УДК 517.95

©2016 р. З.М. Нитребич [1], О.М. Маланчук [1,2]

[1] Національний університет „Львівська політехніка”, м. Львів
[2] Національний медичний університет ім. Д. Галицького, м. Львів

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ НЕТРИВІАЛЬНИХ КВАЗІПОЛІНОМНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Знайдено необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що задовольняють однорідні локальні двоточкові умови. Існування таких розв'язків забезпечується умовою – множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою.

The necessary and sufficient conditions of existence of the nontrivial quasipolynomial solutions of homogeneous partial differential equation of second order in time variable and generally infinite order in $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ spatial variables with constant complex coefficients that satisfy homogeneous local two-point conditions is established. The existence of these solutions is provided by the condition that the set of zeroes of characteristic determinant of problem is not empty.

Вступ. Розв'язність задач з багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі метричного підходу вперше було запропоновано у праці [1]. У цій статті було вказано на проблему малих знаменників, доведено некоректність цих задач, також було показано, що на відміну від задачі Коші відповідна однорідна багатоточкова за часом задача може мати нетривіальні розв'язки. Дослідження задач з багатоточковими умовами для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях з використанням метричного підходу за останні роки істотно розвинуто (див. праці [2, 3, 4] та бібліографію в них).

В необмежених областях (смуга, шар) однозначну розв'язність задач із локальними багатоточковими за часом умовами для рівнянь із частинними похідними досліджували у [5, 6, 7]. У цих працях знайдено простори функцій, у яких для n-точкової задачі є відсутньою проблема малих знаменників.

Зазначимо, що багатоточкова задача для звичайного диференціального рівняння зустрічається в літературі з назвою задача Валле-Пуссена. Такого роду задачі вперше вивчалися у працях [8, 9, 10].

У цій праці встановлено умови існування нетривіальних (квазіполіномного вигляду) розв'язків однорідного диференціального рівняння другого порядку за часом та загалом довільного порядку за просторовими змінними, що задовольняють локальні двоточкові за часом умови. Праця продовжує дослідження [11], де вивчалася двоточкова задача для диференціального рівняння з однією просторовою змінною.

1. Формулювання задачі. В області змінних $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^s$ $(s \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ досліджується множина розв'язків однорідної двоточкової задачі:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = 0, \quad (1)$$

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$$
$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0. \quad (2)$$

У рівнянні (1) вважаємо, що операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ є довільними диференціальними виразами з комплексними коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, а символи $a(\nu)$, $b(\nu)$ цих коефіцієнтів є цілими функціями комплексної векторзмінної $\nu \in \mathbb{C}^s$. Щодо диференціальних поліномів $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з комплексними коефіцієнтами у двоточкових умовах (2) накладаємо припущення, що $|A_1(\nu)|^2+|A_2(\nu)|^2 \neq 0$ та $|B_1(\nu)|^2+|B_2(\nu)|^2 \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$. Крім того, $h>0$.

Однорідна задача (1), (2), очевидно, має тривіальний розв'язок. У статті встановимо необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків задачі (1), (2) і вкажемо метод їх побудови.

2. Допоміжні результати. За рівнянням (1) та умовами (2) складемо характеристичний визначник задачі

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} \Delta_{11}(\nu) & \Delta_{12}(\nu) \\ \Delta_{21}(\nu) & \Delta_{22}(\nu) \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

де

$$\Delta_{11}(\nu)=A_1(\nu), \;\; \Delta_{12}(\nu)=A_2(\nu),$$
$$\Delta_{21}(\nu)=B_1(\nu)T_0(h,\nu)+B_2(\nu)\frac{dT_0}{dt}(h,\nu),$$
$$\Delta_{22}(\nu)=B_1(\nu)T_1(h,\nu)+B_2(\nu)\frac{dT_1}{dt}(h,\nu),$$

функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ є елементами нормальної в точці $t=0$ фундаментальної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)=0, \quad \nu\in\mathbb{C}^s.$$

Розглянемо множину

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^s\colon \;\; \Delta(\nu)=0\right\}, \qquad (4)$$

причому припускаємо, що $M\neq\varnothing$ і $M\neq\mathbb{C}^s$.

