УДК 517.95

©2016 р. **Катерина Балик, Микола Іванчов**

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності гладкого розв'язку оберненої задачі для рівняння теплопровідності з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом. Припускається, що межа області є невідомою і разом з рівнянням вироджується в початковий момент часу.

We establish conditions for existence and uniqueness of a smooth solution to an inverse problem for the heat equation with an unknown time-dependent leading coefficient. The boundary of the domain is supposed unknown and degenerate at the initial moment.

Вступ. Задача, яка досліджується у даній роботі, поєднує три типи задач, а саме, коефіцієнтну обернену задачу, задачу для рівнянь з виродженням та задачу з вільною межею. Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільними межами досліджувались в [1]-[5]. Задачі ідентифікації невідомих коефіцієнтів параболічних рівнянь з виродженням були розглянуті в працях [6]-[8]. Аналогічні задачі, але вже в областях з невідомими межами, вивчались у [9]. Крайову та обернену задачу для параболічного рівняння в області з невідомою межею, яка вироджується в початковий моментт часу, досліджено [10] та [11]. Ця робота присвячена випадку з подвійним виродженням у початковий момент часу як рівняння, так і невідомої межі. Отримано умови існування та єдиності розв'язку для одновимірного рівняння теплопровідності.

1. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T=\{(x,t): 0<x<t^\gamma\tilde h(t), 0<t<T\}$ з невідомою частиною межі $x=t^\gamma\tilde h(t)$ розглянемо задачу визначення невідомих $(\tilde h(t),\tilde a(t), u(x,t)), \tilde h(t)>0, \tilde a(t)>0, t\in[0,T]$ з умов

$$u_t=\tilde a(t)t^\beta u_{xx}+\tilde f(x,t),\quad 0<x<t^\gamma\tilde h(t),\ 0<t<T, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(t^\gamma\tilde h(t),t)=\mu_2(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

$$\tilde a(t)u_x(0,t)=\mu_3(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\int_0^{t^\gamma\tilde h(t)} u(x,t)dx=\mu_4(t),\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $\beta>0,\gamma>0$ - задані числа, а $(\tilde h(t),\tilde a(t), u(x,t))$ - невідомі.

Заміною незалежних змінних $y=\dfrac{x}{\tilde h(t)}$, $\sigma=t^\gamma$ задачу (1)-(4) зведемо до еквівалентної задачі в області $Q_{T_1}:=\{(y,\sigma): 0<y<\sigma, 0<\sigma<T_1\}$ з відомою межею:

$$v_\sigma=a(\sigma)\frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)}v_{yy}+\frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)}v_y+ +\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}f(yh(\sigma),\sigma),\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{5}$$

$$v(0,\sigma)=\nu_1(\sigma),\quad v(\sigma,\sigma)=\nu_2(\sigma),\ \sigma\in[0,T_1], \tag{6}$$

$$a(\sigma)v_y(0,\sigma)=h(\sigma)\nu_3(\sigma),\quad \sigma\in[0,T_1], \tag{7}$$

$$h(\sigma)\int_0^\sigma v(y,\sigma)dy=\nu_4(\sigma),\quad \sigma\in[0,T_1]. \tag{8}$$

Тут використані такі позначення:

$$T_1=T^\gamma,\quad \beta_1=\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma},\quad a(\sigma)=\tilde a(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$h(\sigma)=\tilde h(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),\quad v(y,\sigma)=u(yh(\sigma),\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$f(yh(\sigma),\sigma)=\tilde f(y\tilde h(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$\nu_i(\sigma)=\mu_i(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), i=\overline{1,4}.$$

Надалі будемо вважати виродження рівняння (5) слабким ($0<\beta_1<1$). Це припущення буде виконуватись для будь-яких β,γ, таких, що $\gamma > 1, \gamma - 1 < \beta < 2\gamma - 1$. Припустимо також, що виконуються такі припущення:

(A1) $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,4, \mu_3 \in C[0,T]$, $\mu_i'(t) = \lambda_i(t)t^{\gamma-1}$, $\lambda_i \in C[0,T], i = 1,2$; $\tilde{f} \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняє локально умову Гельдера за змінною x з показником $\alpha \in (0,1)$;

(A2) $\mu_i(t) > 0, i = 1,2,3, \quad \mu_4(t) = \mu_0(t)t^\gamma$, $\mu_0(t) > 0, t \in [0,T], \tilde{f}(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in [0,\infty) \times \times [0,T], \lambda_2(t) > \lambda_1(t), t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

2. Зведення задачі (1)-(4) до системи інтегральних рівнянь. Встановимо існування розв'язку задачі (5)-(8), оскільки вона еквівалентна задачі (1)-(4).

