УДК 517.929

©2016 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ДО ОЗНАЧЕНЬ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглянуто клас майже періодичних операторів, елементи якого можуть не бути майже періодичними за Бохнером.

Considered class of almost periodic operators, elements of which may not be for Bochner almost periodic.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{K}$ – поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ дійсних або комплексних чисел відповідно і E – довільний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через C^n, де $n \in \mathbb{N}$, – банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^n} = = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}, \ldots, \left\|\frac{d^n x}{dt^n}\right\|_{C^0}\right\}.$$

У просторах C^0, $C^1, \ldots,$ C^n визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Означення 1. Елемент $y \in C^k$, $k \geq 0$, називається *майже періодичним* (за Бохнером [1]–[3]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n} y)_{n\geq 1}$ можна виділити збіжну в C^k підпослідовність.

Множини майже періодичних елементів просторів C^0, $C^1, \ldots,$ C^n є підпросторами цих просторів відповідно з нормами $\|\cdot\|_{C^0}$, $\|\cdot\|_{C^1}, \ldots, \|\cdot\|_{C^n}$. Ці підпростори будемо позначати через B^0, $B^1, \ldots,$ B^n відповідно.

Нехай $B_{C^n}[a,r]$ – замкнута куля в C^n з центром у точці $a \in C^n$ і радіусом r, тобто множина $\{x \in C^n : \|x-a\|_{C^n} \leq r\}$.

Означення 2. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0,+\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \sup_{x\in B_{C^n}[a,r]} \Big\| S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x \Big\|_{C^m} = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим [4,5] при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі C^0.

Означення 3. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, називається *автономним*, якщо $S_h H S_{-h} = H$ для всіх $h \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що автономний оператор є майже періодичним у сенсі означення 2.

Розглянемо *майже періодичні оператори, що можуть не бути майже періодичними в сенсі означення 2.*

Нехай $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$ і $R(x)$ – множина значень функції $x = x(t)$, тобто множина $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Для компактних множин $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ позначимо через

$\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}$ множину всіх елементів $x \in C^n$, для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0,$$

$$R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \dots,$$

$$R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Використаємо множину

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{K_0,K_1,\dots,K_n \in \mathcal{K}} \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}.$$

Ця множина є підпростором простору C^n.

Справді, якщо $x, y \in \mathfrak{S}_n$ і $\alpha \in \mathbb{K}$, то, очевидно, $x+y, \alpha x \in \mathfrak{S}_n$. Тому $\mathfrak{S}_n$ – векторний простір. Цей простір, очевидно, також є нормованим простором з нормою $\|\cdot\|_{C^n}$.

Покажемо, що простір $\mathfrak{S}_n$ повний, тобто для кожного елемента $x \in \overline{\mathfrak{S}_n}$ множини $\overline{R(x)}$, $\overline{R\left(\frac{dx}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)}$ є компактними множинами.

Нехай $z \in \overline{\mathfrak{S}_n}$ і ε – довільне додатне число. Існує елемент $w \in \mathfrak{S}_n$, для якого

$$\|z - w\|_{C^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

і тому

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R(z)}, b \in \overline{R(w)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)},\right.$$

$$\left. b \in \overline{R\left(\frac{dw}{dt}\right)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}, \dots,$$

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)},\right.$$

$$\left. b \in \overline{R\left(\frac{d^n w}{dt^n}\right)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай M_0, $M_1, \dots,$ M_n – скінчені $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки для компактних множин $\overline{R(w)}$, $\overline{R\left(\frac{dw}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n w}{dt^n}\right)}$ відповідно. Тоді на підставі попередніх нерівностей множини M_0, $M_1, \dots,$ M_n будуть скінченими ε-сітками для множин $\overline{R(z)}$, $\overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)}$ відповідно.

Отже, завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ множини $\overline{R(z)}$, $\overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)}$ компактні, і $\mathfrak{S}_n$ – підпростір банахового простору C^n.

Зручними для дослідження майже періодичних розв'язків функціональних, функціонально-диференціальних та диференціальних рівнянь є наступні означення майже періодичних операторів, що використовують властивість майже періодичності операторів лише на підпросторі $\mathfrak{S}_n$ простору C^n або на множинах $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n} \subset \mathfrak{S}_n$, де $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$.

Означення 4. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{S}_n,\, x\in B_{C^n}[a,r]} \Big\| S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x -$$

$$- S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x \Big\|_{C^m} = 0.$$

Означення 5. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних компактних множин $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, для якої

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}} \Big\| S_{h_{k_{l_1}}} H S_{-h_{k_{l_1}}} x -$$

$$- S_{h_{k_{l_2}}} H S_{-h_{k_{l_2}}} x \Big\|_{C^m} = 0.$$

Зазначимо, що майже періодичні оператори в сенсі означення 5 уведено в розгляд автором у [6] у випадку дискретних рівнянь.

