УДК 517.9

©2017 р. Л.М. Сергєєва

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ГЛОБАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЩО МІСТИТЬ ВІДХИЛЕННЯ ЗА ЧАСОМ

Описано алгоритм побудови глобального розв'язку для певного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу та наведено умови його існування.

We provide the algorithm of constructing a global solution for some nonhomogeneous partial differential equation with deviating argument in the time variable. We justify this algorithm and study existence conditions of this solution.

На даний час досить багато праць присвячено знаходженню та дослідженню розв'язків рівнянь із частинними похідними, які містять відхилення за часовими або просторовими змінними. Адже такі рівняння часто використовуються для побудови математичних моделей, що описують різноманітні процеси біофізики, медицини, теорії управління тощо [1–5].

Для розв'язування рівнянь з частинними похідними із відхиленням тільки за часом часто можна застосувати метод відокремлення змінних із деякими модифікаціями. Проте проблема існування глобальних розв'язків для таких рівнянь досліджена недостатньо [6–11].

В даній роботі описано алгоритм побудови глобального розв'язку для деякого неоднорідного рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу та наведено умови його існування.

Розглянемо рівняння

$$u_t(x,t) = p(t)[u_{xx}(x,t+\mu) - q(x)u(x,t+\mu)] + f(x,t),\ (x,t) \in Q, \qquad (1)$$

з крайовими умовами вигляду

$$u(0,t)\cos\theta_1 - u_x(0,t)\sin\theta_1 = 0,\quad (0 \le \theta_1 < \pi),$$

$$u(\pi,t)\cos\theta_2 - u_x(\pi,t)\sin\theta_2 = 0,\quad (0 < \theta_2 \le \pi), \qquad (2)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $Q = \{(x,t) : 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Визначення структури розв'язку задачі (1), (2)**.** Раніше було встановлено [12], що для відповідної однорідної задачі

$$u_t(x,t) = p(t)[u_{xx}(x,t+\mu) - q(x)u(x,t+\mu)]$$

асимптотичні наближення для власних значень мають вигляд

$$\sqrt{\lambda_k} = \nu_k = k + \frac{1}{\pi k}[\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi)] + O(k^{-2}),\ G(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(\xi)d\xi, \qquad (3)$$

Тут припускається, що $\theta_1 > 0,\ \theta_2 < \pi$.

Асимптотичні наближення для нормованих власних функцій

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\cos kx + \frac{1}{k}(G(x) + \operatorname{ctg}\theta_1 - cx) \times \sin kx\right] + O(k^{-2}), \qquad (4)$$

де $c = \dfrac{1}{\pi}(G(\pi) + \operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2)$, $\theta_1 \ne 0,\ \theta_2 \ne \pi$, $k = n_1, ..., n_2$, з деякими $n_1, n_2 > 1$.

Розглянемо неоднорідне рівняння (1). Будемо шукати глобальний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) у вигляді суми

$$u(x,t) = \sum_{k=n_1}^{n_2} T_k(t)X_k(x),\ (x,t) \in Q. \qquad (5)$$

Крайові умови, очевидно, задовольняються.

Припускатимемо, що функція $f(x,t)$ може бути представлена у вигляді суми:

$$f(x,t)=\sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(t)X_k(x), \tag{6}$$

$$f_k(t)=(f,X_k)=\int_0^\pi f(\xi,t)X_k(\xi)d\xi.$$

Підставимо (5) в рівняння (1), враховуючи (6):

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} T_k'(t)X_k(x)=\sum_{k=n_1}^{n_2} p(t)[T_k(t+\mu)X_k''(x)-$$

$$-q(x)T_k(t+\mu)X_k(x)]+\sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(t)X_k(x).$$

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} T_k'(t)X_k(x)=$$

$$=\sum_{k=n_1}^{n_2} p(t)T_k(t+\mu)[X_k''(x)+(\lambda_k-q(x))X_k(x)]-$$

$$-\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k p(t)T_k(t+\mu)X_k(x)+\sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(t)X_k(x), \tag{7}$$

$(x,t)\in Q$.