Заміною

$$v(y,\sigma) = \tilde{v}(y,\sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$$

перейдемо від (5)-(6) до задачі з нульовими крайовими умовами:

$$\tilde{v}_\sigma(y,\sigma) = \frac{\sigma^{\beta_1}a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)}\tilde{v}_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)}\tilde{v}_y + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(yh(\sigma),\sigma) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) +$$
$$+ \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)),$$
$$(y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{9}$$
$$\tilde{v}(0,\sigma) = \tilde{v}(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{10}$$

Використовуючи функцію Гріна $G(y,\sigma,\eta,\tau)$ задачі

$$v_\sigma(y,\sigma) = \frac{\sigma^{\beta_1}a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)}v_{yy}, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1],$$

зведемо задачу (9), (10) до інтегро-диференціального рівняння

$$\tilde{v}(y,\sigma) = \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)}\times\right.$$
$$\times \tilde{v}_\eta(\eta,\tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) -$$
$$- \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) +$$
$$\left. + \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y,\sigma)$, звідси отримуємо

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) +$$
$$+ \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau) +\right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta,$$
$$(y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{11}$$

Оцінимо знизу розв'язок задачі (9), (10), подаючи його у вигляді

$$v(y,\sigma) = v_0(y,\sigma) + \hat{v}(y,\sigma),$$

де $v_0(y,\sigma)$ є розв'язком задачі

$$v_\sigma = a(\sigma)\frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)}v_y,$$
$$(y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma),$$
$$\sigma \in [0,T_1], \tag{12}$$

а $\hat{v}(y,\sigma)$ задовольняє умови

$$v_\sigma = a(\sigma)\frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)}v_y +$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}f(yh(\sigma),\sigma), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{13}$$

З припущень **(A2)** та принципу максимуму знаходимо

$$v_0(y,\sigma) \geq \min\{\min_{[0,T]}\mu_1(t), \min_{[0,T]}\mu_2(t)\} :=$$
$$= M_1 > 0,$$
$$\hat{v}(y,\sigma) \geq 0, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

або

$$v(y,\sigma) \geq M_1 > 0, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{14}$$

Введемо позначення $w(y,\sigma) := v_y(y,\sigma)$, $p(\sigma) := \sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (11) до системи інтегральних рівнянь

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \\ + \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \right. \\ + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \\ \left. -\nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))) \right) d\eta, \\ (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \tag{15}$$

$$w(y,\sigma) = \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} + \\ + \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \right. \\ + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \\ \left. -\nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))) \right) d\eta, \\ (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \tag{16}$$

Умови (7) та (8) подамо у вигляді

$$h(\sigma) = \frac{\nu_4(\sigma)}{\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}, \quad \sigma \in (0,T_1], \tag{17}$$

$$a(\sigma) w(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{18}$$

Диференціюємо умову (8) :

$$h'(\sigma)\int_0^\sigma v(y,\sigma)dy + h(\sigma)v(\sigma,\sigma) + \\ + h(\sigma)\int_0^\sigma v_\sigma(y,\sigma)dy = \nu_4'(\sigma).$$

Скориставшись рівнянням (5) , отримаємо

$$h'(\sigma)\int_0^\sigma v(y,\sigma)dy + h(\sigma)\nu_2(\sigma) + \\ + h(\sigma)\int_0^\sigma \left(a(\sigma)\frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \right. \\ \left. + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma),\sigma)) \right) dy = \nu_4'(\sigma).$$

Обчислюючи інтеграли, приходимо до рівняння

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\,(\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \\ -\frac{a(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h(\sigma)}(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma)) - h(\sigma)\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \\ \times \left. \int_0^\sigma f(yh(\sigma),\sigma)dy \right), \quad \sigma \in (0,T_1]. \tag{19}$$

Отже, задачу (5)-(8) зведено до системи рівнянь (15)-(19) стосовно невідомих $h(\sigma), p(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma), w(y,\sigma)$.