Майже періодичні в сенсі означення 4 або 5 оператори можуть не бути майже періодичними в сенсі означення 2.

Приклад 1. Нехай $\dim E = \infty$. Завдяки некомпактності кулі $\{x \in E : \|x\|_E \le 1\}$ (див., наприклад, [7]) існує елемент $\omega = \omega(t)$ простору C^n, послідовність $(h_m)_{m\ge 1}$ дійсних чисел і число $\mu > 0$, для яких

$$\inf_{m_1, m_2 \in \mathbb{N},\, m_1 \ne m_2} \|\omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2})\|_E \ge \mu.$$

Зафіксуємо довільний вектор $a \in E$ і розглянемо елемент $b = b(t)$ простору C^0, для якого $b(t) = a$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор $H : C^n \to C^0$ рівністю

$$Hx = \begin{cases} b, & \text{якщо } x \in \mathfrak{S}_n, \\ \omega, & \text{якщо } x \in C^n \setminus \mathfrak{S}_n. \end{cases}$$

Очевидно, що цей оператор не є неперервним на C^n.

Також очевидно, що

$$\{S_h H S_{-h} x : h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{D}_{K_0, K_1, \ldots, K_n}\} =$$
$$= \{S_h H S_{-h} x : h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{S}_n\} = \{b\}$$

для всіх $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Тому *оператор H є майже періодичним як у сенсі означення 4, так і в сенсі означення 5.* Однак, цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0 \setminus \mathfrak{S}_n$. Очевидно, що

$$S_h H S_{-h} z = S_h \omega \tag{1}$$

для кожного $h \in \mathbb{R}$. Тому

$$\left\|S_{h_{m_1}} \omega - S_{h_{m_2}} \omega\right\|_{C^0} =$$
$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega(t + h_{m_1}) - \omega(t + h_{m_2})\|_E \ge$$
$$\ge \|\omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2})\|_E \ge \mu,$$

якщо $m_1 \ne m_2$.

Отже, якщо $\{S_h z : h \in \mathbb{R}\} \subset B_{C^n}[b, r]$, де $r > \|z - \omega\|_{C^n}$, то

$$\sup_{x \in B_{C^n}[b,r]} \left\|S_{h_{m_1}} H S_{-h_{m_1}} x - \right.$$
$$\left. - S_{h_{m_2}} H S_{-h_{m_2}} x\right\|_{C^0} \ge \mu > 0,$$

для всіх $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ $(m_1 \ne m_2)$. Звідси, із співвідношення (1) і означення 2 випливає, що *оператор H не є майже періодичним у сенсі означення 2.*

Приклад 2. Будемо вважати, що $E = l_1$, де l_1 – банаховий простір обмежених числових послідовностей $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots \rangle$, для кожної з яких $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |z_m| < \infty$, з нормою

$$\|z\|_{l_1} = \sum_{m=1}^{\infty} |z_m|.$$

Розглянемо неперервну та обмежену на $\mathbb{R}$ функцію $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$, що визначається співвідношенням

$$A(t) z = \left\langle e^{it} z_1, e^{it/2} z_2, \ldots, e^{it/m} z_m, \ldots \right\rangle. \tag{2}$$

Тут $t \in \mathbb{R}$ і $z \in l_1$.

Легко перевірити, що функція $A(t)$ має наступні властивості:

1) $\|A(t)\|_{L(l_1, l_1)} = 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$;

2) для кожного $z \in l_1$ функція $A(t)z$ є елементом простору B^0;

3) для кожних компактної множини $K \subset l_1$ і послідовності $(h_m)_{m\ge 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l\ge 1}$, для яких

$$\lim_{k,l \to \infty} \sup_{z \in K} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t + h_{m_k}) z -$$
$$- A(t + h_{m_l}) z\|_{l_1} = 0.$$

4) функція $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$ не є майже періодичною в сенсі означення 1.

