\Psi_k(\widehat{x}) \leq C_k(a)t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}). \quad (21)$$

Якщо $|\widehat{x}| \geq 1$, то в інтегралі $\mathfrak{D}_x^k G_1$ по контуру C_a виконаємо заміну $z = |\widehat{x}|^y\xi$. Отримаємо

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a|\widehat{x}|^y} e^{\xi|\widehat{x}|^y}\mathfrak{D}_x^k G_1(t,\widehat{x}^y\xi,x)|\xi|^{-1}d\xi|\widehat{x}|^{y\alpha}t^{-\alpha}.$$

Знову з допомогою тих же нерівностей знаходимо

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{(a-v\sin\varphi_0)|\widehat{x}|^y - c_2 a^{\frac{\alpha}{2b}}\gamma|\widehat{x}||\widehat{x}|^y\frac{\alpha}{2b}}dv|\widehat{x}|^{y\alpha}.$$

Оскільки $q\dfrac{\alpha}{2b}+1 = \dfrac{2b}{2b-\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{2b}+1 = \dfrac{2b}{2b-\alpha} = q$ і при досить малому $a : a - c_2 a^{\frac{\alpha}{2b}} = -c_3$, $c_3 > 0$, то для $|\widehat{x}| \geq 1$ справджується нерівність

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})\times$$

$$\times t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}|\widehat{x}|^{y\alpha}e^{-c_3|\widehat{x}|^{y_0}}\int\limits_0^\infty e^{-v\sin\varphi_0}dv \leq$$

$$\leq C_k\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})e^{-c_4|\widehat{x}|^q}t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}. \quad (22)$$

Знаходимо ще похідну $\mathfrak{D}_t G_1$ із (16):

$$\mathfrak{D}_t G_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1}\Phi_\alpha(p,x)dp.$$

Якщо виконати заміну $p = zt^{-1}$, а в інтегралі $\Phi_\alpha(zt^{-1},x)$ ввести заміну $\tau = \beta t^\alpha$, то отримаємо

$$\mathfrak{D}_t G_1(t,x) = \frac{1}{2\pi i}t^{-1}\int\limits_{at-i\infty}^{at+i\infty} e^z z^\alpha\Phi_\alpha(t^{-1}z,x)dz =$$

$$= \frac{t^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}dz\int\limits_0^\infty e^{-\beta z^\alpha + z}z^\alpha G_0(\beta t^\alpha z,x)d\beta.$$

Внаслідок переходу в інтегралі по z на контур інтегрування C_a і повторенням проведених оцінок будемо мати

$$|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ct^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}}\Psi_{n-2b}(\widehat{x})e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}}.$$

Звідси для $|x| < t^{\frac{\alpha}{2b}}$

$$|\mathfrak{D}_t G_1| \leq$$

$$\leq e^{-|\widehat{x}|^{y_0}}\begin{cases} t^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}},\ n < 2b, \\ t^{-1-\alpha}|x|^{-n+2b},\ n > 2b, \\ t^{-|1+\alpha|}\left[\ln\dfrac{|x|}{t^{\frac{\alpha}{2b}}}+1\right], n = 2b, \end{cases} \quad (23)$$

а при $|x| > t^{\frac{\alpha}{2b}}$ отримуємо $|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ce^{-|\widehat{x}|^y}$.

Ще оцінимо дробову похідну $\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)$ і порівняємо з $\mathfrak{D}_t G_1$. Функція $G_1(t,x)$ при $(t,x) \neq 0$ задовольняє рівняння

$$\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x) = \sum_{|k|\leq 2b} A_k\mathfrak{D}^k G_1(t,x).$$

Згідно з нерівністю (22) маємо, що

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)| \leq C|\mathfrak{D}_x^{2b}G_1(t,x)| \leq$$

$$\leq C\Psi_n(\widehat{x})t^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}}e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}}.$$

Тому,

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)| \leq$$

$$\leq c\begin{cases} t^{-\alpha}|x|^{-n},\ |x| < t^{\frac{\alpha}{2b}}, \\ t^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}}e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}},\ |x| > t^{\frac{\alpha}{2b}}. \end{cases} \quad (24)$$