3. Існування розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема 1. Припустимо, що виконуються умови **(A1)-(A3)**. Тоді можна вказати таке число $T_0 \in (0,T]$, яке визначається відомими величинами, що задача (1)-(4) матиме розв'язок $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ з класу $C[0,T_0] \cap C^1(0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ такий, що $\tilde{h}(t) > 0, \tilde{a}(t) > 0, t \in [0,T_0]$.

Доведення. З міркувань, наведених в [5], випливає, що для доведення теореми достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (15)-(18). Для цього скористаємося теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Спочатку знайдемо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19). Беручи до уваги **(A2)** та (14), з (17) маємо

$$h(\sigma) \le H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{20}$$

Оскільки рівняння (15), (16) еквівалентні рівнянню (11), а рівняння (11) еквівалентне задачі (5), (6), то, застосовуючи до останньої принцип максимуму, отримаємо

$$v(y,\sigma) \le M_2 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{21}$$

Тоді з (17) та (21) випливає оцінка

$$h(\sigma) \ge \frac{\sigma\nu_0(\sigma)}{\sigma M_2} \ge H_0 > 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{22}$$

Знайдемо оцінку $w(y,\sigma)$ знизу. Виходячи з означення функцій $\nu_i(\sigma)$ та припущень

(A2), знаходимо

$$\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma) = \frac{1}{\gamma}(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) > 0,$$
$$\sigma \in (0, T_1],$$
$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \nu_2'(0) - \nu_1'(0) > 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \geq M_3 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (23)$$

Припускаючи, що функції $a(\sigma), w(y, \sigma)$, $p(\sigma)$ є неперервними на проміжку $[0, T_1]$, дослідимо поведінку інтеграла у рівнянні (16). Використовуючи оцінки функції Гріна [11], будемо мати:

$$\Bigg|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta \Bigg| \leq$$
$$\leq C_1 \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau |G_y(y, \sigma, \eta, \tau)| \, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}},$$

де $\theta(\sigma) = \int\limits_0^\sigma a(s) s^{\beta_1} ds$. Тоді

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}} \leq C_3 \sigma^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Це означає, що існує число $T_0 \in (0, T_1]$ таке, що

$$\Bigg|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \right.$$
$$\times f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau - \nu_1'(\tau)) +$$
$$\left. + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta \Bigg| \leq \frac{M_3}{2}, (y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_0}. \quad (24)$$

Звідси випливають оцінки

$$w(y, \sigma) \geq \frac{M_3}{2},$$
$$w(y, \sigma) \leq \frac{M_3}{2} + \max_{[0, T_1]} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} := M_4,$$
$$(y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_0}. \quad (25)$$

Використовуючи (25) у (18), (19), отримуємо

$$0 < A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1,$$
$$|p(\sigma)| \leq M_5, \sigma \in [0, T_0]. \quad (26)$$

Отже, оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19) отримані. Подамо систему рівнянь (15)-(19) у вигляді

$$\omega = P\omega, \quad (27)$$

де $\omega = (v, w, h, a, p)$, а оператор P визначається правою частиною рівнянь (15)-(19). Визначимо множину $\mathcal{N} := \{(v, w, h, a, p) \in \left(C(\bar{Q}_{T_0})\right)^2 \times (C[0, T_0])^3 : M_1 \leq v(y, \sigma) \leq M_2$, $M_3/2 \leq w(y, \sigma) \leq M_4, H_0 \leq h(\sigma) \leq H_1, A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1, |p(\sigma)| \leq M_5\}$ З оцінок (14), (20)-(22), (25), (26) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Компактність оператора P була встановлена в [12]. Використовуючи теорему Шаудера, отримуємо існування розв'язку задачі (1)-(4).

4. Єдиність розв'язку задачі.

Теорема 2. Нехай виконується умова:

(A4) $\tilde{f} \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T]), \mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2, \mu_i(t) \neq 0, i = 2, 3, \mu_4(t) = \mu_0(t) t^\gamma$, $\mu_0(t) \neq 0, t \in [0, T]$.

Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t))$ з класу $C^1(0, T] \cap C[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задачі (1)-(4) та (5)-(8) є еквівалентними, то досить довести єдиність розв'язку задачі (5)-(8). Припустимо, що існують два різні розв'язки $(h_i(\sigma), a_i(\sigma), v_i(y, \sigma)), i = 1, 2$, задачі (5)-(8). Позначимо $h(\sigma) := h_1(\sigma) - h_2(\sigma)$, $a(\sigma) := a_1(\sigma) - a_2(\sigma), v(y, \sigma) := v_1(y, \sigma) - v_2(y, \sigma)$. Для $(h(t), a(t), u(x, t))$ отримуємо з (5)-(8) таку задачу:

$$v_\sigma = \frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} v_y +$$

$$+\frac{\sigma^{\beta_1}(a(\sigma)h_2^2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)(h_1(\sigma)+h_2(\sigma)))}{\gamma h_1^2(\sigma)h_2^2(\sigma)}\times$$
$$\times v_{2yy}+\frac{h'(\sigma)h_2(\sigma)-h_2'(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}yv_{2y}+$$
$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}yh(\sigma)f_1(y,\sigma),(y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{28}$$
$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0,\quad \sigma\in[0,T_1], \tag{29}$$
$$a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)=\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)v_{2y}(0,\sigma),$$
$$\sigma\in[0,T_1], \tag{30}$$
$$h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy=-h(\sigma)\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy,$$
$$\sigma\in[0,T_1], \tag{31}$$

де

$$f_1(y,\sigma):=\int\limits_0^1 \left.\frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\right|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds.$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_\sigma=\frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}v_y,\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1},$$

зведемо задачу (28)-(31) до системи рівнянь

$$v(y,\sigma)=\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G^*(y,\sigma,\eta,\tau)\big(v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\times$$
$$\times(\tau^{\beta_1}(a(\tau)h_2^2(\tau)-a_2(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+$$
$$+h_2(\tau)))(\gamma h_1^2(\tau)h_2^2(\tau))^{-1}+$$
$$+\frac{\eta(p(\tau)h_2(\tau)-\tau h_2'(\tau)h(\tau))}{\tau h_1(\tau)h_2(\tau)}v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\eta h(\tau)f_1(\eta,\tau)\Big)d\eta,(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}, \tag{32}$$
$$h(\sigma)=-\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy},\sigma\in[0,T_1], \tag{33}$$
$$a(\sigma)=\frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)}{v_{2y}(0,\sigma)},$$
$$\sigma\in[0,T_1], \tag{34}$$

$$p(\sigma)=\frac{1}{\nu_2(\sigma)}\bigg(-h(\sigma)\nu_2(\sigma)-\frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1(\sigma)}\times$$
$$\times(v_y(\sigma,\sigma)-v_y(0,\sigma))+$$
$$+\frac{\sigma^{\beta_1}(a_2(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)h_2(\sigma))}{\gamma h_1(\sigma)h_2(\sigma)}(v_{2y}(\sigma,\sigma)-$$
$$-v_{2y}(0,\sigma))-\frac{h(\sigma)h_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\sigma\nu_2(\sigma)-$$
$$-\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}h(\sigma)\big(h_1(\sigma)f_1(y,\sigma)\big)dy+$$
$$+\int\limits_0^\sigma f(yh(\sigma),\sigma)dy\bigg),\sigma\in[0,T_1], \tag{35}$$

де $p(\sigma):=\sigma h'(\sigma)$. Підставивши вирази для $v(y,\sigma)$ і $h(\sigma)$ з (32) і (33) у формули (34) і (35), легко переконатись, що (32)-(35) є системою однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Окрім того, оскільки $v_2(y,\sigma)$ задовольняє умову (7), то з припущень теореми маємо $v_{2_y}(0,\sigma)\neq 0,\sigma\in[0,T_1]$. Так само з припущень теореми випливає, що знаменник у (35) відмінний від нуля при $\sigma\in[0,T_1]$. Використовуючи умови теореми і те, що $v_2(y,\sigma)$ задовольняє умову (8), надамо правій частині рівняння (33) такого вигляду:

$$\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy}=\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\nu_4(\sigma)}=$$
$$=\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\sigma\nu_0(\sigma)}.$$

З того, що функція $\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy$ є неперервною на проміжку $[0,T_1]$, випливає, що права частина рівняння (33) неперервна на $[0,T_1]$. Отже, ядра інтегральних рівнянь (32)-(35) інтегровні.