Розглянемо лінійний неперервний оператор $\mathcal{A} : C^0 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{A} x)(t) = A(t) x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

Цей *оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2 і є майже періодичним у сенсі означення 5.*

Справді, для довільних $h \in \mathbb{R}$ і $x \in C^0$

$$(S_h \mathcal{A} S_{-h} x)(t) = A(t + h) x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси на підставі третьої властивості функції $A(t)$ отримуємо, що для кожних послідовноті $(h_m)_{m\ge 1}$ дійсних чисел і компактної

множини $K \subset l_1$ існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l\geq 1} \subset (h_m)_{m\geq 1}$, для яких

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{z\in C^0,\ R(z)\subset K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A\left(t+h_{m_k}\right) z(t)-$$

$$-A\left(t+h_{m_l}\right) z(t)\|_{l_1} = 0.$$

Це означає, що оператор $\mathcal{A} : C^0 \to C^0$ *є майже періодичним у сенсі означення 5.*

Однак оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, для функції $\omega \in C^0$, для якої

$$\|\omega\|_{C^0} = 1, \tag{3}$$

і

$$\omega(l) = e_l, \quad l \geq 1, \tag{4}$$

і кожної пари (k, l) натуральних чисел, для яких $k > l$, виконуються співвідношення

$$\|S_k\mathcal{A}S_{-k} - S_l\mathcal{A}S_{-l}\|_{L(C^0,C^0)} \geq$$

$$\geq \|S_k\mathcal{A}S_{-k}\omega - S_l\mathcal{A}S_{-l}\omega\|_{l_1} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+k)\omega(t) - A(t+l)\omega(t)\|_{l_1} \geq$$

$$\geq \|A(k-l+k)\omega(k-l)-A(k-l+l)\omega(k-l)\|_{l_1} =$$

$$= \|A(2k-l)e_{k-l} - A(k)e_{k-l}\|_{l_1} =$$

$$= \left|e^{i(2k-l)/(k-l)} - e^{ik/(k-l)}\right| = \left|e^{i} - 1\right| =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2} > 0.$$

Звідси випливає, що *оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2.*

Із використанням означення 5 можна з'ясовувати умови існування майже періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, функціонально-диференціальних рівнянь загаювального, нейтрального і випереджального типів (див. класифікацію рівнянь, наприклад, у [8]), а також рівнянь загального типу з відхильним аргументом, що залежить як від часу, так і від розв'язку. Усі ці рівняння є окремими випадками загального функціонального рівняння

$$\mathcal{F}x = y, \tag{5}$$

де $\mathcal{F} : C^n \to C^0$ – майже періодичний у сенсі означення 5 оператор і $y \in B^0$.

Використаємо один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, що є елементами простору $\mathfrak{S}_n$.

Зафіксуємо множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ множину всіх розв'язків рівняння (5), для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0,$$

$$R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,$$

$$R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Припустимо, що

$$N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n) \neq \varnothing.$$

Нехай $x^* \in N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ і діаметр $\operatorname{diam} R\left(x^*\right)$ множини $R\left(x^*\right)$, тобто число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E : x_1, x_2 \in R\left(x^*\right)\}$, не дорівнює 0. Розглянемо додатне число

$$r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n) =$$

$$= \max_{l\in\{0,1,\ldots,n\}} \sup\left\{\|x_l - y_l\|_E : x_l \in R\left(\frac{d^l x^*}{dt^l}\right),\right.$$

$$\left. y_l \in K_l\right\},$$

де $\dfrac{d^0 x^*}{dt^0} = x^*$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)]$.

Позначимо через $\Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)$ множину всіх елементів $z \in C^n$, для кожного з яких

$$R(z) \subset K_0,$$

$$R\left(\frac{dz}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,$$

$$R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right) \subset K_n$$

і

$$\|z - x^*\|_{C^n} \geq \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) =$$

$$= \inf_{z\in\Omega(x^*,K_0,K_1,\ldots,K_n,\varepsilon)} \|\mathcal{F}z - \mathcal{F}x^*\|_{C^0}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема. *Якщо оператор* $\mathcal{F} : C^n \to C^0$ *є майже періодичним у сенсі означення 5,* $y \in B^0$, $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$, $x^* \in N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$, $\operatorname{diam} R\,(x^*) \neq 0$ *і*

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$, *то* $x^* \in B^n$.

Доводиться теорема аналогічним чином, як і відповідні твердження статей [9]–[22].

Зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (5) на відміну від теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [3,23] не використовують $\mathcal{H}$-клас рівняння (5) та умову відокремленості розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119–147. II Teil. – P. 383–409.

2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.

5. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений диффереци-альных уравнений // Матем. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443–460.

6. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407–418.

7. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища школа, 1974. – 456 с.

8. *Эльгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.

12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384–393.

13. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Mathematical Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211–215.

14. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139–160.

15. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179–192.

16. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277–285.

17. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 112–119.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 230–244.

19. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 838–848.

20. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та стійкі за Пуассоном розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1707–1714.

21. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 142–148.

22. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125–138.

23. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.