Властивості функції Гріна

Властивість 1. *Функція $G_1(t,x)$ має таку властивість*

$$I_1 = \int\limits_{E_n} G_1(t,x-\xi)d\xi = E_\alpha(A(0)t^\alpha) =$$

$$= E_\alpha(A_0 t^\alpha). \qquad (25)$$

Зокрема, якщо в рівнянні (1) $A_0 = 0$, *то* $E_\alpha(0) = 1$ *і тому*

$$\int_{E_n} G_1(t, x-\xi)d\xi = 1.$$

Доведення. Згідно з формулою (15)

$$I_1 = \int_{E_n} G_1(t, x-\xi)d\xi =$$

$$= \int_{E_n}\int_{E_n} e^{i\sigma(x-\xi)} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha)d\sigma d\xi.$$

Після заміни порядку інтегрування за властивістю $\delta(x)$–функції отримаємо

$$I_1 = \int_{E_n} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha) \int_{E_n} e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma =$$

$$= \int_{E_n} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha)\delta(\sigma)d\sigma =$$

$$= E_\alpha(A(0)t^\alpha) = E_\alpha(A_0 t^\alpha).$$

Аналогічно доводиться таке твердження.

Властивість 2. *Для компоненти* $G_2(t, x)$ *правильна рівність*

$$I_2(t) = \int_{E_n} G_2(t, x-\xi)d\xi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \text{ якщо } A_0 = 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + o(t^{\alpha-1}), \text{ якщо } A_0 \neq 0, t \to 0. \end{cases}$$

§2. Задача Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами

1. Властивості об'ємного потенціала

Розглянемо рівняння з коефіцієнтами, які залежать від параметра $y \in E_n$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(y)\mathfrak{D}^k u.$$

Якщо $A_k \in C^{(\omega)}(E_n)$, то для приросту функції Гріна правильна нерівність [5]

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_0(t, x-\xi; y)| \le$$

$$\le C_k \omega_k(|\Delta y|)(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)^{q_0}}.$$

Тут $\omega(\eta)$ – модуль неперервності $A_k(y)$, який надалі задовольняє умову Діні

$$F(\eta) = \int_0^\eta \omega(t)t^{-1}dt < \infty.$$

Компоненти функції Гріна $G_1(t, x, \eta)$, $G_2(t, x, \eta)$, які визначаються формулами (10), наприклад

$$G_1(t, x-\xi; y) = \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-p^\alpha \tau} G_0(\tau, x-\xi; y)d\tau \quad (26)$$

також по параметру y задовольнять відповідні нерівності (11) – (13), (23)

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_1(t, x-\xi; y)| \le C_k \omega(|\Delta y|)\times$$

$$\times e^{-c\rho_0(\widehat{x-\xi})} t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x-\xi}).$$

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_t G_1(t, x-\xi; y)| \le C_k \omega(|\Delta y|) \times \qquad (27)$$

$$\times t^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}} e^{-c\rho_0(\widehat{x-\xi})} \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}).$$

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_2(t, x-\xi; y)| \le \omega(\Delta y)\times$$

$$\times t^{-1+\alpha+\alpha\frac{n+|k|}{2b}} \Psi_{n+|k|-2b}(x-\xi) e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}.$$

Далі розглянемо об'ємний потенціал

$$V(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau, \xi)d\xi.$$

Похідні $\mathfrak{D}_x^{2b}V$ знаходяться за формулою

$$\mathfrak{D}_x^{2b}V(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} \mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi)\times$$

$$\times[f(\tau, \xi) - f(\tau, x)]d\xi + \int_0^t d\tau\times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \big[\mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi)-$$

$$-\mathfrak{D}_x^{-2b} G_2(t-\tau, x-\xi, x)\big]\, d\xi f(\tau, x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_x^{-2b} G_2(t-\tau, x-\xi, x) d\xi f(\tau, x) \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 f. \qquad (28)$$

Інтеграли I_1, I_2 оцінюються однаково з використанням умови Діні функції f по x і цієї умови для $G_2(t,\sigma,x-\xi,x)$ по третьому аргументу. Так для I_1 знаходимо

$$|I_1| \le c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{E_n} e^{-c\left(\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}} \Psi_n(\widehat{x-y}) \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega =$$

$$= c\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{|x-y|\le (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha} |x-y|^{-n} \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega +$$

$$+ c\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{|x-y|> (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}} \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega.$$

У інтегралі першого доданку перейдемо до сферичної системи координат, а в другому доданку ще використаєм властивість модуля неперервності: $\omega(t)t^{-1} < 2\omega(\tau)\tau^{-1}$ для $0<\tau<t$. Будемо мати нерівність

$$|I_1| \le c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)} \int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \omega_f(\rho)\rho^{-1} d\rho |f|_\omega +$$

$$+ c|f|_\omega \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}^{\infty} e^{-c\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \rho^{n-1} \times$$

$$\times \omega_f((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})(t-\tau)^{-\frac{\alpha n}{2b}} d\rho.$$

Звідси, покладаючи $\rho = (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}} z$, дістаємо що

$$|I_1| \le c|f|\omega \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} F_f(\tau)\tau^{-1} d\tau + F_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}) \equiv$$

$$\equiv c|f|\omega \Phi_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Така ж нерівність справджується і для I_2 тільки з модулем неперервності коефіцієнтів рівняння.

