УДК 517.9

©2016 р. В.В. Гоцуленко

Інститут технічної теплофізики НАН України

РОЗРИВНІ І ХАОТИЧНІ АВТОКОЛИВАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Одержано умови існування розривних періодичних і хаотичних автоколивальних розв'язків для нелінійної крайової задачі для хвильового рівняння. Показано, що виникнення даних розв'язків еквівалентно наявності циклів або хаотичних атракторів у відповідному одновимірному рекуррентному відображенні.

The obtained conditions for the existence of discontinuous periodic and chaotic self-oscillatory solutions for a nonlinear boundary value problem for the wave equation. It is shown that the appearance of the data, the solution is equivalent to the existence of cycles or chaotic attractors in the corresponding one-dimensional recurrence map.

Вступ. Виникнення розривних (релаксаційних) автоколивальних розв'язків дисипативних динамічних систем зазвичай асоціюється з вивченням їх асимптотик при $\varepsilon \to 0$, де малий параметр $\varepsilon > 0$ знаходиться множником при головній похідній. Класичним таким прикладом є сингулярно збурена система рівнянь осцилятора Ван дер Поля [1]

$$\frac{dx}{dt} = -y,\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = x - \frac{y^3}{3} + y.$$

Однак збудження розривних автоколивань в дисипативній динамічній системі може відбуватися і при відсутності постійного малого параметра $\varepsilon > 0$. В [2] розглядалися умови виникнення розривних періодичних автоколивань в неявно сингулярно збурених динамічних системах

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)\,,\ \frac{dy}{dt} = g(x,z)\,,$$

де $y = \varphi(z)$ – неперервно диференційована функція, що не має однозначної оберненої функції.

Мабуть вперше, О. А. Вітт [3] при дослідженні розривних (релаксаційних) автоколивань в системі телеграфних рівнянь за допомогою автомодельних розв'язків звів рішення даної задачі до розгляду певних одновимірних рекурентних відображень. Однак у той час теорія динамічного хаосу [4] ще не була відкрита, і таким чином, хаотичні розв'язки крайових задач для гіперболічних рівнянь, які породжуються нерегулярними аттракторами відповідних одновимірних рекурентних відображень не були знайденими.

В монографії [5] розглянуто крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, які можна звести до різницевих або диференціально-різницевих рівнянь.

Постановка задачі та формалізація одержаних результатів. В даній роботі розглядаються умови виникнення розривних періодичних або хаотичних автоколивань в хвильовому рівнянні

$$u_{xx}(x,t) = a^2 u_{tt}\ \forall\,(x,t) \in \Omega = (0;\ell)\times\mathbb{R}, \quad (1)$$

яке доповнюється граничними умовами:

$$u(0,t) = 0;\ \int_0^{\ell} u_t(x,t)\,dx = \Psi\left[u(\ell,t)\right], \quad (2)$$

де $a = \mathrm{const}$, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція.

Добре відомо, що автоколивання від початкових умов не залежать (принаймні в досить малої околиці відповідного граничного циклу). Тому надалі ми їх явно не конкретизуємо. Також зазначимо, що хвильове рівняння з нульовими граничними умовами є консервативною системою. Завдяки саме граничній умові при $x = \ell$ дана динамічна система (1)–(2) є дисипативною.

Надалі розв'язки задачі (1)–(2) розуміються в слабкому сенсі як елементи простору $L^{\infty}(\Omega)$.

Означення. Функцію $u \in L^{\infty}(\Omega)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (1) – (2), якщо виконуються варіаційні рівності:

$$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \ \forall \psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,t)\left[a^2\varphi_{xx}(x,t) - \varphi_{tt}(x,t)\right]dxdt = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,t)\,\psi'(t)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi\left[u(\ell,t)\right]\psi(t)\,dt.$$

Теорема. Введемо до розгляду відображення

$$Y = \mathcal{F}[X] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

яке задається параметрично

$$Y = \frac{a^{-1}\Psi[u] - u}{2}, \ X = \frac{a^{-1}\Psi[u] + u}{2} \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді будь який стійкий m – цикл $(m > 1)$ даного відображення

$$\mathcal{C}_m\left\{F_1^{\infty}, F_2^{\infty} = \mathcal{F}(F_1^{\infty}), \dots, F_m^{\infty} = \mathcal{F}(F_1^{\infty})\right\}$$

