

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НАБЛИЖЕНЬ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З НЕДОДАТНИМИ ЧАСТИННИМИ ЧИСЕЛЬНИКАМИ

Досліджуються властивості наближень числового гіллястого ланцюгового дробу, який пов'язаний із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних. Встановлено деякі достатні умови монотонності та обмеженості послідовностей фігурних та звичайних наближень парного порядку досліджуваного дробу з недодатними частинними чисельниками. За наявності додаткових обмежень на елементи доведено збіжність і фігурну збіжність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду до одної і тої самої границі.

Properties of approximants for the numerical branched continued fraction of the special form, which is connected with the correspondence problem between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables are researched. We establish some sufficient conditions of monotonicity and boundedness for sequences of figured and ordinary approximants of even order for investigated continued fraction with nonpositive partial numerators. Convergence and figured convergence of branched continued fraction of the special form to the same limit are proved under additional restrictions on elements.

Вступ. Основним предметом досліджень аналітичної терії неперервних (ланцюгових) дробів та їх багатовимірних узагальнень є теорія розвинення та збіжності неперервних і гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) загального та спеціального вигляду, елементи яких є функціями одної або багатьох змінних. Якщо ці функції є поліномами, то наближення таких дробів є раціональними функціями одної чи багатьох змінних, тому неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення є одним із засобів побудови раціональних наближень.

Функціональний неперервний дріб або його багатовимірний аналог називається відповідним до формального степеневого ряду, якщо розвинення кожного його n -го наближення, $n = 0, 1, \dots$, у степеневий ряд збігається з заданим рядом до всіх членів степеня n включно. Одним з ефективних алгоритмів розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби є побудова відповідних неперервних дробів для степеневих рядів, в які розвиваються дані функції [6]. Проблема побудови відповідних ГЛД для подвійних степеневих рядів не має однознач-

ного розв'язку. У монографії [5] розглянуто дві конструкції двовимірних відповідних ГЛД, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці, а частинні чисельники є поліномами не вище другого порядку від двох змінних. Одна з цих конструкцій, що пізніше отримала назву двовимірного неперервного дробу (ДНД), була запропонована Х.Й. Кучмінською [7], а також J. Murphy, M.R. O'Donoghue [8]. Основи аналітичної теорії ДНД викладені у монографії [7], а також численних журнальних публікаціях. Двовимірний відповідний ГЛД іншого вигляду був запропонований W. Siemaszko'm [9]:

$$b_{0,0} + F_{0,0} + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i,0}z_1}{1 + F_{i,0}} + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0,i}z_2}{1 + F_{0,i}}, \quad (1)$$

$$F_{i,j} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_{i+k,j}z_1z_2}{1}, \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Коефіцієнти $b_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \dots$, обчислюються за певними формулами в залежності від коефіцієнтів заданого ряду, $\bar{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. При фіксованих значеннях \bar{z} двовимірний відповідний ГЛД (1)-(2) перетворюється на числовий ГЛД спеціального вигляду

ду (типу Siemaszko). Деякі ознаки збіжності таких ГЛД з комплексними елементами наведено у роботах [10, 2]. Дана робота присвячена вивченню властивостей різних наближень числових ГЛД типу Siemaszko з недодатними частинними чисельниками. При цьому використовується методика, що була застосована при вивченні властивостей звичайних наближень ГЛД загального вигляду [1], а також звичайних і фігурних наближень ДНД [3-5] з дійсними елементами.

1. Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Основні поняття. Постановка задачі. У даній роботі об'єктом дослідження є нескінченні ГЛД вигляду

$$b_0 + F_{0,0} + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}} + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}}, \quad (3)$$

де $F_{i,j}$ – звичайні ланцюгові (неперервні) дроби

$$F_{i,j} = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

а $b_0, a_{k,j}, j = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, k+j \geq 1$ – дійсні сталі.

Наближення неперервного дроби $F_{i,j}$ визначаються таким чином:

$$F_{i,j}^{(0)} = 0, \quad F_{i,j}^{(k)} = \prod_{p=1}^k \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \quad (5)$$

$$i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Наближення ГЛД загального і спеціального вигляду можна конструювати різними способами. У даній роботі розглядатимемо фігурні наближення (підхідні дроби за Siemaszko'м) ГЛД (3)–(4), які обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 = b_0, \quad \tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \\ + \prod_{k=1}^n \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}^{([n-i]/2)}} + \prod_{k=1}^n \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}^{([n-i]/2)}}, \quad (6) \end{aligned}$$

де $n = 1, 2, \dots, [\alpha]$ – ціла частина дійсного числа α , а також звичайні наближення ГЛД

(3)–(4), які обчислюються у такий спосіб:

$$\begin{aligned} f_0 = 0, \quad f_n = F_{0,0}^{(n)} + \\ + \prod_{i=1}^n \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i+k,k}^{(n-i)}} + \prod_{i=1}^n \frac{a_{0,i}}{1 + F_{k,i+k}^{(n-i)}}, \quad (7) \\ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Залишками фігурних наближень (6) ГЛД (3)–(4) називаються такі вирази

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{i,0}^{(0)} = b_{i,0}, \quad \tilde{Q}_{0,i}^{(0)} = b_{0,i}, \\ \tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)} = b_{i,0} + F_{i,0}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}}, \\ \tilde{Q}_{0,i}^{(k+1)} = b_{0,i} + F_{0,i}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{0,i+1}}{\tilde{Q}_{0,i+1}^{(k)}}, \quad (8) \\ i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

