УДК 517.983

©2015 р. В. Герасимов, С. Гефтер, А. Рибалко

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

НЕЯВНЕ ЛІНІЙНЕ НЕОДНОРІДНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ПОММ'Є В КІЛЬЦІ $\mathbb{Z}[[x]]$

У роботі для довільного цілого числа $b \neq \pm 1$ знайдено критерій існування розв'язку рівняння $b\frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами та отримано явну формулу для його єдиного розв'язку, що належить цьому кільцю. Результати роботи основані на застосуванні p-адичної топології на кільці $\mathbb{Z}$.

For an arbitrary integer $b \neq \pm 1$ an existence criterion of a solution of the equation $b\frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x)$ from the ring $\mathbb{Z}[[x]]$ of formal power series with integers coefficients is found in the paper. Moreover, an explicit formula for its unique solution from this ring is obtain. The results of paper are based of using the p-adic topology on the ring $\mathbb{Z}$.

1. Вступ

Нехай b - фіксоване ціле число, $\mathbb{Z}[[x]]$ - кільце формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами і $f \in \mathbb{Z}[[x]]$. Розглянемо наступне функціональне рівняння

$$b \cdot \frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x). \tag{1}$$

Ліва частина цього рівняння містить оператор Помм'є

$$\Delta(y)(x) = \frac{y(x)-y(0)}{x}$$

(див., наприклад, [1]), що є коректно визначеним у кільці $\mathbb{Z}[[x]]$: якщо $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, тоді $\Delta(y)(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots$. Оператор Δ ще називають оператором лівого зсуву (або the bachward shift operator). Оператор Помм'є знаходить важливі застосування у теорії функцій ([2]-[4]), теорії операторів у просторах голоморфних функцій (див., наприклад, [1], [5]-[7]) та в загальній теорії лінійних операторів [8]). Рівняння (1) будемо називати рівнянням Помм'є. Якщо $b = 1$, тоді, як легко бачити, для будь-якого $y_0 \in \mathbb{Z}$ початкова задача

$$\begin{cases} b \cdot \frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

має наступний єдиний розв'язок, що належить $\mathbb{Z}[[x]]$:

$$y(x) = \frac{y_0 - xf(x)}{1-x} = (y_0 - xf(x))(1+x+x^2+\ldots).$$

При $b \neq \pm 1$ рівняння (1) є неявним над кільцем цілих чисел. У роботі для довільного цілого $b \neq \pm 1$ знайдено крітерій існування розв'язку початкової задачи (2) з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ (див. теорему 3.3 та наслідок 3.6) та отримано явну формулу для єдиного розв'язку рівняння (1), що належить $\mathbb{Z}[[x]]$ (наслідок 3.5). Важливу роль при цьому відіграє застосування p-адичної топології на кільці цілих чисел (див., наприклад, [9, 10]).

За основними результатами роботи була зроблена доповідь на міжнародній науковій конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченій 80-річчю від дня народження В.І.Фодчука [11].

2. Рівняння Помм'є в просторі $\mathbb{Q}[[x]]$ та в кільці $\mathbb{Z}[x]$

В цьому розділі ми розглянемо питання про розв'язки рівняння Помм'є (1) у векторному просторі $\mathbb{Q}[[x]]$ формальних степеневих рядів з раціональними коефіцієнтами та в кільці $\mathbb{Z}[x]$ поліномів з цілими коефіцієнтами.

Випадок простору $\mathbb{Q}[[x]]$ є дуже простим.

Теорема 2.1. *Нехай $b \in \mathbb{Q}$ і $f \in \mathbb{Q}[[x]]$. Тоді для будь-якої початкової умови $y(0) = y_0 \in \mathbb{Q}$ задача (2) має єдиний розв'язок, що* *належить простору* $\mathbb{Q}[[x]]$.

Доведення. Можна вважати, що $b \neq 0$. Оскільки $y(0) = y_0$, то з рівняння (1) ми отримуємо

$$y(x) = \frac{by_0 - xf(x)}{b - x} =$$

$$= \left(y_0 - \frac{x}{b} \cdot f(x)\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1} =$$

$$= \left(y_0 - \frac{x}{b} f(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{b^n}\right).$$

Таким чином, якщо $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тоді єдиний розв'язок початкової задачі (2) у вигляді формального степеневого ряду з раціональними коефіцієнтами має наступний явний вигляд:

$$y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{b^n}\right) y_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{b^{n-k}}\right) x^n.$$

$\square$

Розглянемо тепер випадок, коли f – поліном з цілими коефіцієнтами.

Теорема 2.2. *Нехай* $b \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{Z}[x]$ *і* $\deg f = m$. *Тоді рівняння (1) має єдиний поліноміальний розв'язок* $y(x)$ *з цілими коефіцієнтами і* $\deg y = m$.

Доведення. Нехай $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$. Тоді $\triangle(f)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + a_2 x + \ldots + a_m x^{m-1}$. Таким чином, $\triangle(f) \in \mathbb{Z}[x]$ і $\deg \triangle(f) = m - 1$.

