

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
Львів

ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ $\vec{2b}$ -ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Розглядається задача Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з $\vec{2b}$ -параболічною частиною за основними змінними із залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. Встановлюються властивості відповідного такої задачі об'ємного потенціалу в просторах Гельдера зростаючих при $|x| \rightarrow \infty$ функцій. З цих властивостей випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

A Cauchy problem for degenerate equation of Kolmogorov type with $\vec{2b}$ -parabolic part with respect to main variables with dependent on only time-variable t coefficients is considered. Properties of a volume potential which corresponding to the problem are established in Hölder spaces of increased functions as $|x| \rightarrow \infty$. From these properties a well-posedness of the Cauchy problem with homogeneous initial conditions is implied.

Вступ. Розглядатимемо одновимірну часову змінну t і n -вимірну просторову змінну x , яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in R^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Нехай b_1, \dots, b_{n_1} – деякі числа з N . Позначимо через $\vec{2b}$ вектор $(2b_1, \dots, 2b_{n_1})$, через b – найменше спільне кратне чисел b_1, \dots, b_{n_1} , через m_j – число b/b_j , $j \in \{1, \dots, n_1\}$. Об'єктом дослідження в цій статті є задача Коші вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1} \right) \times \\ \times u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in R^n, \quad (2)$$

де для мультиіндекса $k_1 := (k_{11}, \dots, k_{1n_1}) \in Z_+^{n_1}$ покладено $\|k_1\| := \sum_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times R^n$, T – додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1} , $k_1 \in Z_+^{n_1}$, $\|k_1\| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0, T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t) \partial_{x_1}^{k_1}$ рів-

номірно на $[0, T] \times R^{n_1}$ $\vec{2b}$ -параболічний, тобто існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх

$t \in [0, T]$ і $\sigma_1 \in R^{n_1}$ виконується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t) (i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Тут i – уявна одиниця.

Якщо $n_3 \geq 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3 . Коли $n_3 = 0$, а $n_2 \geq 1$, то є виродження за однією групою змінних x_2 . У випадку $n_2 = n_3 = 0$ рівняння (1) невироджене.

Рівняння (1) є виродженим рівнянням типу Колмогорова з $\vec{2b}$ -параболічною частиною за основними змінними. Для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G , детальні властивості якого наведено в [1]. Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t, x) := \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (3)$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b_j = 1$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$, в [1] досліджувались властивості функції (3) в припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x| \rightarrow \infty$ функції f . Зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \rightarrow \infty$ густини f і функції u та

її похідних з'ясовувався в [2] для рівняння (1) 2-го порядку, в [3] – довільного порядку при $b_j = b$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$. Тут ми наведемо аналогічні властивості (3) для рівняння (1).