Нехай $\alpha\in M$. Розглянемо для комплексного вектора α таку множину мультиіндексів:

$$\Omega(\alpha)=\left\{r=(r_1,\ldots,r_s)\in\mathbb{Z}_+^s : \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r\Delta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha}\equiv\Delta^{(r)}(\alpha)\neq 0\right\},$$

де $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r\Delta(\nu)=\frac{\partial^{|r|}\Delta(\nu)}{\partial\nu_1^{r_1}\ldots\partial\nu_s^{r_s}}$, $|r|=r_1+\ldots+r_s$.

Вважаємо, що $r\geq q$ для двох векторів $r=(r_1,\ldots,r_s)$ та $q=(q_1,\ldots,q_s)$ з $\mathbb{Z}_+^s$, якщо $r_1\geq q_1,\ldots,r_s\geq q_s$. Крім того, позначимо $C_r^q=\frac{r\,!}{q\,!(r-q)!}$, де $r\,!=\prod\limits_{k=1}^{s}r_k!$, $r_k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot r_k$, $0!=1$, O – вектор з нульовими координатами, $x^r=x_1^{r_1}\ldots x_s^{r_s}$, $x=(x_1,\ldots,x_s)\in\mathbb{R}^s$, $\nu\cdot x=\nu_1x_1+\ldots+\nu_sx_s$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{C}^s$.

Лема 1. *Нехай задано аналітичну функцію $\mu(\nu)$, причому $\mu(\alpha)\neq 0$ для деякого $\alpha\in\mathbb{C}^s$, цілу функцію $\gamma(\nu)$, а також поліном $\varphi(x)=\sum\limits_{0\leq|r|\leq n}\varphi_r x^r$, $\varphi_r\in\mathbb{C}$, степінь якого дорівнює $n\in\mathbb{Z}_+$, тобто $\sum\limits_{|r|=n}|\varphi_r|>0$. Тоді існує поліном $\varphi^\mu(x)$ степеня n, для якого виконується така рівність*

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}= =\varphi^\mu\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}. \qquad (5)$$

Доведення. Ліву частину рівності (5) подамо у вигляді

$$\sum_{0\leq|r|\leq n}\varphi_r\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r\left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}= =\sum_{0\leq|r|\leq n}\varphi_r\times \times\sum_{O\leq q\leq r}C_r^q\mu^{(r-q)}(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^q\left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Змінивши порядок сумування, одержимо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=\sum_{0\leq|r|\leq n}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r\left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}\times \times\sum_{q\geq r,\,|q|\leq n}C_q^r\mu^{(q-r)}(\alpha)\varphi_q.$$

Отже, шуканий поліном $\varphi^\mu(x)$ має такий вигляд:

$$\varphi^\mu(x) = \mu(\alpha) \sum_{|r|=n} \varphi_r x^r +$$
$$+ \sum_{0\le|r|\le n-1} x^r \sum_{q\ge r,\,|q|\le n} C_q^r \mu^{(q-r)}(\alpha)\varphi_q.$$

Оскільки $\mu(\alpha) \ne 0$ і $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$, то побудований поліном $\varphi^\mu(x)$ має степінь n і для нього виконується рівність (5). ■

Лема 2. *Нехай $A = A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – диференціальний поліном з комплексними коефіцієнтами, $\alpha \in \mathbb{C}^s$ і $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)e^{\alpha\cdot x}$ – квазіполіном, що належить до ядра оператора A, тобто $\varphi_\alpha \in \ker A$, або $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)\varphi_\alpha(x) \equiv 0$. Тоді $A(\alpha) = 0$ і для довільної аналітичної в околі $\nu = O$ функції $\gamma(\nu)$ виконується тотожність на $\mathbb{R}^s$*

$$\varphi_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} =$$
$$= \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0. \quad (6)$$

Доведення. Зобразимо квазіполіномний елемент ядра оператора A у вигляді

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\{e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Подіємо на останню рівність диференціальним виразом $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$:

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_\alpha(x) = A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\{e^{\nu\cdot x}\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Оскільки $\varphi_\alpha \in \ker A$, то виконується тотожність на $\mathbb{R}^s$:

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0. \quad (7)$$

Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}^s$ маємо

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\cdot 0 = 0.$$

Отже, тотожність (6) встановлено.