Розглянемо тепер поліном

$$y = f + b\triangle(f) + b^2\triangle^2(f) + \ldots + b^m\triangle^m(f). \quad (3)$$

Ми маємо, що $y \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg y = m$ і

$$b\triangle(y) + f = b\triangle(f) + b^2\triangle^2(f) + \ldots +$$

$$+ b^m\triangle^m(f) + f,$$

оскільки $\triangle^{m+1}(f) = 0$. Таким чином, $b\triangle(y) + f = y$, тобто y є розв'язком рівняння (1). Доведемо єдиність розв'язку з кільця $\mathbb{Z}[x]$. Нехай $b\triangle(y) = y$. Тоді

$$y = b\triangle(y) = b^2\triangle^2(y) = \ldots =$$

$$= b^{m+1}\triangle^{m+1}(y) = 0.$$

Теорему доведено.

З рівності (3) тепер випливає таке твердження.

Наслідок 2.3. *Нехай* $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ *і* $y_0 \in \mathbb{Z}$. *Тоді початкова задача (2) має розв'язок з кільця* $\mathbb{Z}[x]$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$a_0 + ba_1 + b^2 a_2 + \ldots + b^m a_m = y_0, \quad (4)$$

тобто $y_0 = f(b)$.

3. Рівняння Помм'є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$

В цьому розділі ми будемо розглядати основний випадок, коли $f(x)$ – формальний степеневий ряд з цілими коефіцієнтами. Якщо f не є поліномом, то ситуація більш складна і цікава. По-перше, відзначимо, що рівняння (1) взагалі може не мати розв'язку у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Теорема 3.1. *Нехай* $b = 2$ *і* $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ *Тоді рівняння (1), тобто рівняння*

$$2 \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + 1 + x^2 + x^4 + \ldots = y(x)$$

не має розв'язків у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Доведення. Нехай $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ – розв'язок нашого рівняння з простору $\mathbb{Q}[[x]]$ (див. теорему 2.1). Тоді для коефіцієнтів c_n маємо рекуррентне співвідношення $c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n - a_n)$, де $a_{2k} = 1$, $a_{2k-1} = 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ Звідси

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(|c_n| + 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|c_{n-1}| + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \leq \ldots,$$

звідки

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(|c_0| + 1) + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}}(|c_0| + 1) + 1.$$

Тому існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $|c_{n+1}| < 2$ для $n \geq n_0$. Якщо припустити, що $c_{n+1} \in \mathbb{Z}$, отримуємо: $c_n = 0$ або $c_n = \pm 1$ для всіх $n \geq n_0 - 1$. Якщо $c_n = 0$ для деякого n, тоді

$c_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, тобто n є непарним і $c_{n+1} = 0$. Звідси $c_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} = -\frac{1}{2}$, що неможливо. Нехай тепер $|c_n| = 1$ для всіх $n \geq n_0 - 1$. Тоді для непарного n ми також маємо невірну рівність $|c_{n+1}| = \frac{1}{2}|c_n|$. Таким чином, всі коефіцієнти c_n не можуть бути цілими. □

Зауваження 3.2. *Узагальнюючи міркування з доведення теореми 3.1, можна показати, що рівняння*

$$2 \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = y(x)$$

не має розв'язків з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ для будь-якого ряду $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, де $a_n = 0$, або $a_n = 1$, і 0 та 1 зустрічаються серед коефіцієнтів a_n нескінченну кількість разів.

Рівняння (1) може не мати розв'язків з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$, але, якщо такий розв'язок існує, то, як правило, він є єдиним.

Теорема 3.2 *Нехай $b \neq \pm 1$. Тоді однорідне рівняння*

$$b \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} = y$$

має тільки нульовий розв'язок у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Доведення. Нехай $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ – розв'язок однорідного рівняння $b \cdot \frac{y(x)-y(0)}{x} = y$, що належить $\mathbb{Z}[[x]]$. Тоді

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots$$

і ми маємо: $bc_1 = c_0$, $bc_2 = c_1$, $bc_3 = c_2, \ldots$ Звідси віпливає, що $c_0 = b^n c_n$ для будь якого n. Тому $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = 0$, тобто $y = 0$.□

Для отримання критерію існування розв'язку рівняння (1) з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ ми будемо використовувати p-адичну топологію на кільці $\mathbb{Z}$.