залишками звичайних наближень (7) ГЛД (3)–(4) – вирази

$$\begin{aligned} Q_{i,0}^{(0)} = b_{i,0}, \quad Q_{i,0}^{(k+1)} = b_{i,0} + F_{i,0}^{(k+1)} + \frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}}, \\ Q_{0,i}^{(0)} = b_{0,i}, \quad Q_{0,i}^{(k+1)} = b_{0,i} + F_{0,i}^{(k+1)} + \frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}}, \\ i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, \quad (9) \end{aligned}$$

а залишками наближень (5) звичайних ланцюгових дроби (4) – вирази

$$\begin{aligned} Q_{k+i,k+j}^{(p+1)} = b_{k+i,k+j} + \frac{a_{k+i+1,k+j+1}}{Q_{k+i+1,k+j+1}^{(p)}}, \\ Q_{k+i,k+j}^{(0)} = b_{k+i,k+j}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ i, j = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Враховуючи позначення (8)–(10), можна записати:

$$F_{i,j}^{(n)} = \frac{a_{i+1,j+1}}{Q_{i+1,j+1}^{(n-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Вважається, що наближення \tilde{f}_k, f_k мають сенс, якщо у процесі їх обчислень за формулами (8)–(13) не виникне невизначеність

типу $\frac{0}{0}$ (припускається, що $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ і $\frac{\alpha_1}{0} + \dots + \frac{\alpha_m}{0} = \frac{0}{0}$, якщо $m > 1$).

ГЛД (3)–(4) називається збіжним (фігурно збіжним), якщо, починаючи з деякого номеру n_0 , всі його звичайні наближення (фігурні наближення) мають сенс, і існує скінченна границя $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ($\tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n$). Значення цієї границі вважається значенням збіжного ГЛД.

Важливим є питання, за яких умов $\tilde{f} = f$, а також, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n}$ чи $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n-1}$.

Надалі розглядатимемо властивості різних наближень ГЛД вигляду (3)–(4) за умови

$$a_{i,j} \leq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad i + j \geq 1. \quad (14)$$

2. Формули різниці між двома наближеннями гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Для дослідження властивостей послідовностей наближень гіллястих ланцюгових дробів загального та спеціального вигляду використовуються формули різниці між двома їх наближеннями [5, 7]. У даній роботі для ГЛД вигляду (3)–(4) використовуватимемо такі формули:

$$\tilde{f}_n - \tilde{f}_m = F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{([m/2])} + \tilde{P}_{n,m}^{(1)} + \tilde{P}_{n,m}^{(2)}, \quad (15)$$

$$n > m,$$

$$\tilde{P}_{n,m}^{(1)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}} + \quad (16)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{([(m-i)/2])} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{j,0})}{\prod_{j=1}^i \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$\tilde{P}_{n,m}^{(2)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}} + \quad (17)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])} - F_{0,i}^{([(m-i)/2])} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{0,j})}{\prod_{j=1}^i \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$f_n - f_m = F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{(m)} + P_{n,m}^{(1)} + P_{n,m}^{(2)}, \quad (18)$$

$$n > m,$$

$$P_{n,m}^{(1)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m Q_{j,0}^{(m-j)}} + \quad (19)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{i,0}^{(n-i)} - F_{i,0}^{(m-i)} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{j,0})}{\prod_{j=1}^i Q_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$P_{n,m}^{(2)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m Q_{0,j}^{(m-j)}} + \quad (20)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{0,i}^{(n-i)} - F_{0,i}^{(m-i)} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{0,j})}{\prod_{j=1}^i Q_{0,j}^{(n-j)} Q_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$\tilde{f}_n - f_m = F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{(m)} + \tilde{S}_{n,m}^{(1)} + \tilde{S}_{n,m}^{(2)}, \quad (21)$$

$$n > 2m,$$

$$\tilde{S}_{n,m}^{(1)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m Q_{j,0}^{(m-j)}} + \quad (22)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{(m-i)} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{j,0})}{\prod_{j=1}^i \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$\tilde{S}_{n,m}^{(2)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m Q_{0,j}^{(m-j)}} + \quad (23)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{0,i}^{((n-i)/2)} - F_{0,i}^{((m-i))} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{0,j})}{\prod_{j=1}^i \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} Q_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$f_n - \tilde{f}_m = F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{((m/2))} + S_{n,m}^{(1)} + S_{n,m}^{(2)}, \quad (24)$$

$$n > m,$$

$$S_{n,m}^{(1)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}} + \quad (25)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{i,0}^{(n-i)} - F_{i,0}^{((m-i)/2)} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{j,0})}{\prod_{j=1}^i Q_{j,0}^{(n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$S_{n,m}^{(2)} = \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^m \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}} + \quad (26)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\left(F_{0,i}^{((n-i))} - F_{0,i}^{((m-i)/2)} \right) \prod_{j=1}^i (-a_{0,j})}{\prod_{j=1}^i Q_{0,j}^{(n-j)} \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}.$$