Інтеграл I_3 дорівнює нулеві за властивістю функції G_2. Отже, остаточно

$$|\mathfrak{D}_x^{2b} V(t,x)| \le c_0 |f|_\omega [F_k[t^{\frac{\alpha}{2b}}] + \Phi_f[t^{\frac{\alpha}{2b}}]]. \quad (29)$$

Тепер знайдемо дробову похідну $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)$ та оцінимо її вираз. Згідно з визначенням $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \mathfrak{D}_t I_t^{1-\alpha} V(t,x)$. Позначимо $I_t^{1-\alpha}V(t,x) \equiv W(t,x)$ і виразимо W через функцію G_1, враховуючи, що $G_2(t, x-\xi,\xi) = \mathfrak{D}_t^{1-\alpha} G_1(t, x-\xi, \xi)$. Очевидно, маємо

$$W(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^\tau d\beta \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_\tau^{1-\alpha} G_1(\tau-\beta, x-\xi, \xi) f(\beta,\xi) d\xi.$$

Змінимо порядок інтегрування, отримаємо

$$W(t,x) = \int\limits_0^t d\beta \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right) \int\limits_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_\tau^{1-\alpha} G_1(\tau-\beta, x-\xi, \xi) f(\beta,\xi) d\xi.$$

Оскільки $I_t^{1-\alpha}(\mathfrak{D}_t^{1-\alpha} f) = f$, то

$$W(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} G_1(\tau-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau,\xi) d\xi. \qquad (30)$$

Отже, $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \mathfrak{D}_t W$. Але $\mathfrak{D}_t W$ знаходиться за формулою, яка аналогічна в [2]. Тому отримуємо, що

$$\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \int\limits_{E_n} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau,\xi) d\xi|_{\tau=t} +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau,\xi) d\xi =$$

$$= f(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \frac{\partial G}{\partial t} [f(\tau,\xi) - f(\tau,x)] d\xi +$$

$$+ f(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \left[\frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, x)\right] d\xi f(\tau, x) +$$

$$+\int\limits_0^t f \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{E_n} G_1(t-\tau, x-\xi, x) d\xi =$$

$$= f + H_1 + H_2 + H_3.$$

Інтеграли H_1 і H_2 оцінюються однаково з використанням гельдеровості $f(t,x)$ і G_1 по третьому аргументу та оцінки (27):

$$|H_1| \le c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \times$$

$$\times \omega_f(|x-\xi|) \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi = c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|x-\xi| \le (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \omega_f(|x-\xi|) \times$$

$$\times \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi + c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|x-\xi| \ge (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \times$$

$$\times \omega_f(|x-\xi|) \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi = H_1^{(1)} + H_1^{(2)}.$$

Для $H_1^{(1)}$ внаслідок переходу до сферичної системи координат отримуємо нерівність

$$H_1^{(1)} \le c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{\omega\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right)}{t-\tau} \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} p^{n-1}}{pn-2b} dp = c|f|_\omega F(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Інтеграл $H_1^{(2)}$ оцінюється аналогічно, але при цьому використовується властивість модуля неперервності

$$H_1^{(2)} \le c|f|_\omega \int\limits_0^t \frac{\omega((t-\tau)^\alpha)}{t-\tau} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}^\infty e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \rho^n (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+\alpha}{2b}} d\rho \le$$

$$\le c|f|_\omega F(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Для H_3 правильна нерівність $|H_3| \le c|f|_c$, бо $\int\limits_{E_n} G_1(t, x-\xi, x) d\xi$ за властивістю 1 має обмежену похідну по t. Отже, отримуємо нерівність

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)| \le$$

$$\le |f|_c + C_0 \left[F_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}) + F_k(t^{\frac{\alpha}{2b}})\right] |f|_\omega. \quad (31)$$