1. Означення норм і просторів. Користуватимемося такими позначеннями: $M := \{1, 2, 3\}$; $N_s := \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{n_l} (2b(l-1) + m_j)/(2b)$, $s \in M$, $N := N_3$; Z_+^l – множина всіх l -вимірних мультиіндексів; $k_l := (k_{l1}, \dots, k_{ln_l})$ – елемент множини $Z_+^{n_l}$, $l \in M$; $k := (k_1, k_2, k_3)$ – елемент множини Z_+^n ; $|k_l| := k_{l1} + \dots + k_{ln_l}$, якщо $k_l \in Z_+^{n_l}$, $l \in M$; $N_{k_l} := \sum_{j=1}^{n_l} (2b(l-1) + m_j)k_{lj}/(2b)$, $k_l \in Z_+^{n_l}$, $l \in M$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$; q', q'' – найбільше і найменше з чисел q_j , $j \in \{1, \dots, n_1\}$; m', m'' – найбільше і найменше з чисел m_j , $j \in \{1, \dots, n_1\}$; $\bar{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \{1, \dots, n_1\}$; $\bar{x}_{2j}(t) := x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$; $\bar{x}_{3j}(t) := x_{3j} + tx_{2j} + (t^2/2)x_{1j}$, $j \in \{1, \dots, n_3\}$; $\bar{x}_l(t) := (\bar{x}_{l1}(t), \dots, \bar{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M$; $X_1(t) := (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$; $X_2(t) := (\xi_1, \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$; $X_3(t) := (\xi_1, \xi_2, \bar{x}_3(t))$; $\rho_s(t, x, \xi) := \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{n_l} t^{1-lq_j} |\bar{x}_{lj}(t) - \xi_{lj}|^{q_j}$, $s \in M$; $\rho_0(t, x, \xi) := 0$; $\rho(t, x, \xi) := \rho_3(t, x, \xi)$; $E_c(t, x, \tau, \xi) := \exp\{-c\rho(t - \tau, x, \xi)\}$, якщо c – додатна стала; $[a, x] := \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} a_{lj} |x_{lj}|^{q_j}$, якщо $a = (a_1, a_2, a_3) \in R_+^n$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^n$; $|x_l| := \left(\sum_{j=1}^{n_l} x_{lj}^2\right)^{1/2}$, $x_l \in R^{n_l}$, $l \in M$; ∂_t, ∂_y – операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y ; ∂_y^s – операція диференціювання порядку $s > 1$ за змінною y ; $\partial_{x_l}^{k_l} := \partial_{x_{l1}}^{k_{l1}} \dots \partial_{x_{ln_l}}^{k_{ln_l}}$, якщо $x_l \in R^{n_l}$, $k_l \in Z_+^{n_l}$, $l \in M$; $\Delta_x' f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot)$; $d(x, \xi, \alpha) := \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - \xi_{lj}|^{\alpha_l/(2b(l-1)+m_j)}$, якщо $\{x, \xi\} \subset R^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $\alpha_1 \in [0, m'']$, $\alpha_2 \in [0, 2b+m'']$, $\alpha_3 \in [0, 4b+m'']$; $d(x, \xi; \gamma) := \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - \xi_{lj}|^{\gamma/(2b(l-1)+m_j)}$, якщо $\{x, \xi\} \subset R^n$, $\gamma > 0$; $d(x, \xi) := d(x, \xi; 1)$; $B_R := \{x \in R^n | d(x, 0) \leq R\}$.

Зауважимо, що існують додатні числа c' ,

c'' такі, що для довільних $\{x, \xi\} \subset R^n$ і $\gamma > 0$:

$$c'(d(x, \xi))^\gamma \leq d(x, \xi; \gamma) \leq c''(d(x, \xi))^\gamma.$$

Однаково позначаються різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Для додатного числа c_0 і набору $a := (a_1, a_2, a_3)$, $a_l := (a_{l1}, \dots, a_{ln_l})$, $l \in M$, невід'ємних чисел a_{lj} , $j \in \{1, \dots, n_l\}$, $l \in M$, таких, що $T < \min_{l \in M, j \in \{1, \dots, n_l\}} (c_0/a_{lj})^{(2b_j-1)/(2b_j(l-1)+1)}$,

розглянемо функції [1]

$$k_{lj}(t, a_{lj}) := c_0 a_{lj} (c_0^{2b_j-1} - a_{lj}^{2b_j-1} t^{2b_j(l-1)+1})^{1-q_j},$$

$$j \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in M;$$

$$k(t) := (k_{11}(t, a_{11}), \dots, k_{1n_1}(t, a_{1n_1}), k_{21}(t, a_{21}), \dots, k_{2n_2}(t, a_{2n_2}), k_{31}(t, a_{31}), \dots, k_{3n_3}(t, a_{3n_3}));$$

$$s_{1j}(t) := k_{1j}(t, a_{1j}) + 2^{q_j-1} \theta(n_2 - j) t^{q_j} \times \\ \times k_{2j}(t, a_{2j}) + 2^{q_j-2} \theta(n_3 - j) t^{2q_j} k_{3j}(t, a_{3j}),$$

$$j \in \{1, \dots, n_1\};$$

$$s_{2j}(t) := 2^{q_j-1} k_{2j}(t, a_{2j}) + 4^{q_j-1} \theta(n_3 - j) t^{q_j} \times \\ \times k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \{1, \dots, n_2\};$$

$$s_{3j}(t) := 4^{q_j-1} k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \{1, \dots, n_3\};$$

$$s(t) := (s_{11}(t), \dots, s_{1n_1}(t), s_{21}(t), \dots, s_{2n_2}(t),$$

$$s_{31}(t), \dots, s_{3n_3}(t)), \quad t \in [0, T],$$

де $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$.