Оскільки $X_k(x)$ є розв'язком рівняння

$$X_k''(x)+(\lambda_k-q(x))X_k(x)=0,\ 0<x<\pi, \tag{8}$$

то (7) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} (T_k'(t)+\lambda_k p(t)T_k(t+\mu)-f_k(t))X_k(x)=0,$$

$(x,t)\in Q$.

Це рівняння задовольняється, якщо всі коефіцієнти розкладу рівні нулю, тобто

$$T_k'(t)+\lambda_k p(t)T_k(t+\mu)-f_k(t)=0, \tag{9}$$

$$k=n_1,...,n_2,\ t\in\mathbb{R}.$$

Для такого рівняння можна побудувати рівняння без відхилення аргументу, всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками рівняння (9). Таке рівняння матиме вигляд

$$T_k'(t)+\bar{p}_k(t)T_k(t)-\bar{f}_k(t)=0, \tag{10}$$

$$k=n_1,...,n_2,\ t\in\mathbb{R}.$$

Згідно алгоритму, наведеному в [13], знайдемо $\bar{p}(t)$ та $\bar{f}(t)$. Загальний розв'язок рівняння (10) визначається формулою Коші

$$T_k(t)=T_{k,0}e^{-\int_{t_0}^t \bar{p}_k(s)ds}+\int_{t_0}^t \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^t \bar{p}_k(s)ds}d\tau, \tag{11}$$

$$T_{k,0}=T_k(t_0),\quad t,t_0\in\mathbb{R},$$

яка буде задовольняти рівняння (9), коли

$$T_k'(t)=-\bar{p}_k(t)\Bigg[T_{k,0}e^{-\int_{t_0}^t \bar{p}_k(s)ds}+$$

$$+\int_{t_0}^t \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^t \bar{p}_k(s)ds}d\tau\Bigg]+\bar{f}_k(t)=$$

$$=-p(t)\lambda_k\Bigg[T_{k,0}e^{-\int_{t_0}^{t+\mu} \bar{p}_k(s)ds}+$$

$$+\int_{t_0}^{t+\mu} \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^{t+\mu} \bar{p}_k(s)ds}d\tau\Bigg]+f_k(t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Покладаючи в (12) $T_{k,0}=0$, отримаємо

$$-\bar{p}_k(t)\Bigg[\int_{t_0}^t \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^t \bar{p}_k(s)ds}d\tau\Bigg]+\bar{f}_k(t)=$$

$$=-p(t)\lambda_k\Bigg[\int_{t_0}^{t+\mu} \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^{t+\mu} \bar{p}_k(s)ds}d\tau\Bigg]+f_k(t), \tag{13}$$

$t\in\mathbb{R}$. Враховуючи (12) та (13), одержимо

$$\bar{p}_k(t)e^{-\int_{t_0}^t \bar{p}_k(s)ds}=\lambda_k p(t)e^{-\int_{t_0}^{t+\mu} \bar{p}_k(s)ds},$$

звідки

$$\bar{p}_k(t)=\lambda_k p(t)e^{\int_{t+\mu}^t \bar{p}_k(s)ds},\ k=n_1,...,n_2,\ t\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Підставимо (14) в (13):

$$-\lambda_k p(t) e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} \bar{p}_k(s)ds} \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t} \bar{p}_k(s)ds} d\tau +$$

$$+\bar{f}_k(t) =$$

$$= -\lambda_k p(t) \int\limits_{t_0}^{t+\mu} \bar{f}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t+\mu} \bar{p}_k(s)ds} d\tau + f_k(t),$$

$$\bar{f}_k(t) = f_k(t) + \lambda_k p(t) \int\limits_{t+\mu}^{t} \bar{f}_k(\tau) e^{\int\limits_{t+\mu}^{\tau} \bar{p}_k(s)ds} d\tau, \tag{15}$$

$$k = n_1, ..., n_2, \ t \in \mathbb{R}.$$

Тоді розв'язок $T_k(t)$ рівняння (10) запишемо у вигляді

$$T_k(t) = c_k e^{-\int\limits_{0}^{t} \bar{p}_k(s)ds} + \int\limits_{0}^{t} \bar{f}_k(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t} \bar{p}_k(s)ds} d\tau, \tag{16}$$

вважаємо, що c_k – довільні сталі, $t_0 = 0$, $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{f}_k(t)$ знаходяться із рівнянь (14), (15).