Теорема 2 (про об'ємний потенціал). *Нехай коефіцієнти A_k рівняння належать класу $C^{(\omega_k)}(E_n)$, а щільність потенціала $V(t,x)$ $f \in C^{(\omega_f)}(E_{n^+})$, причому модулі $\omega_k(t)$ і $\omega_f(t)$ задовольняють умови $\int\limits_0^t \omega_k(\tau)\tau^{-1} d\tau$, $\Phi_f(t) = \int\limits_0^t F_t(\tau)\tau^{-1} d\tau < \infty$, то $V(t,x)$ має неперервні похідні $\mathfrak{D}_x^k V(t,x)$, $|k| \le 2b$, $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)$, які задовільняють нерівності* (29), (31),

$$|\mathfrak{D}_x^k V(t,x)| \le C_k |f|_c t^{\frac{2b-|k|}{2b}\alpha}), \quad |k| < 2b.$$

2. Зведення задачі Коші до інтегрального рівняння, побудова резольвенти

У шарі $\Pi = (0,T) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для модифікованого рівняння

$$\mathfrak{D}_t^{*\alpha} u \equiv \mathfrak{D}_t^{\alpha} u - \frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k(x)\mathfrak{D}_k u + f(t,x), \qquad (32)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (33)$$

Позначимо через $\left\{G_1^{(0)}(t,x-\xi,y),\ G_2^{(0)}(t,x-\xi,y)\right\}$ функцію Гріна для рівняння із "замороженими"коефіцієнтами в групі старших членів

$$\mathfrak{D}_t^{*\alpha} u = \sum_{|k|=2b} A_k(y)\mathfrak{D}^k u + f(t,x), \qquad (34)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Розв'язок задачі (32), (33) відшукуємо у вигляді суми потенціалів

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} G_1^{(0)}(t,x-\xi,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} G_2^{(0)}(t-\tau,x-\xi,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi, \qquad (35)$$

де апріорі $\mu(\tau,\xi)$ – шукана функція, яка при $(t,x) \ne 0$ задовольняє нерівномірну умову Діні. Функція $G_1^{(0)}(t,x-\xi,y)$ задовольняє однорідне рівняння (32), а $G_2^{(0)}(t,x-\xi,y)$ – рівняння $\mathfrak{D}_t^{\alpha} G_2^{(0)}(t,x-\xi,y) = \sum\limits_{|k|=2b} A_k(y)\mathfrak{D}_x^k G_2^{(0)}$.

Якщо до функції $u(t,x)$ із (35) застосувати оператор $\mathfrak{D}_t^{*\alpha} - \sum\limits_{|k|\le 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k$ і задовольнити рівняння (32), то на основі формул для похідних потенціалів (28), (29) для $\mu(t,x)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\mu(t,x) = \mathcal{F}(t,x) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int K(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi, \qquad (36)$$

де

$$\mathcal{F}(t,x) = f(t,x) + \frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} +$$

$$+ \int\limits_{E_n} \sum_{|k|\le 2b} [A_k(x) - A_k(\xi)\delta_{2b|k|}]\mathfrak{D}_x^k \times$$

$$\times G_1^{(0)}(t,x-\xi,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \qquad (37)$$

$\delta_{2b|k|} = 1$, якщо $|k| = 2b$; $\delta_{2b|k|} = 0$, якщо $|k| < 2b$.

$$|\mathcal{F}(t,x)| \le |f| + C|\varphi|_c t^{-\alpha} \int\limits_{E_n} e^{-\rho|\widehat{x-\xi}|^q} \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} d\xi \le c\left(|f|_c + \frac{|\varphi|}{t^{\alpha}}\right)$$

$$K(t-\tau,x,\xi) \equiv \sum_{|k|=2b} [A_k(x) - A_k(\xi)]\mathfrak{D}_x^k \times$$

$$\times G_2^{(0)}(t-\tau,x-\xi,\xi) + \sum_{|k|<2b} A_k(x)\mathfrak{D}^k G_2^{(0)}. \qquad (38)$$

Згідно з нерівностями (27) для $G_2^{(0)}$ і умовою $A_k \in c^{(\omega)}$ маємо

$$|K(t-\tau,x,\xi)| \le$$

$$\le C\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}|t-\tau|^{-1}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}, \qquad (39)$$

де $\widehat{x-\xi} = (x-\xi)/(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}$.

При побудові резольвенти для ядра K скористаємося такою лемою.