Введені функції мають такі властивості:

$$k(0) = a, \quad a_{lj} \leq k_{lj}(\tau, a_{lj}) < k_{lj}(t, a_{lj}) < s_{lj}(t),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad j \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in M; \quad (4)$$

$$k_{lj}(t - \tau, k_{lj}(\tau, a_{lj})) \leq k_{lj}(t, a_{lj}),$$

$$0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad j \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in M; \quad (5)$$

$$-c_0 \rho(t, x, \xi) + [a, \xi] \leq [k(t), X_1(t)] \leq [s(t), x],$$

$$t \in (0, T], \quad \{x, \xi\} \subset R^n. \quad (6)$$

Легко переконатися, що справджуються ще такі нерівності:

$$-c_0 \rho(t - \tau, x, \xi) + [k(\tau), \xi] \leq [k(t), X_1(t - \tau)] \leq$$

$$\leq [s(t), x], \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n; \quad (7)$$

$$-c_0 \rho_{l-1}(t - \tau, x, \xi) + [k(\tau), X_l(t - \tau)] \leq$$

$$\leq [k(t), X_1(t - \tau)], \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\{x, \xi\} \subset R^n, \quad l \in M; \quad (8)$$

$$[k(T), X_1(t)] \leq [s(T), x], \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n. \quad (9)$$

Означимо норми і простори функцій. Нехай $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $\alpha_1 \in (0, m'']$, $\alpha_2 \in (m', 2b+m'']$, $\alpha_3 \in (2b+m', 4b+m'']$, $p_1 \in \{0, 1, \dots, 2b\}$, $\{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}$, $p := (p_1, p_2, p_3)$. Використовуватимемо такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0, T]} \rightarrow C$:

$C_{k(\cdot)}$ – простір усіх неперервних функцій w , для яких скінченною є норма

$$\|w\|_{k(\cdot)} := \sup_{(t, x) \in \Pi_{[0, T]}} (|w(t, x)| \exp\{-[k(t), x]\});$$

$C_{k(\cdot)}^\alpha$ – простір усіх функцій w , для яких

скінченною є норма

$$\begin{aligned} \|w\|_{k(\cdot)}^\alpha &:= \|w\|_{k(\cdot)} + [w]_{k(\cdot)}^\alpha, \text{ де } [w]_{k(\cdot)}^\alpha := \\ &= \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ x \neq x'}} \frac{|\Delta_{x'}^w(t,x)|}{d(x,x',\alpha)(\exp\{[k(t),x]\} + \exp\{[k(t),x']\})}; \\ C_{k(\cdot)}^{p,\alpha} &- \text{ простір усіх функцій } w, \text{ які разом} \\ &\text{зі своїми похідними } \partial_{x_l}^{k_l} w, l \in M, \|k_1\| \leq p_1, \\ &|k_2| \leq p_2, |k_3| \leq p_3 \text{ належать до простору} \\ &C_{k(\cdot)}^\alpha, \text{ тобто є скінченною норма} \\ \|w\|_{k(\cdot)}^{p,\alpha} &:= \|w\|_{k(\cdot)}^\alpha + \sum_{0 < \|k_1\| \leq p_1} \|\partial_{x_1}^{k_1} w\|_{k(\cdot)}^\alpha + \\ &+ \sum_{l=2}^3 \sum_{0 < |k_l| \leq p_l} \|\partial_{x_l}^{k_l} w\|_{k(\cdot)}^\alpha; \end{aligned}$$

$C_{s(\cdot)}^{p,\alpha}$ – простір, означення якого одержується з означення простору $C_{k(\cdot)}^{p,\alpha}$ заміною функції k на функцію s .