Доведемо, що $A(\alpha) = 0$. Нехай $\varphi(x) = \sum\limits_{0\le|r|\le n} \varphi_r x^r$, $\varphi_r \in \mathbb{C}$, причому $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$, тобто $\deg\varphi(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді з тотожності (7) отримуємо

$$0 \equiv \sum_{0\le|r|\le n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \sum_{|r|=n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \sum_{|r|=n} \varphi_r \sum_{O\le q\le r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x} A^{(r-q)}(\alpha) +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= e^{\alpha\cdot x} A(\alpha) \sum_{|r|=n} \varphi_r x^r +$$
$$+ e^{\alpha\cdot x} \sum_{|r|=n} \varphi_r \sum_{O\le q\le r,\, q\ne r} C_r^q A^{(r-q)}(\alpha) x^q +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$ маємо $A(\alpha) = 0$. ■

3. Основний результат. Для підмножини D простору $\mathbb{C}^s$ розглянемо такі класи квазіполіномів:

— K_D – це клас квазіполіномів вигляду

$$g(x) = \sum_{j=1}^m Q_j(x)e^{\alpha_j\cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^s,\ m \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні комплексні вектори з D і $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами;

— $K_{\mathbb{C},D}$ – це клас квазіполіномів вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^N P_{lj}(t,x)e^{\beta_l t+\alpha_j\cdot x}, \quad m, N \in \mathbb{N},$$

де $P_{11}(t,x),\ldots,P_{Nm}(t,x)$ – ненульові поліноми змінних $t,x_1,\ldots,x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_N$ – попарно різні комплексні числа, а попарно різні комплексні вектори $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ належать до D.

Теорема 1. *Нехай M – множина* (4) *і $g(x)$ – нетривіальний одночленний квазіполіном з класу K_M вигляду*

$$g(x)=Q(x)e^{\alpha\cdot x}, \tag{8}$$

в якому $Q(x)=\sum\limits_{0\le|r|\le n}D_rx^r$ – поліном n-го степеня ($\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0,\ n\in\mathbb{Z}_+$), коефіцієнти D_r якого задовольняють однорідну систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{\substack{r\ge q,\,0\le|r|\le n,\\ r-q\,\in\,\Omega(\alpha)}}D_rC_r^q\Delta^{(r-q)}(\alpha)=0,$$

$$q\in\mathbb{Z}_+^s,\ |q|\le n-1. \tag{9}$$

Тоді квазіполіном

$$U(t,x)=g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$
$$=Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{10}$$

в якому

$$\Phi(t,x,\nu)=\big[A_2(\nu)T_0(t,\nu)-A_1(\nu)T_1(t,\nu)\big]e^{\nu\cdot x}, \tag{11}$$

є нетривіальним розв'язком задачі (1), (2). *Навпаки, якщо ненульовий квазіполіном, одночленний за змінною x, тобто $U(t,x)=F(t,x)e^{\alpha\cdot x}$, є розв'язком задачі* (1), (2), *то його можна зобразити у вигляді* (10), *де $g(x)$ належить до K_M, має вигляд* (8) *і коефіцієнти D_r полінома $Q(x)$ задовольняють систему* (9).

Доведення. *Достатність.* Покажемо спочатку, що функція (10) задовольняє рівняння (1). Враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ та $\frac{\partial}{\partial \nu}$ маємо

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\left\{g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\}=$$
$$=g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\}=$$
$$=g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Big[A_2(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_0(t,\nu)-$$
$$-A_1(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_1(t,\nu)\Big]\Big\}\Big|_{\nu=O}=0.$$

Покажемо для (10) виконання першої умови (2):

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x)+A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=$$
$$=A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\ Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\ Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\ \Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\ \Big\{A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}-$$
$$-Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\ \Big\{A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\big[A_1(\nu)A_2(\nu)-$$
$$-A_1(\nu)A_2(\nu)\big]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=0.$$

Функція (10) задовольняє другу умову (2). Справді,

$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x)+B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=$$
$$=B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\ Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\ \Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{B_1(\nu)\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\ \Big\{B_2(\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\sum_{0\le|r|\le n}D_r\ \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\sum_{0\le|r|\le n}D_r\sum_{O\le q\le r}C_r^qx^qe^{\alpha\cdot x}\Delta^{(r-q)}(\alpha)=$$
$$=e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\le|r|\le n}\ \sum_{O\le q\le r}D_rC_r^qx^q\Delta^{(r-q)}(\alpha)=$$

$$= e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\le|q|\le n} x^q \sum_{r\ge q,\ |r|\le n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha).$$