Лема. *Для об'ємного інтеграла*

$$I_t(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|} \frac{\omega(|y-\xi|^n)}{|y-\xi|^n} dy$$

справджується нерівність

$$I_t(t,\tau,x,\xi) \le C\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}\Phi\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right),$$

$$C = C(\varepsilon,n),\ \varepsilon > 0.$$

Доведення. Проведемо відрізок, який з'єднує точки x і ξ, і через його середину проведемо перпендикулярну площину. Через E_x позначимо ту частину простору, яка містить точку x, а через E_ξ – точку ξ. Якщо $y \in E_x$, то очевидно, що $|y-\xi| \geq \dfrac{|x-\xi|}{2}$, якщо $y \in E_\xi$, то $|x-y| \geq \dfrac{|x-\xi|}{2}$. Тепер інтеграл I запишемо у вигляді

$$I = \int_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int_{E_x} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy +$$

$$+ \int_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int_{E_\xi} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy =$$

$$= I^{(x)} + I^{(\xi)}.$$

За властивістю монотонності модуля неперервності $\omega(h)$ маємо, що

$$I^{(x)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \int_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \times$$

$$\times \left(\int_{|x-y| \leq (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} dy + \right.$$

$$\left. + \int_{|x-y| \geq (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \right).$$

Внаслідок переходу до сферичної системи координат з центром в точці x звідси отримуємо

$$I^{(x)} \leq 2^n S_n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{dh}{h} \int_0^h \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho + \right.$$

$$\left. +2 \int_\tau^t \frac{\omega([t-\beta]^{\frac{\alpha}{2b}})}{[t-\beta]^{\frac{\alpha}{2b}+1}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\frac{\rho}{(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} d\rho \right).$$

Покладемо $\rho = (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}\eta$, дістаємо нерівність

$$I^{(x)} \leq C_n \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \times$$

$$\times \left[\Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) + F((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \right].$$

В інтегралі $I^{(\xi)}$ очевидно $|x-y| \geq \dfrac{1}{2}|x-\xi|$, тому

$$I^{(\xi)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \times \right.$$

$$\times \int_{|y-\xi| \leq (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy +$$

$$\left. + \int_{|y-\xi| \geq (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy \right).$$

Звітси знаходимо

$$I^{(\xi)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int_0^{(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{F(n)}{n} dn + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^t \frac{\omega(|t-\beta|^{\frac{\alpha}{2b}})}{|t-\beta|^{\frac{n\alpha}{2b}}} \int e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} dy d\beta \right).$$

Якщо в останньому інтегралі виконати заміну $x - y = (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}} z$, то для $I(\xi)$ отримуємо потрібну нерівність, таку як для $I^{(x)}$.

Примітка. Аналогічно доводиться нерівність

$$I_\tau(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t \frac{d\beta}{\beta-\tau} \int_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{y-\xi}|^q} \times$$

$$\times \omega(|x-y|)|x-y|^{-n} \omega(|y-\xi|)|y-\xi|^{-n} dy \leq$$

$$\leq c\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \Phi\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right).$$

Тепер оцінимо повторні ядра K_m для $K = K_1$:

$$K_m(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} K(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times K_{m-1}(\beta,\tau,y,\xi), \quad (m = 2,3,...). \qquad (40)$$

Користуючись нерівністю для K_1 знаходимо

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^2 \int_\tau^t \frac{d\beta}{(t-\beta)(\beta-\tau)} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy.$$

Беручи до уваги нерівність $|\widehat{x-y}|^q + |\widehat{y-\xi}|^q \geq |\widehat{x-\xi}|^q$, отримуємо

$$|K_2| \leq C_1^2 (t-\tau)^{-1} e^{-(c-\varepsilon)|x-\xi|^q} \left[\int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{\beta-\tau} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-\xi}|^q} \frac{\omega(|x-y|)\omega(|y-\xi|)}{|x-y|^n |y-\xi|^n} dy + \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{t-\beta}$$

$$\left. \times \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)\omega(|y-\xi|)}{|x-y|^n |y-\xi|^n} dy \right] \equiv$$

$$\equiv c_1^2 \frac{\omega(|x-y|)}{(t-\tau)|x-\xi|^n} [I_\tau + I_t] \times$$

$$\times \exp\{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q\}, \quad 0 < \varepsilon < c.$$

Звітси з допомогою леми приходимо до нерівності

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^2 C_n \Phi \left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}} \right] \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{(t-\tau)|x-\xi|^n} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (41)$$