2. Відомості про фундаментальний розв'язок задачі Коші. В [1] встановлено, що ФРЗК G для рівняння (1) має вигляд

$$\begin{aligned} G(t, x; \tau, \xi) &= \\ &= (t - \tau)^{-N} F_{\sigma \rightarrow y}^{-1} [\tilde{V}(t, \tau, \sigma)](t, \tau, y)|_{y=y(t-\tau, x, \xi)}, \\ &0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \end{aligned}$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, \tau, \sigma) &:= \exp\left\{ \sum_{\|k_1\| \leq 2b} i^{|k_1|} (t - \tau)^{1 - \|k_1\|/(2b)} \times \right. \\ &\times \int_0^1 a_{k_1}(\tau + (t - \tau)\beta) (\sigma'_1 + \beta\sigma'_2 + \frac{\beta^2}{2}\sigma'_3)^{k'_1} \times \\ &\times (\sigma''_1 + \beta\sigma''_2)^{k''_1} (\sigma'''_1)^{k'''_1} d\beta \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t, x, \xi) &:= (t^{-1/(2b_1)}(x_{11} - \xi_{11}), \dots, t^{-1/(2b_{n_1})} \times \\ &\times (x_{1n_1} - \xi_{1n_1}), t^{-1-1/(2b_1)}(x_{21} + tx_{11} - \xi_{21}), \dots, \\ &t^{-1-1/(2b_{n_2})}(x_{2n_2} + tx_{1n_2} - \xi_{2n_2}), t^{-2-1/(2b_1)}(x_{31} + \\ &+ tx_{21} + \frac{t^2}{2}x_{11} - \xi_{31}), \dots, t^{-2-1/(2b_{n_3})}(x_{3n_3} + tx_{2n_3} + \\ &+ \frac{t^2}{2}x_{1n_3} - \xi_{3n_3})), \text{ і такі властивості [1, теорема 3.5]:} \end{aligned}$$

1) функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset R^n$, неперервна при $(t, x) \neq (\tau, \xi)$ разом зі своїми похідними $\partial_x^k G$ і справджуються оцінки

$$\begin{aligned} |\partial_x^k G(t, x; \tau, \xi)| &\leq \\ &\leq C_k(t - \tau)^{-N - N_{k_1} - N_{k_2} - N_{k_3}} E_c(t, x; \tau, \xi), \end{aligned}$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad k \in Z_+^n, \quad (10)$$

де C_k і c – деякі додатні сталі;
2) справджується рівність

$$\begin{aligned} &\int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi = \\ &= \exp\{(t - \tau) \int_0^1 a_0(\tau + (t - \tau)\beta) d\beta\}, \\ &0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in R^n; \end{aligned} \quad (11)$$

3) для $0 \leq \tau < t \leq T$ і $x \in R^n$ правильні рівності

$$\begin{aligned} &\partial_x^k \int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi = 0, \quad k \in Z_+^n \setminus \{0\}; \\ &\partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} \int_{R^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 d\xi_3 = 0, \\ &(k_2, k_3) \in Z_+^{n_2+n_3} \setminus \{0\}; \\ &\partial_{x_3}^{k_3} \int_{R^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_3 = 0, \quad k_3 \in Z_+^{n_3} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зауваження 1. Зі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього випливає, що функція $\int_{R^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_3$ є ФРЗК для рівняння (1), якщо в нього входять тільки перші дві групи просторових змінних ($n_3 = 0$), а $\int_{R^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 d\xi_3$ – ФРЗК для невідродженого $\vec{2b}$ -параболічного рівняння ($n_2 = n_3 = 0$), адже

$$\begin{aligned} &\int_{R^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_3 = (t - \tau)^{-N_2} \times \\ &\times F_{(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (y_1, y_2)}^{-1} [\tilde{V}(t, \tau, (\sigma_1, \sigma_2, 0))](t, \tau, y_1, y_2), \\ &\int_{R^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 d\xi_3 = (t - \tau)^{-N_1} \times \\ &\times F_{\sigma_1 \rightarrow y_1}^{-1} [\tilde{V}(t, \tau, (\sigma_1, 0, 0))](t, \tau, y_1), \end{aligned}$$

де $y_1 = y_1(t - \tau, x, \xi)$, $y_2 = y_2(t - \tau, x, \xi)$.