Останній вираз дорівнюватиме нулю тоді та лише тоді, коли

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^s\ |q|\le n: \quad \sum_{r\ge q,\ |r|\le n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) = 0.$$

Зауважимо, якщо $|q|=n$, то $r=q$, а усі рівності $D_q\Delta(\alpha)=0$ в останній системі будуть тотожностями $0\equiv 0$ для всіх D_q. Крім того, залишаємо лише ті доданки, для яких $\Delta^{(r-q)}(\alpha)\ne 0$, тобто для $r-q\in\Omega(\alpha)$. Отже, останню систему можна записати у вигляді (9).

Покажемо, що функція (10) є ненульовою. Для цього обчислимо значення цієї функції та її похідної в точці $t=0$:

$$U(0,x) =$$
$$= \sum_{0\le|r|\le n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \sum_{|r|=n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\le q\le r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x} A_2^{(r-q)}(\alpha) +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= e^{\alpha\cdot x}A_2(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r +$$
$$+ e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\le q\le r,\, q\ne r} C_r^q A_2^{(r-q)}(\alpha) x^q +$$
$$+ \sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) =$$
$$= -\sum_{0\le|r|\le n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= -e^{\alpha\cdot x}A_1(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r -$$
$$- e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\le q\le r,\, q\ne r} C_r^q A_1^{(r-q)}(\alpha) x^q -$$
$$- \sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $\sum_{|r|=n}|D_r| > 0$ одержуємо, що $\sum_{|r|=n} D_r x^r$ – нетривіальний поліном степеня $n\in\mathbb{Z}_+$. Оскільки $|A_1(\alpha)|^2+|A_2(\nu)|^2>0$, то нетривіальними одночленними за змінною x квазіполіномами є $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$. Отже, функція вигляду (10), як розв'язок задачі Коші з ненульовими початковими даними є нетривіальною.

Доведемо *необхідність*. Нехай $U(t,x)$ – нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), що належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ і має за змінною x одночленний вигляд, тобто

$$U(t,x) = F(t,x)e^{\alpha\cdot x},\ \ \alpha\in\mathbb{C}^s, \tag{12}$$

де $F(t,x) = \sum_{l=1}^{N} P_l(t,x)e^{\beta_l t}$, $P_1(t,x),\ldots,$ $P_N(t,x)$ – поліноми змінних $t,x_1,\ldots,x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1,\ldots,\beta_N$ – попарно різні комплексні числа, $N\in\mathbb{N}$.

Позначимо $U(0,x)=g_1(x)=\varphi_1(x)e^{\alpha\cdot x}$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x)=\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x}$, де $\varphi_1(x)=F(0,x)$, $\varphi_2(x)=\frac{\partial F}{\partial t}(0,x)$. Тоді хоча б один з поліномів $\varphi_1(x)$ або $\varphi_2(x)$ є нетривіальним. Квазіполіном $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x)=0,$$

$$U(0,x)=g_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x),$$

можна згідно з диференціально-символьним методом [12] записати у вигляді

$$U(t,x) = g_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} +$$
$$+ g_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}$$

або

$$U(t,x)=\varphi_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \quad (13)$$

Покажемо, що функцію (13) можна подати у вигляді (10) з деяким нетривіальним поліномом $Q(x)$. Нехай спочатку обидва поліноми $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є нетривіальними. З умови $|A_1(\alpha)|^2+|A_2(\alpha)|^2\neq 0$ одержуємо, що $A_1(\alpha)\neq 0$ або $A_2(\alpha)\neq 0$. Припустимо, що $A_1(\alpha)\neq 0$. Відповідно до леми 1 для полінома $\varphi_1(x)$ існує поліном $\varphi_1^{A_1}(x)$ того ж степеня такий, що

$$U(t,x)=\varphi_1^{A_1}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З виконання для функції $U(t,x)$ першої двоточкової умови (2) одержимо тотожність

$$\varphi_1^{A_1}(x)+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0,$$

з урахуванням якої маємо

$$U(t,x)=-\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Big[\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}-$$
$$-T_1(t,\nu)\Big]e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=-\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Отже, розв'язок (12) задачі (1), (2) ми подали у вигляді (10), де $Q(x)=-\varphi_2^{A_1^{-1}}(x)$.