Формулу різниці двох наближень неперервних дробів (4) можна записати так:

$$F_{i,j}^{(p)} - F_{i,j}^{(r)} = \frac{(-1)^r \prod_{k=1}^{r+1} a_{i+k,j+k}}{\prod_{k=1}^{r+1} Q_{i+k,j+k}^{(p-k)} \prod_{k=1}^r Q_{i+k,j+k}^{(r-k)}},$$

$$r = 0, 1, \dots, p > r, i, j = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Формулу для різниці $\tilde{f}_n - \tilde{f}_m$ наведено у монографії [5, с.156]. Інші формули встановлено з використанням аналогічної методики у припущенні, що значення всіх залишків, які фігурують у цих формулах, не дорівнюють 0.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД (3)–(4) задовольняють умову (2) і такі умови:*

$$\begin{aligned} -g_{i+1,1} &< a_{i+1,1}, \quad -g_{1,i+1} < a_{1,i+1}, \\ -g_{i+k,k}(1 - g_{i+k-1,k-1}) &\leq a_{i+k,k}, \\ -g_{k,i+k}(1 - g_{k-1,i+k-1}) &\leq a_{k,i+k}, \\ i &= 0, 1, \dots, k = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} |a_{2p,0}| &\geq (g_{2p-1,0} + 1 - |a_{2p,1}|) \times \\ &\times \left(1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}} \right), \quad (29) \\ |a_{2p,0}| &\geq g_{2p-1,0} + 1, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_{0,2p}| &\geq (g_{0,2p-1} + 1 - |a_{1,2p}|) \times \\ &\times \left(1 - |a_{1,2p+1}| + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}} \right), \quad (30) \\ |a_{0,2p}| &\geq g_{0,2p-1} + 1, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_{2m+1,1}| &\geq \frac{|a_{2m+1,0}|}{g_{2m+1,0}}, \\ |a_{1,2m+1}| &\geq \frac{|a_{0,2m+1}|}{g_{0,2m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

де $g_{i,k}$ – сталі, такі, що

$$\begin{aligned} g_{i,0} > 0, \quad g_{0,i} > 0, \quad 0 < g_{i,k} < 1, \\ i &= 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Тоді послідовності наближень парного порядку $\{\tilde{f}_{2n}\}, \{f_{2n}\}, n = 1, 2, \dots$, збігаються, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2m}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2 &\geq \tilde{f}_4 \geq \dots \geq \tilde{f}_{2n} \geq b_0 + \frac{a_{1,1}}{g_{1,1}}, \\ f_2 &\geq f_4 \geq \dots \geq f_{2n} \geq b_0 + \frac{a_{1,1}}{g_{1,1}}. \end{aligned}$$

Доведення. Оцінимо значення залишків $\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, \tilde{Q}_{k,0}^{(p)}, Q_{0,k}^{(p)}, Q_{k,0}^{(p)}, Q_{i,j}^{(r)}, Q_{j,i}^{(r)}$ за умов теореми.

Неважко показати, що за умов (28)–(29), (32) справджуються такі нерівності [7, с.171]:

$$\begin{aligned} 1 &\geq Q_{k+i,k}^{(p)} \geq g_{k+i,k}, \quad 1 \geq Q_{k,k+i}^{(p)} \geq g_{k,k+i}, \\ i, p &= 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Використовуючи оцінки (33) та умову (2), одержимо

$$\begin{aligned} F_{i,0}^{(0)} &= F_{0,i}^{(0)} = 0, \\ -|a_{i+1,1}| &\geq F_{i,0}^{(p)} = -\frac{|a_{i+1,1}|}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}} \geq -\frac{|a_{i+1,1}|}{g_{i+1,1}}, \\ -|a_{1,i+1}| &\geq F_{0,i}^{(p)} = -\frac{|a_{1,i+1}|}{Q_{1,i+1}^{(p-1)}} \geq -\frac{|a_{1,i+1}|}{g_{1,i+1}}, \\ i &= 0, 1, \dots, p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Для довільних $p = 1, 2, \dots$, враховуючи (8), (11), (29), (34), маємо: $\tilde{Q}_{2p,0}^{(0)} = 1$,

$$-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)} = |\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)}| = |a_{2p,0}| - 1 \geq g_{2p-1,0}.$$

Якщо $p > 1$, то

$$\begin{aligned} 1 - |a_{2p-1,1}| &\leq \tilde{Q}_{2p-2,0}^{(2)} = 1 + F_{2p-2,0}^{(1)} + \\ &+ \frac{(-a_{2p-1,0})}{(-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)})} \leq 1 - |a_{2p-1,1}| + \frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|}, \\ -\tilde{Q}_{2p-3,0}^{(3)} &= -1 - F_{2p-3,0}^{(1)} - \frac{a_{2p-2,0}}{\tilde{Q}_{2p-2,0}^{(2)}} \geq -1 + \\ &+ |a_{2p-2,1}| + \frac{|a_{2p-2,0}|}{1 - |a_{2p-1,1}| + \frac{|a_{2p-1,0}|}{g_{2p-1,0}}} \geq \\ &\geq g_{2p-3,0}. \end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} &\leq \tilde{Q}_{2p,0}^{(2k)} = 1 + F_{2p,0}^{(k)} + \\ &+ \frac{|a_{2p+1,0}|}{|\tilde{Q}_{2p+1,0}^{(2k-1)}|} \leq 1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \quad (35) \\ p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+1)} &\geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{a_{2p+1,0}}{g_{2p+1,0}}} \\ -1 - F_{2p-1,0}^{(k)} &\geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{a_{2p+1,0}}{g_{2p+1,0}}} - \\ &-1 + |a_{2p,1}| \geq g_{2p-1,0}, \\ p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