Зауваження 1 використовується, зокрема, для доведення рівностей (12).

Надалі стали c_0 з означення функцій $k_l(t, a_l)$, $l \in M$, братимемо з інтервалу $(0, \bar{c})$, де \bar{c} – стала з оцінок (32). Права частина нерівностей (10) і (32) містить функції E_c і ρ , які мають такі властивості [1, формули (3.2.16), (3.2.50)]:

$$\int_{R^n} (t - \tau)^{-N} E_\delta(t, x; \tau, \xi) d\xi = C, \\ \tau < t, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad \delta > 0; \quad (13)$$

$$\forall \bar{R} > 0: \quad \rho(t, x, \xi) \geq t^{-\lambda} R^{q'},$$

$$t \in (0, T], \quad x \in B_{\bar{R}}, \quad \xi \in R^n \setminus B_{2R}, \quad (14)$$

де R – досить велике число ($R > \bar{R}$), $\lambda = q'' - 1$ при $t \in (0, 1]$, $\lambda = 3q' - 1$ при $t > 1$.

3. Формули для похідних від об'ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв'язком рівняння (1).

Використовуючи методику з [2,3], можна отримати такі твердження.

Лема 1. Якщо $f \in C_{k(\cdot)}$, то об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $\|k_1\| < 2b$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad \|k_1\| < 2b. \quad (15)$$

Лема 2. Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha_1 \in (0, m'']$:

$$\forall R > 0 \exists C > 0 \forall (t, x) \in [0, T] \times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'} f(t, x)| \leq C d(x, x'; \alpha_1).$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $\|k_1\| = 2b$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \\ = \int_0^t d\tau \int_{R^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_1(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad \|k_1\| = 2b. \quad (16)$$

Лема 3. Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha \in R^3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in (m', 2b + m'']$, $\alpha_3 \in (2b + m', 4b + m'']$:

$$\forall R > 0 \exists C > 0 \forall (t, x) \in [0, T] \times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'} f(t, x)| \leq C d(x, x', \alpha).$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u$, $j \in \{1, \dots, n_l\}$, $l \in \{2, 3\}$, $|k_2| + |k_3| = 1$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t, x) = \\ = \int_0^t d\tau \int_{R^n} \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad j \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in \{2, 3\}, \\ |k_2| + |k_3| = 1. \quad (17)$$

Лема 4. Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha \in R^3$, $\alpha_1 \in (0, m'']$, $\alpha_2 \in (m', 2b + m'']$, $\alpha_3 \in (2b + m', 4b + m'']$:

$$\forall R > 0 \exists C > 0 \forall (t, x) \in [0, T] \times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'} f(t, x)| \leq C d(x, x', \alpha). \quad (18)$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервну похідну $\partial_t u$, яка визначається формулою

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x) + \\ + \int_0^t d\tau \int_{R^n} \partial_t G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_3(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{R^{n_1+n_2}} \partial_t \int_{R^{n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_3 \times \\ \times \Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)} f(\tau, X_3(t-\tau)) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \int_0^t d\tau \int_{R^{n_1}} \partial_t \int_{R^{n_2+n_3}} G(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 d\xi_3 \times \\ \times \Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)} f(\tau, X_2(t-\tau)) d\xi_1 + \\ + \int_0^t \partial_t \int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi f(\tau, X_1(t-\tau)) d\tau, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}. \quad (19)$$

При доведенні лем 1–4 використовувалися формули (4)–(9) з п.1, (10)–(14) – з п.2, зауваження 1, а також такі нерівності:

$$(d(X_s(t-\tau), \xi))^\beta E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{\beta/(2b)} E_{c_2}(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad \beta > 0, \quad s \in M; \quad (20)$$

$$\exp\{-c_1 \rho(t, x', \xi)\} \leq C \exp\{-c_2 \rho(t, x, \xi)\},$$

$$x \in R^n, \quad t > 0, \quad d(x, x') < t^{1/(2b)}, \quad (21)$$

з деяким $C > 0$ і довільними $\{c_1, c_2\} \subset R$ такими, що $0 < c_2 < c_1$.