Цілком аналогічно доводиться, що за умови $A_2(\alpha)\neq 0$ розв'язок (12) задачі (1), (2) можна подати у вигляді (10), де $Q(x)=\varphi_1^{A_2^{-1}}(x)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi_1(x)\equiv 0$, а, отже, $\varphi_2(x)\not\equiv 0$. Тоді розв'язок задачі (1), (2) можна подати у вигляді

$$U(t,x)=\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \quad (14)$$

З виконання першої двоточкової умови одержуємо, що $\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x}\in\ker A_2\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$. Звідси згідно з лемою 2 маємо, що $A_2(\alpha)=0$, а тому $A_1(\alpha)\neq 0$. Тоді функцію (14) можна подати у вигляді

$$U(t,x)=-\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha},$$

оскільки за лемою 2 маємо

$$\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\left[A_2(\nu)T_0(t,\nu)\right]e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0.$$

Аналогічним є доведення і у випадку, коли $\varphi_2(x)\equiv 0$.

Отже, доведено, що розв'язок (12) задачі (1), (2) можна подати у вигляді (10), де $Q(x)=\sum\limits_{0\le|r|\le n}D_rx^r$ – нетривіальний поліном степеня $n\in\mathbb{Z}_+$, тобто $\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0$.

З виконання другої умови (2) для функції (12) одержимо тотожність

$$Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0,$$

з якої одержуємо

$$\sum_{|r|=n}D_rx^r\Delta(\alpha)+\ldots\equiv 0,$$

де $\ldots$ означає поліном вектор-змінної x, степеня нижчого за n. Звідси випливає, що $D_r\Delta(\alpha)\equiv 0$ для всіх $|r|=n$, тобто $\Delta(\alpha)=0$ і $\alpha\in M$. Це означає, що квазіполіном $g(x)=Q(x)e^{\alpha\cdot x}$ належить до K_M. Коефіцієнти полінома $Q(x)$ задовольняють при цьому систему (9) (див. доведення достатності в теоремі 1). ■

Зауваження 1. *Якщо до множини $\Omega(\alpha)$ не належать мультиіндекси $r\in\mathbb{Z}_+^s$, для яких $|r|<k$, $k\in\mathbb{N}$, то в системі лінійних алгебричних рівнянь* (9) *для коефіцієнтів D_r, $|r|<k$, полінома $Q(x)$ одержуємо тотожності $0\equiv 0$. Тому усі згадані коефіцієнти є довільними. Для побудови нетривіального розв'язку задачі* (1), (2) *за формулою* (9) *можна взяти довільний ненульовий квазіполіном* (8)*, у якого* $\deg Q(x)\le k-1$.

Зауваження 2. *Якщо $M = \mathbb{C}^s$, тобто $\Delta(\nu) \equiv 0$, то рівняння в системі* (9) *для коефіцієнтів полінома $Q(x)$ будуть тотожностями $0 \equiv 0$, тому формула* (10) *визначає нетривіальні розв'язки задачі* (1), (2) *для довільного нетривіального квазіполінома* (8).

4. Приклад. Знайти в області $(t,x) \in \mathbb{R}^3$ розв'язки $U = U(t,x)$ двоточкової задачі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} + \Big(1 - \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\Big)U = 0, \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} &\Big(1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big)U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \\ &\Big(1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)U(1,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

∇ Маємо $a(\nu) = 1$, $b(\nu) = 1 - \nu_1^2\nu_2^2$, $D(\nu) = \nu_1^2\nu_2^2$, $A_1(\nu) = 1 + \nu_1^2$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1 + \nu_2^2$, $s = 2$, $h = 1$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $\Delta(\nu) = e^{-1}\big(\nu_1^2 - \nu_2^2\big)\cosh[\nu_1\nu_2]$,

$$M = \big\{(\nu_1,\nu_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \quad \Delta(\nu) = 0\big\}.$$