Діючи у той самий спосіб, доходимо висновку, що

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} &\leq \tilde{Q}_{0,2p}^{(2k)} \leq 1 - |a_{1,2p+1}| + \\ &+ \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}, \quad -\tilde{Q}_{0,2p-1}^{(2k+1)} \geq g_{0,2p-1}, \quad (37) \\ p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

З формули (27) і нерівностей (33) випливає, що

$$\begin{aligned} F_{i,0}^{(p)} - F_{i,0}^{(r)} &= -\frac{\prod_{j=1}^{r+1} (-a_{i+j,j})}{\prod_{j=1}^{r+1} Q_{i+j,j}^{(p-j)} \prod_{j=1}^r Q_{i+j,j}^{(r-j)}} \leq 0, \\ r = 1, 2, \dots, p > r. \end{aligned}$$

отже, для довільних $i = 1, 2, \dots$, послідовності $\{F_{i,0}^{(p)}\}$, $\{F_{0,i}^{(p)}\}$, а також $\{F_{0,0}^{(p)}\}$, незростаючі:

$$\begin{aligned} F_{i,0}^{(0)} &\geq F_{i,0}^{(1)} \geq F_{i,0}^{(2)} \geq \dots, \\ F_{0,i}^{(0)} &\geq F_{0,i}^{(1)} \geq F_{0,i}^{(2)} \geq \dots, \quad (38) \\ F_{0,0}^{(0)} &\geq F_{0,0}^{(1)} \geq F_{0,0}^{(2)} \geq \dots \end{aligned}$$

Беручи до уваги формули (15)–(17), нерівності (35)–(38) та умови (2), (31), одержимо для $n > m$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2n,2m}^{(1)} &= -\frac{\prod_{j=1}^{2m} |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} \times \\ &\times \left(|F_{2m,0}^{(n-m)}| + \frac{|a_{2m+1,0}|}{\left(-|\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2n-2m-1)}|\right)} \right) + \\ &- \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{|F_{i,0}^{([n-i/2])} - F_{i,0}^{([m-i/2])}| \prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} \leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{оскільки } |F_{2m,0}^{(n-m)}| - \frac{|a_{2m+1,0}|}{|\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2n-2m-1)}|} &\geq \\ \geq |a_{2m+1,1}| - \frac{a_{2m+1,1}}{g_{2m+1,1}} &\geq 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, $\tilde{P}_{2n,2m}^{(2)} \leq 0$. Тому

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2n} - \tilde{f}_{2m} &= -|F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{(m)}| + \\ &+ \tilde{P}_{2n,2m}^{(1)} + \tilde{P}_{2n,2m}^{(2)} \leq 0, \quad n > m, \end{aligned}$$

а це означає, що послідовність $\{\tilde{f}_{2p}\}$ незростаюча: $\tilde{f}_0 \geq \tilde{f}_2 \geq \tilde{f}_4 \dots$

Крім того, $\tilde{f}_{2p} = b_0 + F_{0,0}^{(p)} + \frac{|a_{1,0}|}{|\tilde{Q}_{1,0}^{(2p-1)}|} + \frac{|a_{0,1}|}{|\tilde{Q}_{0,1}^{(2p-1)}|} \geq b_0 - \frac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}$, тому послідовність $\{\tilde{f}_{2p}\}$ збігається.

Використовуючи описану вище методику, означення (9) залишків звичайних наближень, нерівності (30), (34), можна пере-

конатись у правильності таких оцінок:

$$1 - \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} \leq Q_{2p,0}^{(2k)} \leq 1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \quad -Q_{2p-1,0}^{(2k-1)} \geq g_{2p-1,0}, \quad (39)$$

$$p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$1 - \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} \leq Q_{0,2p}^{(2k)} \leq 1 - |a_{1,2p+1}| + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}, \quad -Q_{0,2p-1}^{(2k-1)} \geq g_{0,2p-1}, \quad (40)$$

$$p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Враховуючи формули (18)–(20), умови (2), (31) і нерівності (34)–(40), доходимо висновку, що $f_0 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{2p} \geq b_0 - \frac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}$, звідки впливає збіжність послідовності $\{f_{2p}\}$.

З формул (21)–(23), умов (2), (31) і нерівностей (35)–(40) впливає, що

$$\tilde{S}_{2n,2m}^{(1)} = - \frac{\prod_{j=1}^{2m} |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)} Q_{j,0}^{(2m-j)}|} \times$$

$$\times \left(|F_{2m,0}^{(n-m)}| + \frac{|a_{2m+1,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2n-2m-1)}} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{|F_{i,0}^{([n-i/2])} - F_{i,0}^{(2m-i)}| \prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)} Q_{j,0}^{(2m-j)}|} \leq 0,$$

$$\tilde{S}_{2n,2m}^{(2)} \leq 0,$$

$$\tilde{f}_{2n} - f_{2m} = -|F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{(2m)}| + \tilde{S}_{2n,2m}^{(1)} + \tilde{S}_{2n,2m}^{(2)} \leq 0, \quad n \geq 2m + 1,$$

а з формул (24)–(26) і вказаних умов і нерівностей $f_{2m} - \tilde{f}_{2l} \leq 0, m > l$.

