УДК 517.983

©2017 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай G – довільна зіркова та симетрична відносно початку координат область комплексної площини. Через $\mathcal{H}_0(G)$ позначимо простір усіх парних аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Знайдені умови, при яких оператор Бесселя в просторі $\mathcal{H}_0(G)$ є еквівалентним до оператора двократного диференціювання.

Let G be an arbitrary starlike symmetric domain of the complex plane with respect to the origin. By $\mathcal{H}_0(G)$ denote the space of all even analytic functions in G equipped with the topology of compact convergence. We establish the conditions of equivalence of the Bessel operator to the square of differentiation in the space $\mathcal{H}_0(G)$.

В роботах багатьох математиків вивчалися властивості оператора Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$$

в різноманітних функціональних просторах. Ці дослідження здебільшого базувалися на тому, що при певних обмеженнях на параметр ν оператор Бесселя в цих просторах є еквівалентним до оператора двократного диференціювання (див., наприклад, [1],[2]). В цій статті ми доводимо, що цей факт є правильним і в деяких просторах аналітичних функцій.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ позначимо простір усіх лінійних неперервних операторів на $\mathcal{H}(G)$. Надалі вважатимемо, що G – довільна симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат. Через $\mathcal{H}_0(G)$ позначимо підпростір простору $\mathcal{H}(G)$, який складається з усіх парних функцій простору $\mathcal{H}(G)$ і наділений індукованою топологією простору $\mathcal{H}(G)$. Для довільного $\alpha \in \mathbb{C}$ формулою

$$B_\alpha = D^2 + \frac{\alpha}{z}D,$$

де $D = \frac{d}{dz}$, визначається оператор Бесселя, який лінійно та неперервно діє в просторі $\mathcal{H}_0(G)$. Метою цієї статті є дослідження умов, при яких оператор B_α є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ до оператора D^2.

Наведемо деякі допоміжні твердження. Через $G^{(2)}$ позначимо множину $G^{(2)} = \{z^2 : z \in G\}$. $G^{(2)}$ є областю в $\mathbb{C}$, оскільки областю є G. Простір $\mathcal{H}_0(G)$ є ізоморфним до простору $\mathcal{H}(G^{(2)})$, причому оператор $K : \mathcal{H}(G^{(2)}) \to \mathcal{H}_0(G)$, який діє за правилом $(Kf)(z) = f(z^2)$ ізоморфно відображає простір $\mathcal{H}(G^{(2)})$ на $\mathcal{H}_0(G)$ (див. твердження 6°–8° [3]).

Використовуючи ізоморфізм K, одержуємо, що є правильним наступне твердження.

Лема 1. *Між операторами T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$ і операторами $\tilde{T}$ з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G^{(2)}))$ формулою*

$$T = K\tilde{T}K^{-1}$$

встановлюється взаємно-однозначна відповідність.

Зауваження 1. *Оскільки $TK = K\tilde{T}$ і оператор K ізоморфно відображає простір $\mathcal{H}(G^{(2)})$ на $\mathcal{H}_0(G)$, то оператор T в просторі $\mathcal{H}_0(G)$ є еквівалентним до оператора $\tilde{T}$ у просторі $\mathcal{H}(G^{(2)})$.*

Зазначимо, що система $(z^{2n})_{n=0}^{\infty}$ є повною в просторі $\mathcal{H}_0(G)$ (див лему 5, стор. 100, [4]).

Теорема 1. *Нехай G – довільна симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат і є зірковою відносно точки 0, а $\alpha \in \mathbb{C}$. Оператор T, який на парних степенях незалежної змін-*

ної визначається формулами

$$Tz^{2n} = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(2j+1+\alpha)}{(2n-1)!!} z^{2n}, \qquad (1)$$

$n = 0, 1, \ldots$ *продовжується до оператора з класу* $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$.

Доведення. Позначимо $\gamma_n = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(2j+1+\alpha)}{(2n-1)!!}$, $n = 0, 1, \ldots$. Для числа $a \in \mathbb{C}$ через $(a)_n$ позначимо символ Похгаммера, тобто $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$ при $n \geq 1$, $(a)_0 = 1$. Тоді $\gamma_n = \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Область $G^{(2)}$ є зірковою відносно початку координат, оскільки такою є область G. Тому за теоремою 1 [5] оператор $\tilde{T}$, який на степенях z визначається рівностями $\tilde{T}z^n = \gamma_n z^n$ продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G^{(2)}))$. При $n = 0, 1, \ldots$ виконуються рівності

$$Tz^{2n} = (K\tilde{T}K^{-1})(z^{2n}) = \gamma_n z^{2n}.$$

Тому формулою $T = K\tilde{T}K^{-1}$ оператор T продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$. Теорема доведена.

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми 1 оператор T буде ізоморфізмом простору $\mathcal{H}_0(G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\alpha \neq -2j-1, \; j = 0, 1, \ldots. \qquad (2)$$

Доведення. Необхідність умови (2) є очевидною, а достатність випливає з того, що при виконанні (2) за наслідком 1 [5] (див. також лему 1 [6]) оператор $\tilde{T}$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G^{(2)})$.

Теорема 2. *Нехай G – довільна симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат і є зірковою відносно точки 0, а $\alpha \in \mathbb{C}$. Для того, щоб оператор Бесселя B_α був еквівалентним до оператора D^2 у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова* (2).