Якщо всі розв'язки рівняння (10) є глобальними розв'язками рівняння (9), то функція $\bar{p}$ задовольняє рівняння (14), а функція $\bar{f}$ – (15). Таким чином, необхідною і достатньою умовою того, щоб всі розв'язки рівняння (10) були глобальними розв'язками рівняння (9), є існування розв'язків рівнянь (14), (15).

Знайдемо умови, при виконанні яких розв'язок рівняння (10) буде глобальним розв'язком рівняння (9). Для цього доведемо наступну теорему.

Теорема. *Нехай функція p визначена на $\mathbb{R}$, причому*

$$|p(t)| < \beta, \quad \beta = const, \quad t \in \mathbb{R},$$

функція q дійсна і задовольняє умову

$$\int\limits_{0}^{\pi} q(\xi) d\xi < \frac{\pi}{2\mu\beta e} - 2(\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2), \tag{17}$$

і виконується нерівність

$$|\mu|\beta\lambda_{n_2} e < 1, \tag{18}$$

де n_2 – ціла частина числа $\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\beta e}}[\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\pi\mu\beta e(\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi))}]$.

Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1), (2) вигляду (5).

Доведення. Розглянемо рівняння (14). Використовуючи принцип стискаючих відображень, знайдемо умови, при яких це рівняння матиме єдиний розв'язок. Здійснимо заміну:

$$\bar{p}_k(t) = p(t)\lambda_k y_k(t),$$

тоді

$$p(t)\lambda_k y_k(t) = p(t)\lambda_k e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k y_k(s)ds},$$

звідки

$$y_k(t) = e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k y_k(s)ds}.$$

Для неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $y_k(t)$ визначимо оператор:

$$(Sy_k)(t) = e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k y_k(s)ds}.$$

Будемо шукати розв'язок в просторі $C(r)$. Нехай $\|y_k\|_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |y_k(t)| \le r$. Тоді

$$\|Sy_k\|_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} (e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k r ds}) = e^{|\mu|\beta\lambda_k r}.$$

Якщо виконується нерівність

$$e^{|\mu|\beta\lambda_k r} \le r,$$

то оператор $(Sy_k)(t)$ відображає простір $C(r)$ в себе. Оцінимо різницю $(Sy_{k,1})(t) - (Sy_{k,2})(t)$:

$$|(Sy_{k,1})(t) - (Sy_{k,2})(t)| = |e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k y_{k,1}(s)ds} -$$

$$-e^{\int\limits_{t+\mu}^{t} p(s)\lambda_k y_{k,2}(s)ds}| \le$$

$$\le |\mu|\beta\lambda_k e^{|\mu|\beta\lambda_k r} \|y_{k,1} - y_{k,2}\|_0.$$

Таким чином, при виконанні нерівності

$$|\mu|\beta\lambda_k e^{|\mu|\beta\lambda_k r} < 1 \tag{19}$$

$(Sy_k)(t)$ буде оператором стиску в просторі $C(r)$. Розглянемо рівняння

$$e^{|\mu|\beta\lambda_k r} = r.$$

Воно буде мати розв'язки. Але тільки для

$$r_1 \le r < \frac{1}{|\mu|\beta\lambda_k}$$

будуть виконуватись умови стиску і відображення оператором $(Sy_k)(t)$ простору $C(r)$ в себе. Враховуючи це, отримаємо оцінку, аналогічну до оцінки в теоремі 1 із [13]:

$$|\mu|\beta\lambda_k e < 1. \qquad (20)$$

Отже, при виконанні цієї умови простір $C(r)$ буде повним нормованим простором, і оператор S буде мати в ньому єдину нерухому точку, тобто розв'язок рівняння (14) буде існувати і він буде єдиним.