Отже, $\tilde{f}_{2n} \leq f_{2m} \leq \tilde{f}_{2l}, l = 1, 2, \dots, m > l, n > 2m$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m}$. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай елементи ГЛД (3)–(4) задовольняють умову (2) і такі умови:

$$(1 + g_{i+2k-1,2k-1}) \left(1 - \frac{a_{i+2k+1,2k+1}}{g_{i+2k+1,2k+1}} \right) + a_{i+2k,2k} \leq 0, \quad 1 + a_{i+2k-1,2k-1} > 0, \quad (41)$$

$$i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

$$(1 + g_{2k-1,i+2k-1}) \left(1 - \frac{a_{2k+1,i+2k+1}}{g_{2k+1,i+2k+1}} \right) + a_{2k,i+2k} \leq 0, \quad 1 + a_{2k-1,i+2k-1} > 0, \quad (42)$$

$$i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

$$|a_{2p,0}| \geq \left(g_{2p-1,0} + 1 + \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \right) \times \left(1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}} \right), \quad (43)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

$$|a_{0,2p}| \geq \left(g_{0,2p-1} + 1 + \frac{|a_{1,2p}|}{g_{1,2p}} \right) \times \left(1 + \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}} \right), \quad (44)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

де $g_{i,k}, i = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, i + k \geq 1$, – додатні сталі.

Тоді послідовності наближень парного порядку $\{\tilde{f}_{2n}\}, \{f_{2n}\}, n = 1, 2, \dots$, збігаються, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2m}$,

$$\tilde{f}_{2m} \leq \tilde{f}_{2m+2p} \leq M, \quad f_{2m} \leq f_{2m+2} \leq M, \quad m = 1, 2, \dots, p = 2, 3, \dots,$$

де

$$M = b_0 + \frac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}} + \frac{|a_{1,0}|}{g_{1,0}} + \frac{|a_{0,1}|}{g_{0,1}}. \quad (45)$$

Якщо, до того ж,

$$1 + a_{2p+1,0} > 0, \quad 1 + a_{0,2p+1} > 0, \quad (46)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

то ГЛД (3)–(4) фігурно за Siemaszko'м збігається, причому

$$\tilde{f}_{2m+1} \leq \tilde{f}_{2m+2p+1} \leq M, \quad m = 1, 2, \dots, p = 2, 3, \dots,$$

а за додаткової умови

$$1 + a_{2p+1,0} + a_{2p+1,1} > 0, \quad 1 + a_{0,2p+1} + a_{1,2p+1} > 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

ГЛД (3)–(4) збігається і фігурно за Siemaszko'м збігається до одної і тої ж самої границі і $f_{2m-1} \leq f_{2m+1} \leq M, m = 1, 2, \dots$

Доведення. Так само, як при доведенні теореми 1, спочатку оцінимо значення залишків різних наближень ГЛД (3)–(4).

За умов (41), (42) справджуються такі нерівності [1]:

$$0 < Q_{i+2k,2k}^{(p)} \leq 1 + \frac{a_{i+2k+1,2k+1}}{g_{i+2k+1,2k+1}},$$

$$Q_{i+2k-1,2k-1}^{(p+1)} \leq -g_{i+2k-1,2k-1},$$

$$i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots, \quad (48)$$

$$0 < Q_{2k,i+2k}^{(p)} \leq 1 + \frac{a_{2k+1,i+2k+1}}{g_{2k+1,i+2k+1}},$$

$$Q_{i+2k-1,2k-1}^{(p+1)} \leq -g_{i+2k-1,2k-1},$$

$$i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots. \quad (49)$$

Тому

$$F_{i,0}^{(1)} = a_{1,0} \leq 0 = F_{i,0}^{(0)} \leq F_{i,0}^{(n)} \leq \frac{|a_{i+1,1}|}{g_{i+1,1}},$$

$$F_{0,i}^{(1)} = a_{0,1} \leq 0 = F_{0,i}^{(0)} \leq F_{0,i}^{(n)} \leq \frac{|a_{1,i+1}|}{g_{1,i+1}},$$

$$i = 0, 1, \dots, n = 2, 3, \dots \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & F_{i,0}^{(2n+3)} - F_{i,0}^{(2n)} = \\ & \quad - \prod_{k=1}^{2n+1} |a_{i+k,k}| \\ = & \frac{\quad}{(-1)^{2n+1} \prod_{k=1}^{2n+1} |Q_{i+k,k}^{(2n+3-k)}| \prod_{k=1}^{2n} |Q_{i+k,k}^{(2n-k)}|} > 0, \\ & F_{i,0}^{(2n+3)} - F_{i,0}^{(2n+2)} = \\ & \quad - \prod_{k=1}^{2n+3} |a_{i+k,k}| \\ = & \frac{\quad}{\prod_{k=1}^{2n+2} |Q_{i+k,k}^{(2n+3-k)}| \prod_{k=1}^{2n+2} |Q_{i+k,k}^{(2n+2-k)}|} < 0, \\ & i = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