Для наступного ядра K_3 з врахуванням оцінок (40), (41) маємо, що

$$|K_3(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^3 C_n \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})}{(\beta-\tau)(t-\beta)} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q - (c-\varepsilon)|y-\xi|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy \leq$$

$$\leq C_1^3 C_n e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t} \left(\frac{1}{\beta-\tau} + \frac{1}{t-\beta} \right) \Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \times$$

$$\times \int e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-x|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy.$$

Звідси випливає нерівність

$$|K_3| \leq C_1^3 C_n^2 e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t} \left[\frac{\Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})}{\beta-\tau} \cdot F((t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}) + \right.$$

$$\left. + \Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \cdot \frac{F((t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}})}{t-\beta} \right] d\beta \times$$

$$\times \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}.$$

Остаточно дістаємо нерівність

$$|K_3(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^3 C_n^2 e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \Psi(t-\tau), \qquad (42)$$

де $\Psi(t) \equiv \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} \Phi(\tau)\tau^{-1} d\tau + \Phi(t^{\frac{\alpha}{2b}}) \leq c_0 \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} \Phi(\tau)\tau^{-1} d\tau$, $c_0 > 0$. По індукції встановлюються оцінки

$$|K_m(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^m C_n^{m-1} (t-\tau)^{-1} \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} \Psi^{m-1}(t-\tau), \qquad (43)$$

$$(m = 2, 3, ...).$$

Сума ряду Неймана – резольвента задовольняє нерівність

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1 \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n (t-\tau)} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=1}^{\infty} (C_1 C_n \Psi)^m \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) + 1 \right].$$

Якщо $C_1 C_n \Psi(t-\tau) < 1$ для $0 < t-\tau \leq T$, то ряд Неймана в області $|x-\xi| \geq \delta > 0$, $0 < t-\tau \leq T$ рівномірно і абсолютно збіжний, при цьому

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-1} \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \times$$

$$\times e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (44)$$

3. Оцінка розв'язку інтегрального рівняння

Розв'язок рівняння (36) визначається за допомогою резольвенти формулою

$$\mu(t,x)=\mathcal{F}(t,x)+\int_0^t d\tau\times$$

$$\times\int R(t,\tau,x,\xi)\mathcal{F}(\tau,\xi)d\xi, \qquad (45)$$

Користуючись нерівністю (27) для $G_1^0(t,x-\xi,\xi)$ і умовно, що $\varphi\in C^{(\omega_\varphi)}$, $f\in C^{\omega_\tau}(Q)$ отримуємо

$$|\mathcal{F}(t,x)|\le|f|+\frac{|\varphi|_c}{t^\alpha}+C\int_{E_n}\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n t^\alpha}\times$$

$$\times e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}|\varphi|_c d\xi\le C\left(|f|_c+\frac{|\varphi|_c}{t^\alpha}\right). \qquad (46)$$

Тому для другого доданка в (45) правильна оцінка

$$|R\times\mathcal{F}|\le C\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}\times$$

$$\times(|f|_c+\tau^{-\alpha}|\varphi|_c)d\xi\le C\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}\times$$

$$\times\left[\int_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho+\omega(t+\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\times$$

$$\times(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c)d\tau.$$

Звідси випливає нерівність

$$|R\times\mathcal{F}|\le C\Phi(t^{\frac{\alpha}{2b}})\left(\frac{|\varphi|_c}{t^\alpha}+|f|_c\right),$$

тобто $\mu(t,x)$ також задовольняє нерівність (46).

Приріст $\Delta_x\mu(t,x)$ оцінимо на основі формули (36). Розглянемо в цій формулі інтегральний доданок, який запишемо у вигляді суми

$$\Delta_x(K\times\mu)=\int_0^{t-\eta}d\tau\int_{|x+h-\tau|\le 2|h|}[K(t,\tau,x+h,\xi)-$$

$$-K(t,\tau,x,\xi)]\mu(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^{t-\eta}d\tau\int_{|x+h-\xi|\ge 2|h|}\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t-\eta}^t d\tau\int_{E_n}K(t,\tau,x+h,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-\int_{t-\eta}^t d\tau\int K(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi\equiv$$

$$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4, \qquad (47)$$

де $\eta=|h|^{\frac{2b}{\alpha}}$, $h=\Delta x$, $|\Delta x|<\frac{1}{2}t^{\frac{\alpha}{2b}}$, $0<\eta<\frac{t}{4}$.