Функція (11) для задачі (15), (16) має вигляд

$$\Phi(t,x,\nu) = \\ = \Big\{\cosh[\nu_1\nu_2 t] - \nu_1^2 \frac{\sinh[\nu_1\nu_2 t]}{\nu_1\nu_2}\Big\} e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 - t}.$$

Розглянемо підмножини векторів, з яких складається множина M:

1) $\nu = \alpha_\pm(\mu) \equiv (\pm\mu, \mu)$, де $\mu \in \mathbb{C}$, причому $\mu \neq 0$ і $\mu \neq \mu_*$, а μ_* – корінь рівняння $\cosh[\mu^2] = 0$;

2) $\nu = \beta(\mu) \equiv \Big(\frac{\mu_*^2}{\mu}, \mu\Big)$, де $\mu \in \mathbb{C}$, причому $\mu \neq 0$ і $\mu \neq \mu_*$;

3) $\nu = O \equiv (0,0)$;

4) $\nu = \gamma_\pm \equiv \big(\pm\mu_*, \mu_*\big)$.

Використовуючи теорему 1 побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \alpha_\pm(\mu)$ з першої підмножини.

Обчислюємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = \pm 2e^{-1}\mu\cosh[\mu^2] \neq 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = -2e^{-1}\mu\cosh[\mu^2] \neq 0,$$

тому $(1,0), (0,1) \in \Omega(\alpha_\pm(\mu))$.

Узявши квазіполіном вигляду

$$g(x_1,x_2) = \big(D_{00} + D_{10}x_1 + D_{01}x_2\big)e^{\pm\mu x_1 + \mu x_2}, \\ D_{00}, D_{10}, D_{01} \in \mathbb{C}, \qquad (17)$$

для коефіцієнтів D_{00}, D_{10}, D_{01} записуємо систему алгебричних рівнянь (9), яка є одним рівнянням вигляду

$$D_{00}\Delta\big(\alpha_\pm(\mu)\big) + D_{10}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) + \\ + D_{01}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = 0. \qquad (18)$$

З рівняння (18) одержуємо, що D_{00}, D_{10} – довільні сталі, а $D_{01} = \pm D_{10}$. За формулою (10)

$$U(t,x) = \\ = \Big[D_{00} + D_{10}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1} \pm \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Big]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha_\pm(\mu)}, \\ (D_{00}, D_{10}) \neq O,$$

знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16).

Зокрема, розв'язками задачі (15), (16) є:

$$U_{0\pm}(t,x,\mu) = \Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha_\pm(\mu)} = \\ = e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2},$$

$$U_{1\pm}(t,x,\mu) = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1} \pm \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big)\Big|_{\nu=\alpha_\pm(\mu)} = \\ = e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2}\left\{-2\mu t \pm \mu x_1 + \mu x_2\right\}.$$

Зауважимо, що розв'язки $U_{1\pm}(t,x,\mu)$ можна знайти шляхом диференціювання розв'язків $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ за параметром μ, а саме

$$U_{1\pm}(t,x,\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}U_{0\pm}(t,x,\mu).$$

Аналогічно, інші розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \alpha_\pm(\mu)$, можна отримувати за формулою

$$U_{k\pm}(t,x,\mu) = \\ = \frac{\partial^k}{\partial\mu^k}e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2}, \qquad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Знайдемо тепер розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \beta(\mu)$ з другої підмножини M. Обчислюємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big) = e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2} - \mu^2\Big)\mu\sinh[\mu_*^2] \neq 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big) = e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2} - \mu^2\Big)\frac{\mu_*^2}{\mu}\sinh[\mu_*^2] \neq 0.$$

Маємо $(1,0)$, $(0,1) \in \Omega(\beta(\mu))$. Розглянемо квазіполіном вигляду

$$g(x_1,x_2) = \big(D_{00} + D_{10}x_1 + D_{01}x_2\big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1 + \mu x_2},$$
$$D_{00}, D_{10}, D_{01} \in \mathbb{C},$$

для коефіцієнтів якого одержуємо систему рівнянь (одне рівняння):

$$D_{10}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big) + D_{01}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big) = 0. \quad (19)$$