отже,

$$F_{i,0}^{(2n)} \leq F_{i,0}^{(2n+3)} \leq F_{i,0}^{(2n+2)},$$

$$i = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots \quad (51)$$

Аналогічно,

$$F_{0,i}^{(2n)} \leq F_{0,i}^{(2n+3)} \leq F_{0,i}^{(2n+2)},$$

$$i = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots \quad (52)$$

Використовуючи схему оцінювання залишків, застосовану при доведенні теореми 1, умови (43) та нерівності (50), одержимо

$$\tilde{Q}_{2p,0}^{(0)} = 1, -\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)} \geq g_{2p-1,0}, p = 1, 2, \dots$$

Якщо $p > 1$, то

$$1 - |a_{2p-1,1}| \leq \tilde{Q}_{2p-2,0}^{(2)} \leq 1 - |a_{2p-1,1}| +$$

$$+ \frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|}, \quad -\tilde{Q}_{2p-3,0}^{(3)} \geq g_{2p-3,0}, \quad (53)$$

$$1 \leq \tilde{Q}_{2p,0}^{(2k)} = 1 + F_{2p,0}^{(k)} + \frac{a_{2p+1,0}}{\tilde{Q}_{2p+1,0}^{(2k-1)}} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},$$

$$-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+1)} = \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k)}} - 1 - F_{2p-1,0}^{(k)} \geq$$

$$\geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \geq$$

$$\geq g_{2p-1,0}, \quad p = 1, 2, \dots, k = 2, 3, \dots \quad (54)$$

Діючи у той самий спосіб, можна перекоонатись у правильності нерівностей

$$\tilde{Q}_{0,2p}^{(0)} = 1, -\tilde{Q}_{0,2p-1}^{(1)} \geq g_{0,2p-1}, p = 1, 2, \dots$$

Якщо $p > 1$, то

$$1 - |a_{1,2p-1}| \leq \tilde{Q}_{0,2p-2}^{(2)} \leq 1 - |a_{1,2p-1}| +$$

$$+ \frac{|a_{0,2p-1}|}{|g_{0,2p-1}|}, \quad -\tilde{Q}_{0,2p-3}^{(3)} \geq g_{0,2p-3}, \quad (55)$$

$$1 \leq \tilde{Q}_{0,2p}^{(2k)} \leq 1 + \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}},$$

$$-\tilde{Q}_{0,2p-1}^{(2k+1)} \geq g_{0,2p-1},$$

$$p = 1, 2, \dots, k = 2, 3, \dots \quad (56)$$

Тому $\tilde{f}_{2n} \leq M$, $n = 1, 2, \dots$, де M визначається згідно з (45).

З формул (15)–(17) і нерівностей (50)–(56), з урахуванням умов (2), (43), (44) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \tilde{P}_{2m+2p,2m}^{(1)} = \\ = & \sum_{i=1}^{2m} \frac{(F_{i,0}^{([n-i/2])} - F_{i,0}^{([m-i/2])}) \prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} - \\ & \frac{\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2p-1)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+2p-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} \geq 0, \\ & \tilde{P}_{2m+2p,2m}^{(2)} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{2m+2p} - \tilde{f}_{2m} \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad p = 2, 3, \dots, \quad \text{ми (21)–(26):}$$

звідки випливає, що

$$\text{а) } p = 2, \quad m = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{f}_2 \leq \tilde{f}_6 \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{4k-2}\}$ збігається;

$$\text{б) } p = 2, \quad m = 2k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{f}_4 \leq \tilde{f}_8 \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{4k}\}$ збігається;

$$\text{в) } p = 2, \quad m = 6l, \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{f}_6 \leq \tilde{f}_{12} \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{6l}\}$ збігається.

Оскільки $\{\tilde{f}_{12n}\} \subset \{\tilde{f}_{6l}\}$, $\{\tilde{f}_{12n}\} \subset \{\tilde{f}_{4k}\}$, $\{\tilde{f}_{12n-6}\} \subset \{\tilde{f}_{6l}\}$, $\{\tilde{f}_{12n-6}\} \subset \{\tilde{f}_{4k-2}\}$, то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{f}_{6l} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{4k+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n},$$

тобто послідовність $\{\tilde{f}_{2n}\}$ збігається.

Використовуючи описану вище методику, означення (9) залишків звичайних наближень (7), нерівності (50), можна переконались у правильності таких оцінок:

$$\begin{aligned} 1 &\leq Q_{2p,0}^{(2k)} \leq 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \\ 1 &\leq Q_{0,2p}^{(2k)} \leq 1 + \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}, \\ -Q_{2p-1,0}^{(2k+1)} &\geq g_{2p-1,0}, \quad -Q_{0,2p-1}^{(2k+1)} \geq g_{0,2p-1}, \\ p &= 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (57)$$

$$f_{2n} \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Беручи до уваги формули (18)–(20), нерівності (50)–(52), (57), з урахуванням умов (2), (43), доходимо висновку, що

$$P_{2m+2,2m}^{(1)} \geq 0, \quad P_{2m+2,2m}^{(2)} \geq 0,$$

$$f_{2m+2} - f_{2m} \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тому послідовність $\{f_{2m}\}$ неспадна, обмежена, отже, збіжна.