породжує орбітально асимптотично стійкий періодичний розв'язок задачі (1)–(2), який визначається співвідношенням

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t + \frac{x}{a}\right), \tag{4}$$

де функція F являється mT – періодичною і при $0 \le t < mT$ $(T = 2a\ell)$ задається рівністю

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m-1} F_{k+1}^{\infty}\chi_{[kT;(k+1)T)}(t). \tag{5}$$

У випадку, коли відображення (3) має хаотичний атрактор

$$\mathcal{C}_{\infty} = \left\{F_k^{\infty} : F_{k+1}^{\infty} = \mathcal{F}\left[F_k^{\infty}\right] \forall k \ge 1\right\},$$

наприклад атрактор Фейгенбаума, то він породжує хаотичний автоколивальний розв'язок задачі (1)–(2), який задається формулою (4), де функція $F(t)$ задається рівністю

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} F_{k+1}^{\infty}\chi_{[kT;(k+1)T)}(t), \tag{6}$$

та при $k \le 1$ покладено $F_{k-1}^{\infty} = \mathcal{F}\left[F_k^{\infty}\right]$.

Доведення. Введемо до розгляду нову змінну $i(x,t) = \int\limits_0^x u_t(x,t)\,dx$ за допомогою якої хвильове рівняння (1) може бути представлено у вигляді системи телеграфних рівнянь першого порядку

$$i_x - u_t = 0, \ u_x + \frac{1}{a^2}i_t = 0. \tag{7}$$

Відповідно граничні умови (2) запишуться у наступному вигляді

$$u(0,t) = 0, \ i(\ell,t) = \Psi\left[u(\ell,t)\right]. \tag{8}$$

Неважко перевірити, що система рівнянь (7) допускає автомодельний розв'язок

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t + \frac{x}{a}\right), \tag{9}$$

$$i(x,t) = a\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t + \frac{x}{a}\right)\right], \tag{10}$$

де F – довільна кусково - неперервна функція. Зазначимо також, що при цьому перша гранична умова з (8) автоматично виконується. Підставляючи співвідношення (9) – (10) в другу граничну умову (7), одержується наступне рівняння

$$\alpha + \beta = a^{-1}\Psi\left[\alpha - \beta\right], \tag{11}$$

де $\alpha = F(t - \ell/a)$, $\beta = F(t + \ell/a)$. За теоремою про неявну функцію співвідношення (11) допускає явне подання $\beta = \mathcal{F}[\alpha]$.

Отримане функціональне рівняння дає можливість визначати значення функції F в момент часу $t + T$, якщо відомо її значення в момент часу t:

$$F(t+T) = \mathcal{F}\left[F(t)\right], \ T = 2\ell/a. \tag{12}$$

Позначимо через $\mathcal{K}(\mathbb{R},T)$ клас всіх функцій $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусково - постійних на кожному інтервалі $I_k = (kT;(k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$ дійсної вісі $\mathbb{R}$. Звуження функціонального рівняння (12) на даний клас функцій $\mathcal{K}(\mathbb{R},T)$ призводить до розгляду одновимірного рекурентного відображення:

$$F_{n+1} = \mathcal{F}\left[F_n\right], \ n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Припустимо, що відображення (13) має стійкий m – цикл $\mathcal{C}_m\left\{F_1^\infty, F_2^\infty, \ldots, F_m^\infty\right\}$. Перевіремо, що в даному випадку формули (4) – (5) задають орбітально стійкий, в сенсі наведеного вище означення, розв'язок задачі (1) – (2). Дійсно, в даному випадку кусково - постійна періодична функція (5) є розв'язком функціонального рівняння (12). Отже підставляючи (5) в формули (9) – (10), одержується тотожнє виконання рівності $i\left(\ell, t\right) = \Psi\left[u\left(\ell, t\right)\right]\ \forall t \in \mathbb{R}$. Розглядаючи похідну $u_t(x,t)$ в сенсі розподілів, друга варіаційна рівність з означення може бути записана у вигляді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\int\limits_0^\ell u_t dx\right] - \Psi\left[u\left(\ell, t\right)\right]\right)\psi\left(t\right)dt = 0.$$