В інтегралі I_1 доданки оцінимо по модулю за нерівностями (39), (46). Будемо мати

$$|I_1|\le c\int_0^{t-\eta}\frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}\int_{|x+h-\xi|\ge 2|h|}\Big[e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}\times$$

$$\times\omega(|x+h-\xi|)|x+h-\xi|^{-n}+$$

$$+e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}\Big]d\xi\times|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c.$$

Скористаємось властивістю адитивності модуля $\omega(t+\tau)\le\omega(t)+\omega(\tau)$ і нерівністю

$$\int_{|x+h-\xi|\le 2h}\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}d\xi\le$$

$$\le\int_{|x-\xi|\le 3h}\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}d\xi\le$$

$$\le S_n\int_0^{3|h|}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho\le 3S_nF(|h|).$$

Тоді отримуємо, беручи до уваги, що $\eta<|\Delta x|^{\frac{2b}{\alpha}}<2^{-\frac{2b}{\alpha}}t$,

$$|I_1|\le CF(|h|)\left[\int_0^{\frac{t}{2}}\frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}+\int_{\frac{t}{2}}^{t-\eta}\frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}\right]\times$$

$$\times(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c)\le CF(|h|)\Big[\frac{2}{t}t^{1-\alpha}+$$

$$+\frac{2^\alpha}{t^\alpha}\ln\frac{1}{|\Delta x|}\Bigg] (|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c).$$

Отже,

$$|I_1|\le C(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|_c)F(|\Delta x|)\times$$
$$\times\left|\ln\frac{1}{(|\Delta x|)}\right|. \qquad (48)$$

Для оцінки інтеграла I_2 запишемо приріст ядра $K(t,\tau,x,\xi)$ у вигляді

$$\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)=\sum_{|k|=2b}\big[\Delta_x A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2+$$
$$+(A_k(x)-A_k(\xi))\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_2\big]+$$
$$+\sum_{|k|<2b}\big[\Delta_x A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2+$$
$$+A_k(x)\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_2(t-\tau,x-\xi,\xi)\big].$$

Скористаємось теоремою про середнє значення, нерівностями $|x+h-\xi|>2|h|$ для G_2 і умовою $|\Delta x|\le\frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}$. Знаходимо

$$|\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)|\le c\omega(|\Delta x|)\times$$
$$\times[|x-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}+e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}|x+h-\xi|^{-n}]\times$$
$$\times(t-\tau)^{-1}. \qquad (49)$$

Тому маємо для I_2 оцінку

$$|I_2|\le\omega(h)\int\limits_0^{t-h}\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$
$$\times\int\limits_{|x+h-\xi|\ge2|h|}\Big[|x-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}+$$
$$+|x+h-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}\Big]d\xi(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c).$$

Якщо $|x+h-\xi|\ge 2h$, то $|x-\xi|\ge h$, а тому отримаємо

$$|I_2|\le(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c)\omega(|\Delta x|)\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|h|}^{\infty}\frac{e^{-\widehat{\rho}^q}}{\rho}d\rho+\int\limits_{|2h|}^{\infty}e^{-c\widehat{\rho}}\rho^{-1}d\rho\right]t^{-\alpha}\left|\ln|\Delta x|\right|,$$

тобто

$$|I_2|\le C\omega(|\Delta x|)\ln^2|\Delta x|(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|_c). \qquad (50)$$

Інтеграли I_3 і I_4 оцінюються однаково. За допомогою (39), (46) знаходимо

$$|I_3|\le\int\limits_{t-h}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\Bigg[\int\limits_{|x+h-\xi|<(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\omega(|x+h-\xi|)\times$$
$$\times|x+h-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}d\xi+$$
$$+\int\limits_{|x+h-\xi|\ge(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\omega(|x+h-\xi|)|x+h-\xi|^{-n}\times$$
$$\times e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}d\xi\Bigg](|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c)\le\int\limits_{t-\eta}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$
$$\times\left[\int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho+\omega((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})\right](|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c).$$

Звідси

$$|I_3|\le\left(\int\limits_0^{|\Delta x|}\frac{\mathcal{F}(\tau)}{\tau}d\tau+F(|\Delta x|)\right)(|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c).$$

З нерівності для I_1, I_2, I_3 випливає оцінка

$$|\Delta_x(K\times\mu)|\le C(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|)\times$$
$$\times\Bigg[F(|\Delta x|)\left|\ln\frac{1}{|\Delta x|}\right|+\omega(|\Delta x|)\ln^2|\Delta x|+$$
$$+\Phi(|\Delta x|)\Bigg] \qquad (51)$$