Розглянемо рівняння (15). Здійснимо в ньому заміну змінних

$$\bar{f}_k(t) = f_k(t) + p(t)z_k(t).$$

Отримаємо:

$$z_k(t) = \int\limits_{t+\mu}^{t} f_k(\tau)e^{\int\limits_{t+\mu}^{\tau}\bar{p}_k(s)ds}d\tau +$$

$$+\lambda_k \int\limits_{t+\mu}^{t} p(\tau)z_k(\tau)e^{\int\limits_{t+\mu}^{\tau}\bar{p}_k(s)ds}d\tau, \qquad (21)$$

$$k = n_1, ..., n_2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Без втрати загальності, будемо вважати, що $|f_k(t)| \le 1,\ k = n_1, ..., n_2,\ t \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор S_1 в просторі $C(M)$ функцій $z_k = z_k(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$, таких що

$$\|z_k\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |z_k(t)| \le M.$$

$(S_1 z_k)(t)$ – неперервна на $\mathbb{R}$ функція, причому виконуються оцінки

$$\|S_1 z_k\|_0 \le |\mu| e^{|\mu|\beta\lambda_k r}(1 + \lambda_k\beta M),$$

$$|(Sz_{k,1})(t) - (Sz_{k,2})(t)| \le$$

$$\le |\mu|\beta\lambda_k e^{|\mu|\beta\lambda_k r}\|z_{k,1} - z_{k,2}\|_0,$$

де $z_{k,1},\ z_{k,2}$ – довільні функції із $C(M)$.

Внаслідок (19) при

$$M \ge \frac{|\mu| e^{|\mu|\beta\lambda_k r}}{1 - |\mu|\beta\lambda_k e^{|\mu|\beta\lambda_k r}}$$

оператор S_1 відображає $C(M)$ в себе і є оператором стиску. Простір $C(M)$ є повним нормованим простором. Цього достатньо, щоб оператор S_1 мав в $C(M)$ єдину нерухому точку. Вона і є єдиним в $C(M)$ розв'язком рівняння (21).

Із (20) слідує, що параметр λ_k повинен задовольняти умову

$$\lambda_k < \frac{1}{|\mu|\beta e}. \qquad (22)$$

Будемо припускати, що відхилення μ достатньо мале, тоді значення n_1, n_2 будуть віддаленими від одиниці, і діапазон зміни значень k буде досить широким. Таким чином, можна записати

$$\nu_k \approx k + \frac{1}{\pi k}[\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi)]. \qquad (23)$$

Враховуючи (22) і (23), одержимо

$$k + \frac{1}{\pi k}[\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi)] < \frac{1}{\sqrt{\mu\beta e}},$$

або ж

$$-k^2\pi\sqrt{\mu\beta e} + \pi k -$$

$$-\sqrt{\mu\beta e}[\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi)] > 0.$$

Дискримінант цієї нерівності $D = \pi^2 - 4\pi\mu\beta e[\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi)]$ буде додатнім в силу виконання умови теореми (17), тому $k \in (\kappa_1, \kappa_2)$, де

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\beta e}}[\pi -$$

$$-\sqrt{\pi^2 - 4\pi\mu\beta e(\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi))}];$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\beta e}}[\pi +$$

$$+\sqrt{\pi^2 - 4\pi\mu\beta e(\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2 + G(\pi))}]. \qquad (24)$$

Тому можна записати $k \in [n_1, n_2]$, де n_1 – ціла частина $\kappa_1 + 1$, а n_2 – ціла частина κ_2.

Отож, глобальний розв'язок рівняння (9) буде мати вигляд (16), де $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{f}_k(t)$ знаходяться із рівнянь (14), (15).

Тому глобальний розв'язок задачі (1), (2) може бути записаний у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=n_1}^{n_2} \big(c_k e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_k(s)ds} +$$

$$+\int_0^t \bar{f}_k(\tau)e^{-\int_\tau^t \bar{p}_k(s)ds}d\tau\Big)X_k(x),\ (x,t)\in Q,$$

де $X_k(x)$ визначаються згідно (4).