Доведемо нерівність (20). Нехай $0 < c_2 < c_1$. Оскільки $\frac{1}{2b(l-1)+m_j} = \frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}$, $q_j = \frac{2b_j}{2b_j-1}$ і $lq_j - 1 = \frac{2b_j(l-1)+1}{2b_j-1}$, то

$$\begin{aligned} d(X_s(t-\tau), \xi)^{\beta} E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) &\leq \\ &\leq \frac{1}{c'} d(X_s(t-\tau), \xi; \beta) E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) = \\ &= \frac{1}{c'} \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} |\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{\beta/(2b(l-1)+m_j)} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -c_1 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{q_j}}{(t-\tau)^{lq_j-1}} \right\} = \\ &= \frac{1}{c'} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(|\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{\frac{\beta b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}} \times \right. \\ &\times \exp \left\{ -c_1 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}} \right)^{\frac{1}{(2b_j-1)}} \right\} \Bigg) = \\ &= \frac{1}{c'} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(\left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}} \right)^{\frac{1}{(2b_j-1)} \cdot \frac{\beta(2b_j-1)}{2b(2b_j(l-1)+1)}} \times \right. \\ &\times \exp \left\{ -c_1 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau) - \xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}} \right)^{1/(2b_j-1)} \right\} \times \\ &\times (t-\tau)^{\frac{2b_j(l-1)+1}{(2b_j-1)} \cdot \frac{\beta(2b_j-1)}{2b(2b_j(l-1)+1)}} \Bigg) \leq \\ &\leq C \exp\{-c_2 \rho(t-\tau, x, \xi)\} (t-\tau)^{\beta/(2b)} = \\ &= C(t-\tau)^{\beta/(2b)} E_{c_2}(t, x; \tau, \xi) \end{aligned}$$

з деяким $C > 0$.

Тепер доведемо (21). Нехай $x' = x - z$. Тоді з умови $d(x, x') < t^{1/(2b)}$ маємо

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} |z_{lj}|^{1/(2b(l-1)+m_j)} < t^{1/(2b)}. \quad (22)$$

Оскільки $\frac{1}{2b(l-1)+m_j} = \frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}$, $l \in M$, $j \in \{1, \dots, n_l\}$, то (22) можна записати у вигляді

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(\frac{|z_{lj}|}{t^{(2b_j(l-1)+1)/(2b_j)}} \right)^{\frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}} < 1. \quad (23)$$

У (23) ліва частина містить тільки невід'ємні доданки, тому кожен з дробів у дужках менший за одиницю. Оскільки усі показники $\frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)} < 1$, $l \in M$, $j \in \{1, \dots, n_l\}$, то нерівність (23) залишиться правильною, якщо ці показники збільшити до 1:

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{n_l} \left(\frac{|z_{lj}|}{t^{(2b_j(l-1)+1)/(2b_j)}} \right) < 1. \quad (24)$$

Для довільних $\{c_1, c_2\} \subset R$, $0 < c_2 < c_1$, існує стала $C > 0$ така, що для довільних $\{u, v\} \subset R$, $|v| \leq 1$, справджується нерівність [4, с.78]

$$\exp\{-c_1 |u - v|^q\} \leq C \exp\{-c_2 |u|^q\}, \quad (25)$$

де $q \in (1, 2]$.

Розпишемо ліву частину (21) і скористаємося (25). Отримаємо

$$\begin{aligned} \exp\{-c_1 \rho(t, x', \xi)\} &= \\ &= \exp \left\{ -c_1 \left[\sum_{j=1}^{n_1} \left| \frac{x_{1j} - \xi_{1j}}{t^{(q_1-1)/q_1}} - \frac{z_{1j}}{t^{(q_1-1)/q_1}} \right|^{q_1} + \right. \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{n_2} \left| \frac{x_{2j} + tx_{1j} - \xi_{2j}}{t^{(2q_2-1)/q_2}} - \frac{z_{2j} + tz_{1j}}{t^{(2q_2-1)/q_2}} \right|^{q_2} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_3} \left| \frac{x_{3j} + tx_{2j} + t^2 x_{1j}/2 - \xi_{3j}}{t^{(3q_3-1)/q_3}} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{z_{3j} + tz_{2j} + t^2 z_{1j}/2}{t^{(3q_3-1)/q_3}} \right|^{q_3} \right] \Bigg\} \leq \\ &\leq \exp\{-c_2 \rho(t, x, \xi)\}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