Нехай p–просте число і $\mathbb{Z}_p$ – кільце цілих p-адичних чисел. На $\mathbb{Z}_p$ ми будемо розглядати стандартну топологію і норму $||\cdot||_p$ (див. [10], [11]). Для нас буде важливим, що збіжність в кільці $\mathbb{Z}_p$ ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ є еквівалентною тому, що $\alpha_n \to 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 3.3. *Нехай $b \neq 0$, $b \neq \pm 1$ і $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ – формальний степеневий ряд з цілими коефіцієнтами. Рівняння*

$$b \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + f(x) = y(x)$$

має розв'язок у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли існує таке ціле число c_0, що для всіх простих чисел p, на які ділиться число b, виконується наступна рівність в кільці $\mathbb{Z}_p$:

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots = c_0. \tag{5}$$

При цьому розв'язок з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ є единим і має такий вигляд:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots,$$

де

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots, \\ c_1 &= a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \ldots, \\ c_2 &= a_2 + a_3 b + a_4 b^2 + \ldots, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

і всі ряди у правих частинах рівностей (6) збігаються в $\mathbb{Z}_p$, для тих p, що є дільниками числа b.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$, $c_n \in \mathbb{Z}$ – розв'язок рівняння (1). Тоді для коефіцієнтів c_n ми маємо наступне рекурентне співвідношення:

$$bc_{n+1} + a_n = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Розглянемо тепер ряд у лівій частині рівності (5). Якщо b ділиться на просте число p, то $b^n \to 0$ в кільці $\mathbb{Z}_p$. Тому $a_n b^n \to 0$ в $\mathbb{Z}_p$, тобто ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ збігається у кільці $\mathbb{Z}_p$. Знайдемо його суму. З рівності (7) отримуємо:

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots + a_N b^N =$$

$$= c_0 - bc_1 + b(c_1 - bc_2) + b^2(c_2 - bc_3) + \ldots +$$

$$+ b^N(c_N - bc_{N+1}) = c_0 - b^{N+1} c_{N+1}.$$

Оскільки $b^{N+1}c_{N+1} \to 0$ в кільці $\mathbb{Z}_p$, то ми одержуємо рівність (5).

Доведемо тепер *достатність* умови (5). Якщо b ділиться на просте число p, то всі ряди у правих частинах рівності (6) збігаються у кільці $\mathbb{Z}_p$. Оскільки $c_0 \in \mathbb{Z}$ і ряд (5) збігається для всіх p, на які ділиться число b, то можна показати, що суми всіх рядів з рівності (6) є цілими числами. Тепер легко перевірити, що послідовність $\{c_n\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (7). Тому степеневий ряд $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ є розв'язком рівняння (1). Єдиність цього розв'язку випливає з теореми 3.2. $\square$

Зауваження 3.4. *Якщо* $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *і* b *ділиться на* p, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ *збігається в кільці* $\mathbb{Z}_p$ *і його суму можна розглядати як значення* f *у точці* b.

Наслідок 3.5. *Нехай* $b \neq \pm 1$ *і для* $b \neq 0$ *виконана умова (5). Тоді єдиний розв'язок рівняння (1) з кільця* $\mathbb{Z}[[x]]$ *можна записати в наступній формі*

$$y(x) = f(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \triangle^n(f)(b)x^n.$$

З теореми 3.3 випливає твердження, що є аналогом наслідка 2.3 для випадку формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами.

Наслідок 3.6. *Нехай* $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ *і* $y_0 \in \mathbb{Z}$. *Тоді початкова задача (2) має розв'язок з кільця* $\mathbb{Z}[[x]]$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх простих чисел* p, *на які ділиться число* b, *виконується наступна рівність в кільці* $\mathbb{Z}_p$:

$$a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \dots = y_0, \qquad (8)$$

тобто $y_0 = f(b)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибіда М.І.* Оператори Помм'є в просторі аналітичних у крузі функцій. — Киев: Інститут математики НАН України, 1997. — 125 с.

2. *Pommies M.* Sur les zeros des reste successifs des series de Taylor. // Acad. Sci. Univ. Toulouse – 1960. – **250**, N7. – pp. 1168–1170.

3. *Pommies M.* Sur les restes successifs des series de Taylor // C. R. Acad. Sci. – 1960. – **250**, N15. – pp. 2669—2671.

4. *Лінчук С.С.* Про наукову спадщину професора Миколи Івановича Нагнибіди // Математичний вісник Наукового Товариства ім. Шевченка: [зб. наук. пр.].— 2009. – **6**. – с. 15–34.

5. *Линчук Н.Е.* Представления коммутантов оператора Поммье и их приложения // Матем. заметки. – 1988. – **44**, N6. – с. 794–802.

6. *Dimovski I.N., Hristov V.Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science. – 2005. – **44**. – p. 1239—1251.

7. *Linchuk Yu.S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2006. **12**, N4. – p. 384—388.

8. *Douglas R.G., Shapiro H.S., and Shields A.L.* Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1970. **20**, N1. – 37—76.

9. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1985.— 504 с.

10. *Ганюшкін О.Г.* Вступ до алгебри. — Київ, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2011. — 176 с.

11. *Герасимов В., Гефтер С., Рибалко А.* Неявне лінійне неоднорідне функціональне рівняння з оператором Помм'є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$ // Матеріали міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування присвяченої 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука, 28–30 вересня 2016 року.— Чернівці: 2016. – с. 33–34.