Рівняння (14), (15) для $\bar{p}_k(t)$ і $\bar{f}_k(t)$ розв'яжемо методом послідовних наближень. За початкові наближення візьмемо $\bar{p}_k^{(0)}(t) = p(t)\lambda_k$ і $\bar{f}_k^{(0)}(t) = f_k(t)$. Тоді

$$\bar{p}_k^{(m)}(t) = \lambda_k p(t)e^{\int_{t+\mu}^{t} \bar{p}_k^{(m-1)}(s)ds}, \quad m = 1,2,..., \tag{25}$$

$$\bar{f}_k^{(\nu)}(t) = f_k(t) + \lambda_k p(t)\times$$

$$\times\int_{t+\mu}^{t} \bar{f}_k^{(\nu-1)}(\tau)e^{\int_{t+\mu}^{\tau} \bar{p}_k^{(m)}(s)ds}d\tau, \quad \nu = 1,2,..., \tag{26}$$

$k = n_1, ..., n_2,\ t\in\mathbb{R}$.

Послідовності (25) і (26) є рівномірно збіжними на $\mathbb{R}$ внаслідок виконання умов теореми, тому

$$\bar{p}_k = \lim_{m\to\infty}\bar{p}_k^{(m)}, \quad \bar{f}_k = \lim_{\nu\to\infty}\bar{f}_k^{(\nu)},$$

Враховуючи те, що $|p(t)| < \beta$, можна отримати наступну оцінку:

$$|\bar{p}_k^{(1)}(t)-\bar{p}_k^{(0)}(t)| = |p(t)\lambda_k e^{\int_\mu^0 p(t+s)\lambda_k ds} - p(t)\lambda_k| \leq$$

$$\leq \beta\lambda_k(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1).$$

Згідно з оцінками методу послідовних наближень для кожного наступного наближення має місце така оцінка

$$|\bar{p}_k^{(j)} - \bar{p}_k| \leq \frac{\alpha^j|\bar{p}_k^{(1)} - \bar{p}_k^{(0)}|}{1-\alpha}.$$

Оскільки в нашому випадку $\alpha = |\mu|\beta\lambda_k e$, то

$$|\bar{p}_k^{(m)} - \bar{p}_k| \leq \frac{(|\mu|\beta\lambda_k e)^{m+1}}{|\mu|e(1-|\mu|\beta\lambda_k e)}(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1), \tag{27}$$

$$k = n_1, ..., n_2, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Так як $|\bar{p}_k(t)| < \frac{1}{|\mu|}$, то

$$|\bar{f}_k^{(\nu)} - \bar{f}_k| \leq \frac{(|\mu|\beta\lambda_k e)^{\nu+1}}{e(1-|\mu|\beta\lambda_k e)}(e^{|\mu|\beta\lambda_k} - 1), \tag{28}$$

$$k = n_1, ..., n_2, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Зауваження 1. Рівняння типу (8) в задачах квантової теорії носить назву одновимірного стаціонарного рівняння Шредінгера, де функція $q(x)$ служить потенціалом. Існує відносно мало функцій $q(x)$, для яких розв'язок рівняння (8) може бути виражений через стандартні трансцендентні функції, наприклад, $q(x) = -2sech^2 x$ при $X(\pm) = 0$ приводить до єдиного власного значення $\lambda_1 = -1$, і $X_1 = sech x$, тобто X_1 є розв'язком рівняння

$$X_1''(x) + (-1 + 2sech^2 x)X_1(x) = 0,$$

який перетворюється в 0 при $x\to\pm\infty$.

Зауваження 2. У випадку, коли $f(x,t) = 0$, розв'язок задачі (1), (2) матиме вигляд

$$u(x,t) \approx \sum_{k=n_1}^{n_2} c_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg[\cos kx + \frac{1}{k}(G(x)+$$

$$+\operatorname{ctg}\theta_1 - cx)\sin kx\Bigg]\ e^{-\int_0^t \bar{p}_k^{(m)}(\tau)d\tau}.$$

Приклад. Розглянемо однорідну задачу вигляду

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}[u_{xx}(x,t+\frac{\pi}{600}) - 40xu(x,t+\frac{\pi}{600})],$$

$$(x,t)\in Q,$$

$$u(0,t)\cos\frac{\pi}{4} - u_x(0,t)\sin\frac{\pi}{4} = 0,$$

$$u(\pi,t)\cos\frac{\pi}{3} - u_x(\pi,t)\sin\frac{\pi}{3} = 0, \quad t\in\mathbb{R},$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < \pi, t\in\mathbb{R}\}$.

Будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді (5).

Оскільки $\mu = \frac{\pi}{600}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $q(x) = 40x$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$, умови теореми будуть виконуватись. Дійсно,

$$\int_0^\pi q(\xi)d\xi = \int_0^\pi 40\xi d\xi = 20\pi^2 \approx 197.392088,$$

$$\frac{\pi}{2\mu\beta e} - 2(\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2) =$$

$$= \frac{600}{e} - 2(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}) \approx 219.882365,$$

тому умова (17) виконується.

Для даної задачі $n_1 = 5$, $n_2 = 7$, так як $k1, k2$, обчислені за формулами (24), набувають, відповідно, значень 4.035108 та 7.818989. Таким чином,

$G(\pi) \approx 98.696044$, $\lambda_5 \approx 127.918181$, $\lambda_6 \approx 126.751796$, $\lambda_7 \approx 132.415849$. Значення $|\mu|\beta\lambda_7 e \approx 0.9423301 < 1$, тому умова теореми (18) теж буде виконуватись.

Згідно (4) знайдемо $X_k(x), k = 5, 6, 7$.

$$X_5(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\cos 5x + \frac{1}{5}(10x^2 + 1 -$$

$$- \frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 5x\Big],$$

$$X_6(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\cos 6x + \frac{1}{6}(10x^2 + 1 -$$

$$- \frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 6x\Big],$$

$$X_7(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[\cos 7x + \frac{1}{7}(10x^2 + 1 -$$

$$- \frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 7x\Big],$$

Значення $X_5(x)$ знайдене з точністю не менше, ніж 0.04, значення $X_6(x)$ – не менше, ніж 0.03, а $X_7(x)$ – не менше, ніж 0.02.

Знайдемо тепер $T_k(t), k = 5, 6, 7$, для цього, використовуючи метод послідовних наближень, визначимо $\bar{p}_5$, $\bar{p}_6$ та $\bar{p}_7$ із точністю 0.01.

Початкове наближення для $\bar{p}_5$ має вигляд

$$\bar{p}_5^{(0)} = \frac{1}{2}\lambda_5 \approx 63.959091,$$

наступне

$$\bar{p}_5^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda_5 e^{-\mu p_5^{(0)}} \approx 45.757452.$$

Продовжуючи ітераційний процес далі, знайдемо, що для

$$\bar{p}_5^{(88)} = \frac{1}{2}\lambda_5 e^{-\mu p_5^{(87)}} \approx 49.385694$$

буде задовольнятися потрібна точність, адже згідно оцінки (27)

$$\|\bar{p}_5^{(88)} - \bar{p}_5\| \le \frac{(\mu\beta\lambda_5 e)^{89}}{\mu e(1 - \mu\beta\lambda_5 e)}(e^{\mu\beta\lambda_5} - 1) \approx$$

$$\approx 0.009814,$$

тому

$$T_5(t) = e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_5^{(88)} d\tau} \approx e^{-49.385694t}.$$

Знайдемо наближене значення $\bar{p}_6$.

$$\bar{p}_6^{(0)} = \frac{1}{2}\lambda_6 \approx 63.375898,$$

$$\bar{p}_6^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda_6 e^{-\mu p_6^{(0)}} \approx 45.478887.$$

Для значення

$$\bar{p}_6^{(80)} = \frac{1}{2}\lambda_6 e^{-\mu p_6^{(79)}} \approx 49.0273002$$

буде задовольнятися потрібна точність, адже

$$\|\bar{p}_6^{(80)} - \bar{p}_6\| \le \frac{(\mu\beta\lambda_6 e)^{81}}{\mu e(1 - \mu\beta\lambda_6 e)}(e^{\mu\beta\lambda_6} - 1) \approx 0.009759,$$