адже на підставі (24)

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_{1j}}{t^{1-1/q_1}} \right| &= \frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1, \quad j \in \{1, \dots, n_1\}; \\ \left| \frac{z_{2j} + tz_{1j}}{t^{2-1/q_2}} \right| &= \left| \frac{z_{2j} + tz_{1j}}{t^{1+1/(2b_j)}} \right| = \left| \frac{z_{2j}}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} + \right. \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z_{1j}}{t^{1/(2b_j)}} \right| \leq \frac{|z_{2j}|}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1,$$

$$j \in \{1, \dots, n_2\};$$

$$\left| \frac{z_{3j} + tz_{2j} + \frac{t^2}{2} z_{1j}}{t^{3-1/q_j}} \right| = \left| \frac{z_{3j} + tz_{2j} + \frac{t^2}{2} z_{1j}}{t^{2+1/(2b_j)}} \right| =$$

$$= \left| \frac{z_{3j}}{t^{(4b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{z_{2j}}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{z_{1j}}{2t^{1/(2b_j)}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|z_{3j}|}{t^{(4b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{|z_{2j}|}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} +$$

$$+ \frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1, \quad j \in \{1, \dots, n_3\},$$

і $q_j = \frac{2b_j}{2b_j-1} \in (1, 2]$ при $b_j \in N, j \in \{1, \dots, n_1\}$.

При доведенні леми 1 отримується оцінка

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x)| \leq Ct^{1-\|k_1\|/(2b)} \exp\{[s(t), x]\} \|f\|_{k(\cdot)},$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad \|k_1\| < 2b; \quad (26)$$

при встановленні твердження леми 2 – нерівність

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x)| \leq$$

$$\leq C(t^{1-\|k_1\|/(2b)+\alpha_1/(2b)} + t \exp\{[s(t), x]\} \|f\|_{k(\cdot)}),$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad \|k_1\| = 2b; \quad (27)$$

а при доведенні леми 3 – оцінка

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t, x)| \leq C(t^{1-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_l/(2b)} +$$

$$+ t \exp\{[s(t), x]\} \|f\|_{k(\cdot)}), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$j \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in \{2, 3\}, \quad |k_2| + |k_3| = 1. \quad (28)$$

Теорема 1. Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється умова Гельдера (18). Тоді об'ємний потенціал (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1) і задовольняє умову

$$\partial_x^k u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad \frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \leq 1, \quad (29)$$

рівномірно стосовно $x \in B_R$ з довільним додатним R .

Доведення. З доведених у лемах 1–4 формул (15)–(17), (19) та того, що $G(t, x; \tau, \xi)$ як функція t і x при довільно фіксованих $\tau \in [0, t]$ і $\xi \in R^n$ є розв'язком рівняння (1) з $f \equiv 0$, впливає що об'ємний потенціал (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1). Правильність (29) безпосередньо впливає з оцінок (26)–(28). ▸

4. Властивості об'ємного потенціалу. Крім наведених у лемах 1–4 і теоремі 1 властивостей об'ємного потенціалу, наступна теорема містить нові його властивості.