для $|\Delta x|<t^{\frac{\alpha}{2b}}/2$

Щоб оцінити приріст $\Delta_x\mathcal{F}(t,x)$ у формулі (37) досить інтегральний доданок (позначимо його через $H(t,x)$) зобразити у вигляді суми інтегралів

$$H=\int\limits_{|x+n-\xi|\le2|h|}\sum[A_k(x+h)-A_k(\xi)\delta_{2bk}]\times$$
$$\times\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}\varphi d\xi-\int\limits_{|x+n-\xi|\le2|h|}\sum[A_k(x+h)-$$
$$-A_k(\xi)\delta_{2bk}]\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}\varphi d\xi+\int\limits_{|x+n-\xi|\ge2|h|}\sum_{|k|\le2b}\Delta_x\times$$

$$\times A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}(t, x-h-\xi, \xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{|x+n-\xi|\geq 2|h|}\sum_{|k|\leq 2b}[A_k(x)-A_k(\xi)v_{\nu k}]\times$$

$$\times\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_1(t, x-\xi, \xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Оцінюючи з допомогою нерівності (27) для $G_1^{(0)}$ доданки як відповідні вирази в інтегралах I_1, I_2 для $|\Delta x| \leq |h| < t^{\frac{\alpha}{2b}}/2$ отримаємо

$$|H| \leq Ct^{-\alpha}\int\limits_0^{2|h|}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho|\varphi|_c + t^{-\alpha}\omega(|\Delta x|)\times$$

$$\times\left|\ln\frac{1}{|\Delta x|}\right||\varphi|_c. \qquad (52)$$

Якщо тепер порівняти нерівності (51), (52) і врахувати, що функції $F(|h|)\ln\dfrac{1}{|h|}$, $\omega(h)\ln^2|h|$ мають такий порядок при $h\to 0$ як $\Phi(h) = \int\limits_0^h \dfrac{F|\tau|}{\tau}d\tau = A^2\omega(h)$, то отримуємо остаточну нерівність

$$|\Delta\mu(t,x)| \leq C[\omega_\varphi(|h|) + \omega_f(|h|)+$$

$$+\Phi(|h|)](|\varphi|_\omega t^{-\alpha} + |f|_{\omega_f}). \qquad (53)$$

Для приросту резольвенти встановлюється така нерівність

$$|\Delta_x R(t,\tau,x,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-1}\omega(|\Delta x|)\times$$

$$\times\left[|x+\Delta x-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n}\right]e^{-c|\widehat{x^*-\xi}|^q}, \qquad (54)$$

де $|\widehat{x^*-\xi}| = \min|x+\Delta x-\xi|, |x-\xi|$.

Теорема 3 (про коректність). *Нехай рівняння* (32) *параболічне і функції, які визначають задачу* (32), (33), *належать класам:* $A_k \in C^{(\omega)}(E_n)$, $f \in C^{(\omega_f)}_{([0,T]\times E_n)}$, $\varphi \in C^{(\omega_\varphi)}_{(E_n)}$. *Модуль неперервності* $\Omega(h) = \omega_\varphi(h) + \omega_t(h) + \Phi(h)$ *задовольняє умову Діні. Тоді розв'язок цієї задачі Коші визначається формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} Z_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\tau d\tau\int\limits_{E_n} Z_2(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi \qquad (55)$$

і для нього виконується нерівність

$$|\mathfrak{D}_x^k u(t,x)| \leq C_k(t^{-\alpha}|\varphi|_c + |f|_\omega), \qquad (56)$$

де $|k| \leq 2b$, $Z_i(t,\tau,x,\xi) = G_i^{(0)}(t,\tau,x,\xi) + W_i$, $W_2 = G_2 \times\times R$, *(*$i = 1,2$*).*

Зображення (55) виникає, якщо $\mu(t,x)$ із (45) підставити в формулу (35) і виділити в ній ядро обереного оператора задачі (32), (33).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Н.О. Вірченко, В.Я. Рибак. Основи дробового інтегро-диференціювання. – К.: ТОВ "Задруга 2007. – 364 с.
2. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
3. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Koshubei. Analitic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. – Basel: Birdhouses, 2004. – 390 p.
4. А.Н. Кочубей. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – **24**, №4. – С. 485–492.
5. М.І. Матійчук. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: ЧНУ, 2010. –248 с.
6. M. Matiychuk. On the fundamental solution of a parabolic equation with fractional derivates // Матеріали X міжнародної наукової крнференції ім. В. Скоробагатька (25-28 серпня 2015 р., Дрогобич/ІПММ). – Львів, 2015. – С. 101.
7. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1955. – 301 с.