Доведення. Необхідність. Нехай оператор B_α є еквівалентним до оператора D^2 у просторі $\mathcal{H}_0(G)$, а умова (2) не виконується. Тоді існує число $m = 0, 1, \ldots$ таке, що $\alpha = -2m-1$. Маємо, що $B_\alpha 1 = B_\alpha z^{2m+2} = 0$. Тому $dim\ ker(B_\alpha) \geq 2$ в просторі $\mathcal{H}_0(G)$. Оскільки $dim\ ker(D^2) = 1$ в просторі $\mathcal{H}_0(G)$, то оператори B_α і D^2 не є еквівалентними в $\mathcal{H}_0(G)$. Одержали суперечність.

Достатність. Нехай умова (2) виконується. Тоді за наслідком 1 оператор T, який на степенях z визначається рівностями (1), є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}_0(G)$. При $n = 1, 2, \ldots$ маємо

$$(TB_\alpha)(z^{2n}) = 2n(2n-1+\alpha)Tz^{2n-2} =$$

$$= 2n(2n-1+\alpha)\frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2}(2j+1+\alpha)}{(2n-3)!!} z^{2n-2} =$$

$$= 2n(2n-1)\frac{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(2j+1+\alpha)}{(2n-1)!!} z^{2n-2} =$$

$$= (D^2T)(z^{2n}).$$

Крім того $(TB_\alpha)(1) = (D^2T)(1)$. Тому

$$(TB_\alpha)(z^{2n}) = (D^2T)(z^{2n}) \qquad (3)$$

при $n = 0, 1, \ldots$. Оскільки оператори T, B_α, D^2 належать класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$ і система $(z^{2n})_{n=0}^{\infty}$ є повною в просторі $\mathcal{H}_0(G)$, то з (3) випливає, що

$$TB_\alpha = D^2T.$$

Оскільки оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}_0(G)$, то оператор B_α є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ до оператора D^2.

Наслідок 2. *При виконанні умов теореми 2 для довільних комплексних чисел α_1, α_2, які задовольняють умову* (2), *оператори B_{α_1} та B_{α_2} є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}_0(G)$.*

Лема 2. *Нехай G – довільна симетрична відносно початку координат область в $\mathbb{C}$, яка містить початок координат і $\Lambda = 4DU_zD-2D$, де U_z – оператор множення на незалежну змінну. Тоді оператор D^2 в просторі $\mathcal{H}_0(G)$ еквівалентний до оператора Λ в просторі $\mathcal{H}(G^{(2)})$.*

Доведення. При $n = 0, 1, 2\ldots$ виконуються рівності

$$D^2(z^{2n}) = (K\Lambda K^{-1})(z^{2n}).$$

Звідси, використовуючи аналогічні міркування, як і при доведенні теореми 1, одержуємо, що виконується рівність

$$D^2 = K\Lambda K^{-1}.$$

Лема доведена.

Теорема 3. *Нехай G – довільна симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат і є зірковою відносно точки 0, а комплексне число α задовольняє умову (2). Тоді оператор Бесселя B_α в просторі $\mathcal{H}_0(G)$ є еквівалентним до оператора Λ в просторі $\mathcal{H}(G^{(2)})$.*

Правильність твердження теореми 3 одержується з леми 2 і теореми 2 з використанням транзитивності відношення еквівалентності операторів. При цьому виконується рівність

$$(K^{-1}T)B_\alpha = \Lambda(K^{-1}T), \qquad (4)$$

де T – це оператор, який визначений в теоремі 1.

Застосуємо одержані результати до опису комутанта оператора Бесселя в просторі $\mathcal{H}_0(G)$. З теореми 1 [7] випливає, що у випадку, коли область G є обмеженою і симетричною відносно початку координат, оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$ є переставним з оператором D^2 у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ тоді і тільки тоді, коли

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{2n},$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} = 0. \qquad (5)$$

Використовуючи це твердження і теорему 2 одержуємо, що є правильним наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай G – довільна обмежена симетрична область комплексної площини, яка містить початок координат і є зірковою відносно точки 0, а $\alpha \in \mathbb{C}$, причому виконується умова (2). Для того, щоб оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(G))$ комутував з оператором B_α у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ необхідно і достатньо, щоб він зображався формулою*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_\alpha^n, \qquad (6)$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову (5).

Аналогічно встановлюється, що для $\alpha \in \mathbb{C}$, яке задовольняє умову (2), оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0(\mathbb{C}))$ є переставним з оператором B_α у просторі $\mathcal{H}_0(\mathbb{C})$ тоді і тільки тоді, коли він зображається формулою (6), де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|c_n|} < \infty$. При $\alpha > 0$ цей результат було одержано в роботі [8].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Delsarte J.* Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux equations lineaires aux derivees partielles du second ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – 206. – P. 1780–1782.

2 *Trimeche K.* Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley-Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur $(0, \infty)$ // J. Math. Pures Appl. – 1981. – 60. – P. 51–98.

3. *Березовская Г.М., Березовский Н.И.* Описание изоморфизмов пространства голоморфных функций, перестановочных с кратным умножением // Укр. матем. журн. – 1984. – **36**.– №5. – С. 611–615.

4. *Dimovski I.H.* Convolutional Calculus. Kluwer, Dordrecht. – 1990. – 208 p.

5. *Лінчук Ю.С.* Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування // Доп. НАН України. – 2014. – №3. – С. 25–28.

6. *Linchuk Yu.S.* Generalized Dunkl–Opdam operator and its properties in the spaces of functions analytic in domains // J. Math. Sci. – 2017. – **220**.– №1. – P. 1–14.

7. *Царьков М.Ю.* Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора дифференцирования // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1970. – Вып. 11. – С. 86 – 92.

8. *Belhadj M., Betancor J.J.* Hankel convolution operators on entire functions and distributions // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **276**. – №1. – P. 40-63.