тому

$$T_6(t) = e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_6^{(80)} d\tau} \approx e^{-49.0273002t}.$$

Знайдемо наближене значення $\bar{p}_7$.

$$\bar{p}_7^{(0)} = \frac{1}{2}\lambda_7 \approx 66.207925,$$

$$\bar{p}_7^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda_7 e^{-\mu p_7^{(0)}} \approx 46.811846.$$

Для значення

$$\bar{p}_6^{(125)} = \frac{1}{2}\lambda_7 e^{-\mu p_7^{(124)}} \approx 50.756503$$

буде задовольнятися потрібна точність, адже

$$\|\bar{p}_7^{(125)} - \bar{p}_7\| \le$$

$$\le \frac{(\mu\beta\lambda_7 e)^{126}}{\mu e(1 - \mu\beta\lambda_7 e)}(e^{\mu\beta\lambda_7} - 1) \approx 0.009981,$$

тому

$$T_7(t) = e^{-\int\limits_0^t \bar{p}_7^{(125)} d\tau} \approx e^{-50.756503t}.$$

Нехай коефіцієнти $c_5 = c_6 = c_7 = 1$.

Отже, глобальний розв'язок задачі має вигляд

$$u(x,t) = X_5(x)T_5(t)+X_6(x)T_6(t)+X_7(x)T_7(t) \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg[\Bigg[\cos 5x + \frac{1}{5}(10x^2 + 1-$$

$$-\frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 5x\Bigg]e^{-49.385694t}+$$

$$+\Bigg[\cos 6x + \frac{1}{6}(10x^2 + 1 - \frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 6x\Bigg]e^{-49.0273002t}+$$

$$+\Bigg[\cos 7x + \frac{1}{7}(10x^2 + 1 - \frac{x}{\pi}(10\pi^2 + 1-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}))\sin 7x\Bigg]e^{-50.756503t}\Bigg].$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эльсгольц Л.Э.* О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами / Л.Э. Эльсгольц // УМН. – 1960. – **15**, №5 (95). – С. 222–224.

2. *Каменский Г.А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом / Г.А. Каменский // Диф. уравнения. – 1970. – **6**, №8. – С. 1349–1358.

3. *Сеидов З.Б.* Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / З.Б. Сеидов // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, №6. – С. 830–834.

4. *Самойленко А.М.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

5. *Polyanin A.D.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time / A.D. Polyanin, A.I. Zhurov // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2013. – **54.** – P. 115–126.

6. *Weissler F.B.* Existence or non-existence of global solutions for a semilinear heat equation / F.B. Weissler // Israel journal of mathematics. – 1981. – 38, No. 1–2. – P. 29–40.

7. *Deng W.* Existenceor non-existence of global solutions of some non-local degenerate parabolic systems / W. Deng, Y. Li, C. Xie // Proceedings of theamerican mathematical society. – 2002. – 131, No. 5. – P. 1573 –1582.

8. *Meneses R.* Existence and non-existence of global solutions for uniformly parabolic equations / R. Meneses, A. Quaas // Journal of Evolution Equations. –2012. – No. 12. – P. 943–955.

9. *Самойленко А.М.* Побудова глобальних розв'язків рівнянь з частинними похідними, які містять відхилення по часу / А.М. Самойленко, Л.М. Сергєєва // Нелінійні коливання. – 2014. – **7**, №4. – С. 489–502.

10. *Сергеєва Л.М.* Побудова глобального розв'язку для одного класу неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що містять відхилення за часом / Л.М. Сергєєва // Буковинський математичний журнал. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – **3**, №2. – С. 72–76.

11. *Lidiya Sergeeva.* About global solutions of partial differential equation with deviating argument in the time variable //ROMAI J. – v.11, no.2 (2015). – P. 109–118.

12. *Сергеєва Л.М.* Глобальна апроксимація розв'язків диференціально-функціональних рівнянь: дис. кандидата фіз. - мат. наук: 01.01.02 / Сергєєва Лідія Миколаївна – Чернівці, 2014. — 142 с.

13. *Самойленко А.М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №5. – С. 631–640.