УДК 515.12

©2017 р. І.Я. Банах, Т.О. Банах

Львівський національний університет імені Івана Франка
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. Підстригача НАН України

СИЛЬНО σ-МЕТРИЗОВНІ ПРОСТОРИ Є СУПЕР σ-МЕТРИЗОВНИМИ

Топологічний простір X називається *сильно σ-метризовним*, якщо X зображається як об'єднання зростаючої послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ замкнених метризовних підпросторів так, що кожна збіжна послідовність в X міститься у деякій множині X_n. Якщо кожна компактна підмножина простору X міститься в деякому X_n, тоді простір X називається *супер σ-метризовним.* Відповідаючи на запитання В.К. Маслюченка і О.І. Філіпчук, ми доводимо, що кожен сильно σ-метризовний простір є супер σ-метризовним.

A topological space X is called *strongly σ-metrizable* if $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ for an increasing sequence $(X_n)_{n\in\omega}$ of closed metrizable subspaces such that every convergence sequence in X is contained in some X_n. If, in addition, every compact subset of X is contained in some X_n, $n \in \omega$, then X is called *super σ-metrizable.* Answering a question of V.K. Maslyuchenko and O.I. Filipchuk, we prove that a topological space is strongly σ-metrizable if and only if it is super σ-metrizable.

Слідуючи [4,5], ми називаємо простір X

- *σ-метризовним*, якщо X можна записати як об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів;
- *сильно σ-метризовним*, якщо X можна записати як об'єднання зростаючої послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ замкнених метризовних підпросторів так, що кожна збіжна послідовність в X міститься у деякій підмножині X_n;
- *супер σ-метризовним*, якщо X можна записати як об'єднання зростаючої послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ замкнених метризовних підпросторів так, що кожна компактна підмножина простору X міститься у деякій підмножині X_n.

У дисертації О.І. Філіпчук [6] доведено, що гаусдорфовий простір є сильно σ-метризовним тоді і лише тоді, коли він супер σ-метризовний. У цій статті ми доведемо, що ця характеризація залишається вірною для усіх топологічних просторів. Для цього ми використаємо один результат Алас і Вільсона [1] (див. також [2]) про секвенціальну компактність компактних (не обов'язково гаусдорфових) просторів. Нагадаємо, що топологічний простір X називається

- *секвенціально компактним*, якщо кожна послідовність в X містить збіжну підпослідовність;
- *ліндедефовим*, якщо з кожного відкритого покриття простору X можна виділити зліченне підпокриття;
- *спадково ліндедефовим*, якщо кожен підпростір простору X ліндедефовий.

Теорема 1 (Alas, Wilson). *Кожний компактний спадково ліндедефовий простір є секвенціально компактним.*

Із цієї теореми випливає

Наслідок 1. *Кожний компактний σ-метризовний топологічний простір X є спадково ліндедефовим та секвенціально компактним.*

Доведення. Запишемо σ-метризовний простір X як зліченне об'єднання послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ замкнених метризовних підпросторів. Кожний метризовний підпростір X_n є компактним (як замкнена підмножина компактного простору) і тому має зліченну базу і є спадково ліндедефовим. Тоді об'єднання $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ також спадково ліндедефове. За теоремою 1, простір X є секвенціально компактним.

Для гаусдорфових просторів наступна характеризація була доведена О.І.Філіпчук у своїй дисертації [6].

Теорема 2. *Топологічний простір є сильно σ-метризовним тоді і лише тоді, коли він супер σ-метризовний.*

Доведення. Оскільки кожна збіжна послідовність з долученою граничною точкою є компактною множиною, то із супер σ-метризовності випливає сильна σ-метризовність. Тепер припустимо, що топологічний простір X є сильно σ-метризовним. Зобразимо X у вигляді об'єднання зростаючої послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ замкнених метризовних просторів, що охоплюють збіжні послідовності X. Щоб довести супер σ-метризовність простору X, слід перевірити, що кожна компактна підмножина $K \subseteq X$ міститься у деякій множині X_n.

Припустимо, що це не так, тобто існує компактна підмножина $K \subset X$, яка не міститься в жодній множині X_n. Тоді для кожного $n \in \omega$ можна знайти точку $x_n \in K \setminus X_n$. Наслідок 1 гарантує, що компактний σ-метризовний простір K є секвенціально компактним. Тому послідовність $(x_n)_{n\in\omega}$ містить збіжну підпослідовність $(x_{n_i})_{i\in\omega}$ для деякої зростаючої числової послідовності $(n_i)_{i\in\omega}$. Вибір послідовності $(X_n)_{n\in\omega}$ гарантує, що $\{x_{n_i}\}_{i\in\omega} \subseteq X_m$ для деякого $m \in \omega$. Виберемо номер $i \in \omega$ з $n_i \geq m$ і зауважимо, що належність $x_{n_i} \in X_m$ суперечить вибору точки $x_{n_i} \in X \setminus X_{n_i} \subseteq X \setminus X_m$.

Отримана суперечність доводить, що $K \subseteq X_n$ для деякого $n \in \omega$. Тому простір X є супер σ-метризовним.

Із теореми 2 випливає наступна метризаційна теорема.

Теорема 3. *Для компактного простору X наступні умови еквівалентні:*

1) X – *метризовний;*
2) X – *гаусдорфовий і σ-метризовний;*
3) X – *сильно σ-метризовний;*
4) X – *супер σ-метризовний.*

Доведення. Еквівалентність умов (3) $\Leftrightarrow$ (4) випливає з теореми 2. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (4) тривіальна, а (4) $\Rightarrow$ (1) негайно випливає з компактності простору X та означення супер σ-метризовності. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) тривіальна. Залишилось довести, що (2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо, що компактний гаусдорфовий простір X є σ-метризовним і, отже, є зліченним об'єднанням $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ своїх замкнених метризовних підпросторів. Для кожного $n \in \omega$ метризовний простір X_n є компактним (як замкнений підпростір компактного простору X) і тому має зліченну базу топології $\mathcal{B}_n$. Тоді об'єднання $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ є зліченною сіткою топології простору X. За теоремою 3.1.19 із [3], компактний гаусдорфів простір X має зліченну базу і, отже, є метризовним.

Умова гаусдорофовості у теоремі 3(2) є суттєвою, про що свідчить наступний (класичний) приклад.

Приклад 1. *Нехай X – зліченний простір, наділений топологією Зариського*

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F : F \text{ – скінченна}\}.$$

Простір X є компактним і σ-метризовним, проте не метризовним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Alas O., Wilson R.* When is a compact space sequentially compact? // Topology Proc. – 2005. – **29**, N2. – C.327–335.

2. *Bella A., Nyikos P.* Sequential compactness vs. countable compactness // Colloq. Math. – 2010. – **120**, N2. – C.165–189.

3. *Engelking R.* General Topology. — Berlin: Heldermann Verlag, 1989. — 529 p.

4. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, №3. – С. 337–344.

5. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теорем Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 191/192. Математика. – 2004. – С. 61–66.

6. *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Чернівці, 2010. – 124 с.