Дослідимо поведінку густин інтегральних рівнянь (32)-(35). Для оцінки $v_{2_{yy}}(y,\sigma)$, що знаходиться під знаком інтеграла з (32), зробимо заміну

$$v_2(y,\sigma)=\tilde v_2(y,\sigma)+\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)).$$

Функція $\tilde{v}_2(y,\sigma)$ є розв'язком задачі

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\tilde{v}_{2y} + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(yh_2(\sigma),\sigma) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) +$$
$$+ \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{yh_2'(\sigma)}{\sigma h_2(\sigma)}(\nu_2(\sigma) -$$
$$- \nu_1(\sigma)), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$\tilde{v}_2(0,\sigma) = \tilde{v}_2(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1].$$

За допомогою функції Гріна $\tilde{G}(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\tilde{v}_{2y}$$

його можна подати у вигляді

$$\tilde{v}_2(y,\sigma) = \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) +$$
$$+ \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)}(\nu_2(\tau) -$$
$$- \nu_1(\tau))\Bigg)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{36}$$

Повертаючись до $v_2(y,\sigma)$, знаходимо

$$v_{2yy}(y,\sigma) = \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) +$$
$$+ \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)}(\nu_2(\tau) -$$
$$- \nu_1(\tau))\Bigg)d\eta, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}. \tag{37}$$

Для оцінки одержаного виразу скористаємось оцінкою другої похідної об'ємного потенціалу [14]:

$$\left|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)q(\eta,\tau)d\eta\right| \leq$$
$$\leq C\int_0^\sigma \frac{d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\delta/2}}. \tag{38}$$

Тут $q(y,\sigma)$ – довільна неперервна в $\overline{Q}_{T_1}$ функція, яка задовольняє умову Гельдера за змінною y з показником $\delta, 0 < \delta < 1, C-$ відома стала, $\theta_2(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \frac{a_2(\tau)\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma h_2^2(\tau)}d\tau.$

Беручи до уваги (38) та співвідношення $\nu_1'(\sigma) = \frac{1}{\gamma}\mu_i'(\sigma^{\frac{1}{\gamma}})\sigma^{\frac{1}{\gamma}-1}, i = 1,2,$ оцінимо один з виразів, що утворюють (37):

$$\left|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\right| \leq$$
$$\leq C_4\int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}}, \tag{39}$$

Інші вирази з (37) оцінюємо аналогічно, використовуючи умови теореми. Тоді, зважаючи на нерівність $\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau) \geq C_5(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})$, з (37) і (39) отримуємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_6\int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq$$
$$\leq C_{25}\int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну $z = \frac{\tau}{\sigma}$:

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_7\sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta}\int_0^1 \frac{z^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}dz}{(1 - z^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq$$
$$\leq C_8\sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta}.$$

Звідси випливає, що права частина (32) визначена і неперервна в $\overline{Q}_{T_1}$. Отже, система рівнянь (32)-(35) має лише тривіальний розв'язок. Це означає, що розв'язок задачі (5)-(8), а також і задачі (1)-(4) єдиний. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, N6. – P. 1-27.

2. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, N7. – С. 901-910.

3. *Баранська І.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, N2. – С. 32-42.

4. *Баранська І., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, N4. – С. 467-484.

5. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, N4. – С. 7-18.

6. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – **14**, N5. – P. 465-480.

7. *Іванчов М., Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, N2. – С. 1487-1500.

8. *Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N.* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space // J.Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – **16**, N4. – P. 397-415.

9. *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням в області з вільною межею // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – **64**. – С. 84-97.

10. *Іванчов М.І.* Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, N2. – С. 82-87.

11. *Іванчов М., Савіцька Т.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу // Укр. мат. вісник. – 2011. – **8**, N3. – С. 381-403.

12. *Ivanchov M.* Inverse problem for equation of parabolic type. — Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.

13. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. – 736 с.

14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. – 428 с.