Однак підинтигральний вираз в дужках, в нових позначеннях, співпадає з виразом $i\left(\ell, t\right) - \Psi\left[u\left(\ell, t\right)\right]$, який тотожно дорівнює нулю. Далі, для будь- якої кусково - неперервної функції F мають місце рівності

$$\iint\limits_\Omega F\left(t - \tfrac{x}{a}\right)\left[a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt}\right]dxdt = \\ = a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(z\right)\left[\varphi_{zz} - \varphi_{tt}\right]dzdt,$$

$$\int F\left(t + \tfrac{x}{a}\right)\left[a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt}\right]dxdt = \\ = -a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(z\right)\left[\varphi_{zz} - \varphi_{tt}\right]dzdt,$$

які одержуються шляхом заміни змінних $\left\{z = t - \frac{x}{a}, t = t\right\}$ відповідно в першому, та $\left\{z = t + \frac{x}{a}, t = t\right\}$ другому інтегралах. Таким чином, перша рівність з означення розв'язку також виконується.

Орбітальна асимптотична стійкість побудованого розв'язку є наслідком стійкості відповідного m – циклу $\mathcal{C}_m$ відображення $\mathcal{F}$.

У випадку, коли відображення (13) має хаотичний атрактор $\mathcal{C}_\infty$, рівність (6) визначає кусково - постійну, обмежану функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка за побудовою задовольняє функціональне рівняння (12). За повною аналогією, як у попередньому випадку, перевіряється, що формули (4), (6) визначають узагальнений розв'язок задачі (1) – (2).

Приклади. Розглянемо задачу (1) – (2), де відображення $u \to \Psi\left[u\right]$ задається параметрично $(t \in \mathbb{R})$

$$u = t\left(a + 1 - t\right), \Psi\left[u\right] = a^{-1}t\left(a - 1 + t\right).$$

Неважко перевірити, що в даному випадку відображення (3) являється логістичним з параметром a^{-1}. Таким чином, згідно з теоремою Фейгейнбаума [4], дане відображення при $a \leq a^* \approx 0.2802$ має неперіодичні траєкторії, що відповідають режиму детермінованого хаоса, а при $a > a^*$ має цикли періодів 2^n, де $n \to \infty$, при $a \to a^* + 0$.

Тепер розглянемо відображення Ψ, що задається формулами $(X_0 < X_1 < X_2)$

$$u = X - Y,\ \Psi\left[u\right] = a\left(X + Y\right),\ \text{де}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{X_2 - X_1}{X_1 - X_0}\left(X - X_0\right) + X_1, & X_0 \leq X \leq X_1 \\ \frac{X_2 - X_0}{X_2 - X_1}\left(X_1 - X\right) + X_2, & X_1 < X \leq X_2 \end{cases}$$

Нескладно перевірити, що в даному випадку відображення (3) має цикл періоду три $\mathcal{C}_3 = \left\{X_0, X_1, X_2\right\}$. Таким чином, за теоремою Лі та Йорке [4] дане відображення має континуум неперіодичних траєкторій, які породжують хаотичні розв'язки задачі (1) – (2). Також за теоремою О. М. Шарковського відображення (3) має безліч циклів, періоди яких підпорядковуються так званому порядку Шарковського [5], та які породжують розривні періодичні розв'язки задачі (1) – (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978. — 392 с.

2. *Гоцуленко В.В.* Автоколебания в неявно сингулярно возмущенных динамических системах на плоскости // Нелинейная динамика. – 2014. – **10 (2)**. – С. 157-175.

3. *Витт А.А.* К теории скрипичной струны // Журнал технической физики. – 1936. – **6 (9)**. – С. 1459-1479.

4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001. — 296 с.

5. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — К.: Наук. думка, 1986. — 280 с.