З рівняння (19) одержуємо, що D_{00}, D_{01} – довільні сталі, а $D_{10} = -\frac{\mu_*^2}{\mu^2}D_{10}$. Згідно з теоремою 1 нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) знаходимо за формулою

$$U(t,x) = \Big[D_{00} + $$
$$+ D_{01}\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Big]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)},$$
$$(D_{00}, D_{01}) \neq O.$$

Зокрема, нетривіальними розв'язками задачі (15), (16) є такі функції:

$$U_0(t,x,\mu) = \Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)} =$$
$$= \Big\{\cosh[\mu_*^2 t] - \frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2 t]\Big\}\, e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1 + \mu x_2 - t},$$

$$U_1(t,x,\mu) =$$
$$= \Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)} =$$
$$= \Big\{\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1 + x_2\Big)\cosh[\mu_*^2 t] - \Big(\frac{2\mu_*^2}{\mu^3} -$$
$$- \frac{\mu_*^4}{\mu^2}\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1 + x_2\Big)\Big)\sinh[\mu_*^2 t]\Big\}e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1 + \mu x_2 - t}.$$

Знову легко перевірити, що

$$U_1(t,x,\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}U_0(t,x,\mu).$$

Зауважимо, що інші розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \beta(\mu)$, можна шукати за формулою

$$U_k(t,x,\mu) = \frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\Big\{\Big(\cosh[\mu_*^2 t] -$$
$$- \frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2 t]\Big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1 + \mu x_2 - t}\Big\}, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Розглянемо побудову нетривіальних розв'язків задачі (15), (16) за вектором $\nu = O$ з третьої підмножини, причому побудову виконаємо за допомогою полінома третього степеня

$$g(x_1,x_2) = \sum_{|k+j|\leq 3} D_{kj}x_1^k x_2^j.$$

Оскільки усі похідні до третього порядку включно від $\Delta(\nu)$ при $\nu = O$ дорівнюють нулеві (за виключенням $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) = 2e^{-1}$, $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = -2e^{-1}$), то для сталих коефіцієнтів $D_{00}, \ldots, D_{03}$ отримуємо таку систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} D_{20}C_{(2,0)}^{(0,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{02}C_{(0,2)}^{(0,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \\ D_{30}C_{(3,0)}^{(1,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{12}C_{(1,2)}^{(1,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \\ D_{21}C_{(2,1)}^{(0,1)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{03}C_{(0,3)}^{(0,1)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \end{cases}$$

звідки одержуємо $D_{20} = D_{02}$, $D_{12} = 3D_{30}$, $D_{21} = 3D_{03}$, а $\big(D_{00}, D_{01}, D_{11}, D_{02}, D_{30}, D_{03}\big) \neq O$. За теоремою 1 знаходимо такі ненульові розв'язки задачі (15), (16):

$$U_{00}(t,x) = \Phi(t,x,O) = e^{-t},$$
$$U_{10}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\Big|_{\nu=O} = x_1 e^{-t},$$
$$U_{01}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big|_{\nu=O} = x_2 e^{-t},$$
$$U_{11}(t,x) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\Big|_{\nu=O} = x_1 x_2 e^{-t},$$

$$U_{20}(t,x)=\Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-2t+x_1^2+x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{30}(t,x)=\Big(\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^3}+3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-6tx_1+x_1^3+3x_1x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{03}(t,x)=\Big(3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^2\partial\nu_2}+\frac{\partial^3}{\partial\nu_2^3}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-6tx_2+x_2^3+3x_1^2x_2\big)e^{-t}.$$

Зауважимо, що $U_{00}(t,x)=U_{0\pm}(t,x,O)$, однак, решта знайдених розв'язків $U_{10}(t,x)$, $U_{01}(t,x)$, $U_{11}(t,x)$, $U_{20}(t,x)$, $U_{30}(t,x)$, $U_{03}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu=0$.