Теорема 2. Якщо $f \in C_{k(\cdot)}^\alpha$, де $\alpha := (\beta, \beta + m', \beta + 2b + m')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$, то $u \in C_{s(\cdot)}^{r, \alpha'}$, де $\alpha' := (\beta, \beta, \beta)$, $r := (r_1, r_2, r_3) := (2b, 1, 1)$, справджуються оцінка

$$\|u\|_{s(\cdot)}^{r, \alpha'} \leq C \|f\|_{k(\cdot)}^\alpha \quad (30)$$

і рівності

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in R^n} (|\partial_x^k u(t, x)| \exp\{-[s(t), x]\}) \right) = 0,$$

$$\frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \leq 1. \quad (31)$$

Перш за все зауважимо, що оскільки $f \in C_{k(\cdot)}^\alpha$, $\alpha = (\beta, \beta + m', \beta + 2b + m')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$, то функція f задовольняє умови лем 1–4 і теореми 1, зокрема умову (18) з $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \beta + m'$, $\alpha_3 = \beta + 2b + m'$. Тому для u правильні всі ці твердження.

Доведення теореми 2 здійснюється за методикою з [2, 3]. Зокрема, уточнюються оцінки лівих частин (27) і (28), а також використовується наступне твердження.

Твердження 1. Для довільного $\gamma \in (0, 1]$ і деякого $\bar{c} \in (0, c)$, де c – стала з оцінок (10), правильними є оцінки

$$|\Delta_x^{x'} \partial_x^k G(t, x; \tau, \xi)| \leq C_k (d(x, x'))^\gamma \times$$

$$\times (t - \tau)^{-N - N_{k_1} - N_{k_2} - N_{k_3} - \gamma/(2b)} E_{\bar{c}}(t, x; \tau, \xi),$$

$$(d(x, x'))^{2b} \leq t - \tau, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\{x, x', \xi\} \subset R^n, \quad k \in Z_+^n. \quad (32)$$

Доведення твердження 1 впливає з оцінки (10) при застосуванні теореми про середнє значення і нерівності

$$E_c(t, y; \tau, \xi) \leq C_1 E_{\bar{c}}(t, x; \tau, \xi), \quad \bar{c} \in (0, c),$$

де y – точка, яка належить відрізку прямої, що сполучає точки x і x' .

Зауважимо, що ця нерівність є частинним випадком доведеної нерівності (21).

5. Коректна розв'язність задачі Коші (1), (2). Виберемо невід'ємні числа a_l ,

$l \in M$, які входять у вирази для функцій k_l і s_l , $l \in M$, так, щоб виконувалася умова

$$T < \min_{l \in M, j \in \{1, \dots, n_l\}} (c_0/s_l(T))^{(2b_j-1)/(2b_j(l-1)+1)}.$$

На підставі теореми 1 за умов теореми 2 об'ємний потенціал (3), породжений ФРЗК для рівняння (1), є розв'язком неоднорідного рівняння (1) з однорідною початковою умовою (2).

З результатів, отриманих в [1] (теорема 3.8), випливає, що не існує більше одного розв'язку рівняння (1), який задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \quad \forall t \in (0, T]$:

$$\sup_{x \in R^n} (|u(t, x)| \exp\{-[s(t), x]\}) \leq C;$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} \int_{R^n} u(t, x) \psi(x) dx = 0$$

для довільної функції ψ такої, що $\int_{R^n} |\psi(x)| \exp\{[s(T), x]\} dx < \infty$.

Наслідком цього є такий результат.

Твердження 2. У просторі $C_{s(\cdot)}^{r, \alpha'}$, де $r = (2b, 1, 1)$, $\alpha' = (\beta, \beta, \beta)$ з деяким $\beta \in (0, 1]$, не існує більше одного розв'язку рівняння (1), для якого виконується умова (31).

З теорем 1 і 2 та твердження 2 випливає така теорема про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема 3. Нехай $f \in C_{k(\cdot)}^\alpha$, де $\alpha = (\beta, \beta + m', \beta + 2b + m'')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$. Тоді формулою (3) визначається єдиний розв'язок рівняння (1), який належить до простору $C_{s(\cdot)}^{r, \alpha'}$, де $r = (2b, 1, 1)$, $\alpha' = (\beta, \beta, \beta)$, і для якого справджуються оцінка (30) та рівності (31).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
2. Дронь В.С. Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболических рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту – 2000. – **76**. – С. 32-41.

3. Дронь В.С., Івасишен С.Д. Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболических рівнянь довільного порядку // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С. 47-56.

4. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.