Для того, щоб переконались у тому, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n}$, скористаємось формула-

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{4m+4,2m}^{(1)} &= \\ &= \sum_{i=1}^{2m} \frac{|F_{i,0}^{([2m+2-i/2])} - F_{i,0}^{(2m-i)}| \prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(4m+4-j)} Q_{j,0}^{(2m-j)}|} + \\ &+ \frac{\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2m+3)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(4m+4-j)} Q_{j,0}^{(2m-j)}|} \geq 0, \\ \tilde{S}_{4m+4,2m}^{(2)} &\geq 0, \\ \tilde{f}_{4m+4} - f_{2m} &= |F_{0,0}^{(2m+2)} - F_{0,0}^{(2m)}| + \\ + \tilde{S}_{4m+4,2m}^{(1)} + \tilde{S}_{4m+4,2m}^{(2)} &\geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{4m+8,4m+4}^{(1)} &= \\ &= \sum_{i=1}^{4m+4} \frac{|F_{i,0}^{(4m+8-i)} - F_{i,0}^{([2m+2-i/2])}| \prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |Q_{j,0}^{(4m+8-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(4m+4-j)}|} - \\ &- \frac{\prod_{j=1}^{4m+5} |a_{j,0}|}{Q_{4m+5,0}^{(3)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(4m+4-j)} Q_{j,0}^{(4m+8-j)}|} \geq 0, \\ S_{4m+8,4m+4}^{(2)} &\geq 0, \\ f_{4m+8} - \tilde{f}_{4m+4} &= |F_{0,0}^{(4m+8)} - F_{0,0}^{(2m+2)}| + \\ + S_{4m+8,4m+4}^{(1)} + S_{4m+8,4m+4}^{(2)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Отже, $f_{2m} \leq \tilde{f}_{4m+4} \leq f_{4m+8}$, $m = 1, 2, \dots$, тому послідовності $\{f_{2n}\}$, $\{\tilde{f}_{2n}\}$ збігаються до одної і тої ж самої границі.

Розглянемо тепер залишки вигляду $\tilde{Q}_{2p+1-r,0}^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, 2p$, за умов (41)–(44) і додаткової умови (46). Маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{2p+1,0}^{(0)} &= 1, \quad 1 \geq \tilde{Q}_{2p,0}^{(1)} = 1 + a_{2p+1,0} > 0, \\ -\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2)} &= \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(1)}} - 1 - F_{2p,0}^{(1)} \geq \\ &\geq |a_{2p,0}| + |a_{2p+1,1}| - 1 \geq g_{2p-1,0}. \end{aligned} \quad (58)$$

Якщо $p > 1$, то

$$\begin{aligned} 1 - |a_{2p-1,1}| &\leq \tilde{Q}_{2p-2,0}^{(3)} \leq 1 - |a_{2p-1,1}| + \\ + \frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|}, \quad -\tilde{Q}_{2p-3,0}^{(4)} &\geq g_{2p-3,0}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
1 &\leq \tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)} = 1 + F_{2p,0}^{(k)} + \frac{a_{2p+1,0}}{\tilde{Q}_{2p+1,0}^{(2k)}} \leq \\
&\leq 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \\
-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+2)} &= \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)}} - 1 - F_{2p-1,0}^{(k+1)} \geq \\
&\geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \geq \\
&\geq g_{2p-1,0}, \quad p = 1, 2, \dots, k = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{60}$$

Діючи у той самий спосіб, можна переко-
нати у правильності аналогічних нерівно-
стей для $\tilde{Q}_{0,2p+1-r}^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, 2p$.

Беручи до уваги нерівності (58)–(60),
одержимо:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(1)} = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} \left(F_{i,0}^{([m+p+(1-i)/2])} - F_{i,0}^{([m+(1-i)/2])} \right) \times \\
&\quad \frac{\prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+2p+1-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+1-j)}|} \times \\
&\quad \frac{\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2p)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+2p+1-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+1-j)}|} \times \\
&\quad \times \left(-F_{2m+1,0}^{(p)} + \frac{|a_{2m+2,0}|}{\tilde{Q}_{2m+2,0}^{(2p-1)}} \right) \geq 0, \\
&\quad m = 1, 2, \dots, p = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Аналогічно, $\tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(2)} \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_{2m+5} - \tilde{f}_{2m} = F_{0,0}^{(m+2)} - F_{0,0}^{(m)} + \\
&\tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \\
&\tilde{f}_{2m+2p+1} - \tilde{f}_{2m+1} = F_{0,0}^{(m+p)} - F_{0,0}^{(m)} + \\
&+ \tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(2)} \geq 0, \\
&\quad m = 1, 2, \dots, p = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Крім того, $\tilde{f}_{2n+1} \leq M$, $n = 1, 2, \dots$, де M
визначається згідно з (45).

Знову розглянемо 3 випадки:

а) $p = 2$, $m = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{f}_3 \leq \tilde{f}_7 \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{4k-1}\}$ збігається;

б) $p = 2$, $m = 2k$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{f}_5 \leq \tilde{f}_9 \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{4k+1}\}$ збігається;

в) $p = 2$, $m = 6l$, $l = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{f}_7 \leq \tilde{f}_{13} \leq \dots \leq M,$$

послідовність $\{f_{6l+1}\}$ збігається.