Розглянемо нарешті четвертий випадок, коли $\gamma_\pm=(\pm\mu_*,\mu_*)$. Обчислюємо

$$\Delta(\gamma_\pm)=\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}(\gamma_\pm)=\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}(\gamma_\pm)=0,$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(\gamma_\pm)=4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0,$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}(\gamma_\pm)=\mp e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0;$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(\gamma_\pm)=-4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0.$$

Маємо $(2,0),(1,1),(0,2)\in\Omega(\gamma_\pm)$. Побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) за допомогою квазіполінома вигляду

$$g(x_1,x_2)=\Big(D_{00}+D_{10}x_1+D_{01}x_2+D_{20}x_1^2+ \\ +D_{11}x_1x_2+D_{02}x_2^2\Big)e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2}.$$

Для сталих $D_{00},\dots,D_{02}$ запишемо систему алгебричних рівнянь (9), яка буде одним рівнянням (див. зауваження 1):

$$D_{20}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)+D_{11}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)+ \\ +D_{02}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)=0$$

або

$$4D_{20}\mp D_{11}-4D_{02}=0,$$

звідки одержуємо, що D_{00}, D_{10}, D_{01}, D_{20}, D_{02} – довільні сталі, причому $\big(D_{00},D_{10},D_{01},D_{20},D_{02}\big)\neq O$, а $D_{11}=\pm4\big(D_{20}-D_{02}\big)$. Відповідно до теореми 1 знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16):

$$U_{00\pm}(t,x)=\Phi(t,x,\gamma_\pm)= \\ =\big\{\cosh[\mu_*^2t]-\sinh[\mu_*^2t]\big\}\,e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}= \\ =e^{-(1+\mu_*^2)t\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2}.$$

Як бачимо $U_{00\pm}(t,x)=U_{0\pm}(t,x,\mu_*)$. Крім того, обчислюємо

$$U_{10\pm}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\Big|_{\nu=\gamma_\pm}=\Big\{\Big(x_1\mp\mu_*t\Big)e^{-\mu_*^2t}\mp \\ \mp\frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t},$$

$$U_{01\pm}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big|_{\nu=\gamma_\pm}=\Big\{\Big(x_2-\mu_*t\Big)e^{-\mu_*^2t}+ \\ +\frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}.$$

Зауважимо знову, що функції $U_{10\pm}(t,x)$, $U_{01\pm}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ та $U_0(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu=\mu_*$. Крім того, за теоремою 1 знаходимо інші нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) за формулою

$$U(t,x)=\Big[D_{20}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\pm4\Big(D_{20}-D_{02}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}+ \\ +D_{02}\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Очевидно, що окремими розв'язками задачі (15), (16) є

$$U_{20\pm}(t,x)= \\ =\Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\pm4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm},$$

$$U_{02\pm}(t,x)= \\ =\Big(\mp4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}+\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Зокрема,

$$U_{20\pm}(t,x)=\Big\{\Big(-t+x_1(x_1\mp\mu_*t)\pm$$
$$\pm 4(x_1\mp\mu_*t)x_2+5\mu_*t(\mu_*t-\frac{1}{\mu_*}\mp x_1)\Big)\cosh[\mu_*^2t]\pm$$
$$\pm\Big(5(x_1\mp\mu_*t)\mu_*t+(\mu_*t-\frac{1}{\mu_*}\mp x_1)(x_1\pm 4x_2)+$$
$$+\frac{x_1}{\mu_*}\pm 4(t+\frac{1}{\mu_*})\Big)\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}.$$

Зауважимо знову, що розв'язки $U_{20\pm}(t,x)$ та $U_{02\pm}(t,x)$ не можна отримати з розв'язку $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ за допомогою диференціювання за μ у точці $\mu=\mu_*$. $\triangle$

5. Висновки. У статті сформульовано та доведено теорему, що дає необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що задовольняють однорідні локальні двоточкові за часом умови. Доведено, що такі розв'язки задачі існують, якщо множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою. Запропоновано формули для побудови нетривіальних розв'язків задачі, які застосовано до конкретного прикладу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пташник Б.Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.

2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

3. *Ильких В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Диф. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487-492.

4. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.

5. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. – 1968. – **183**, № 5. – С. 995–998.

6. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.

7. *Віленць І.Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР. – Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.

8. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine. – Pisa, 1909. – 176 p.

9. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917. – 308 с.

10. *Vallee-Poussin de la Ch. J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // Journ. Math. de pura et appl. – 1929. – **9**, № 8. – P. 125–144.

11. *Нитребич З.М., Маланчук О.М.* Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Науковий вісник Ужгородського університету. – Серія "Математика і інформатика". – 2015. – **27**, вип. № 2. – С. 98–108.

12. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.