Оскільки $\{\tilde{f}_{12n+1}\} \subset \{\tilde{f}_{6l+1}\}$,
 $\{\tilde{f}_{12n+1}\} \subset \{\tilde{f}_{4k+1}\}$, $\{\tilde{f}_{12n-5}\} \subset \{\tilde{f}_{6l+1}\}$,
 $\{\tilde{f}_{12n-5}\} \subset \{\tilde{f}_{4k-1}\}$, то $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{f}_{6l+1} =$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{4k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{4k+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2n+1},$$

тобто послідовність $\{\tilde{f}_{2n+1}\}$ збігається.

Далі,

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} = \frac{-\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(4)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} + \\
&+ \sum_{i=1}^{2m} \left(F_{i,0}^{([m+(5-i)/2])} - F_{i,0}^{([m-i/2])} \right) \times \\
&\quad \frac{\prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} \geq 0, \quad \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \geq 0, \\
&\quad \tilde{f}_{2m+5} - \tilde{f}_{2m} = F_{0,0}^{(m+2)} - F_{0,0}^{(m)} + \\
&+ \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(1)} = \\
&= \sum_{i=1}^{2m+4} \left(F_{i,0}^{([m+5-i/2])} - F_{i,0}^{([m+(5-i)/2])} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \frac{\prod_{j=1}^i |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^i |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+10-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)}|} + \\
&\quad \frac{\prod_{j=1}^{2m+5} |a_{j,0}|}{\left(-\tilde{Q}_{2m+5,0}^{(5)} \right) \prod_{j=1}^{2m+4} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+10-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)}|} \times \\
&\quad \times \left(\frac{|a_{2m+6,0}|}{\tilde{Q}_{2m+6,0}^{(4)}} - F_{2m+5,0}^{(2)} \right) \geq 0, \\
&\quad \tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(2)} \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2m+10} - \tilde{f}_{2m+5} &= F_{0,0}^{(m+5)} - F_{0,0}^{(m+2)} + \\ &+ \tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(2)} \geq 0, \end{aligned} \quad (62)$$

$m = 1, 2, \dots$

З нерівностей (61), (62) і збіжності послідовностей $\{\tilde{f}_{2k+1}\}$, $\{\tilde{f}_{2k}\}$, випливає рівність $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2k+1}$.

Розглянемо тепер залишки вигляду $Q_{2p+1-r,0}^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, 2p$, за умов (41)–(44) і додаткової умови (47). Маємо: $Q_{2p+1,0}^{(0)} = 1$,

$$\begin{aligned} 1 &\geq Q_{2p,0}^{(1)} = 1 + a_{2p+1,0} + a_{2p+1,1} > 0, \\ -Q_{2p-1,0}^{(2)} &\geq |a_{2p,0}| - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} - 1 \geq g_{2p-1,0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)} \leq 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \\ -\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+2)} &= \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)}} - 1 - F_{2p-1,0}^{(2k+2)} \geq \\ &\geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \geq \\ &\geq g_{2p-1,0}, \quad p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Міркуючи так само, одержимо аналогічні нерівності для $Q_{0,2p+1-r}^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, 2p$.

Враховуючи формули (18)–(20), умови (43), (44), нерівності (50)–(52), і оцінки залишків $Q_{p,0}^{(k)}$, $Q_{0,p}^{(k)}$, $p = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots$, доходимо висновку, що

$$\begin{aligned} f_{2m+3} - f_{2m+1} &= F_{0,0}^{(2m+3)} - F_{0,0}^{(2m+1)} + \\ &+ P_{2m+3,2m+1}^{(1)} + P_{2m+3,2m+1}^{(2)} \geq 0, \end{aligned} \quad (63)$$

$m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} f_{2m+3} - f_{2m} &= F_{0,0}^{(2m+3)} - F_{0,0}^{(2m)} + \\ &+ P_{2m+3,2m}^{(1)} + P_{2m+3,2m}^{(2)} \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} f_{2m+6} - f_{2m+3} &= F_{0,0}^{(2m+6)} - F_{0,0}^{(2m+3)} + \\ &+ P_{2m+6,2m+3}^{(1)} + P_{2m+6,2m+3}^{(2)} \geq 0, \end{aligned} \quad (65)$$

$m = 1, 2, \dots$

Крім того,

$$f_1 < b_0 < f_{2n+1} \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (66)$$

де M визначається згідно з (45).

З нерівностей (63), (66) випливає, що послідовність $\{f_{2k-1}\}$ неспадна, обмежена і тому збіжна.

З нерівностей (64), (65) і збіжності послідовностей $\{f_{2k-1}\}$, $\{f_{2k}\}$, випливає рівність $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k+1}$.

Беручи до уваги ще й рівність $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{2k}$, доходимо висновку про збіжність і фігурну збіжність ГЛД (3)–(4) до одної і тої ж самої границі. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонова Т. М. Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11-15.
2. Антонова Т. М., Возна С. М. Дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Математика и кибернетика – прикладные аспекты. – 2015. – 6/4(78) – С. 119-126.
3. Антонова Т. М., Сусь О. М. Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 4-9.
4. Антонова Т. М., Сусь О. М. Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядку для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 660. – С. 49-55.
5. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
6. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
7. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.
8. Murphy J., O'Donohoe M. R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – № 4. – P. 181-190.
9. Siemaszko W. J. Branched continued fractions for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121-125.
10. Siemaszko W. J. On some conditions for convergence of branched continued fractions // Lecture Notes in Math. – 1981. – **888**. – P. 363-370.